现代数学译丛

非线性微分方程

〔意〕G. 桑森 R. 康蒂 著

科学出版社

目　录

第一章　微分方程组解的一般定理

为了理解本书所讨论的问题所必需的一般定理，可以在任何一本微分方程的现代教科书中找到.

然而，为了使读者免于查阅与所考虑的问题并不紧密相关的繁冗文献，在这一章里，我们将介绍某些一般定理以及一些有用的补充讨论.

§1. 积 分 曲 线

1. 积分曲线. 正向终极时间 t^+

(a) 通常我们将讨论常微分方程组(系统)*:

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \cdots, x_n)\ (i = 1, \cdots, n), \qquad (1.1.1)$$

其中 $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 为实欧几里得空间 S_{n+1} 中的点，它在"高"为 $b-a$，"底"为 D 的柱体

$$K:\ a < t < b,\ (x_1, \cdots, x_n) \in D$$

上变化，此处 D 为所有点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所组成的超平面 S_n 的一个区域[1].

特别是，我们可能有 $a = -\infty$ 或者 $b = +\infty$，或者 D 可能是整个超平面. 可能出现这些情形中的两个或三个同时都满足的情形. 因此，K 甚至可能就是点 $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 所在的整个空间 S_{n+1}.

变量 t 将认为是时间.

除非另做假设，我们假定 f_i 为 K 上的实连续函数.

---

*) 我们一般把常微分方程组译为"系统". ——译者注

1) 区域=开的连通集.

(b) 设 $P_0=(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 为K中给定一点. 由微分方程基础理论(参看 Sansone [1], 第一卷, 第一章)可知, 应用熟知的存在定理之一,在区间 $t_0\leqslant t<t_1$ (此处 $t_1\leqslant b$) 上,至少可以找到一组 n 个连续函数 $\varphi_i(t)$, 满足方程组 (1.1.1),所以

$$d\varphi_i(t)/dt=f_i(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)),$$
$$(t_0\leqslant t<t_1;\ i=1, \cdots, n), \tag{1.1.2}$$

且适合

$$\varphi_i(t_0)=x_i^0 \quad (i=1, \cdots, n). \tag{1.1.3}$$

既然函数 $\varphi_i(t)$ 满足 (1.1.2), 它们在开区间 (t_0, t_1) 内就有连续的导数,而在 t_0 处右导数连续.

这样的一组 φ_i 称为 (1.1.1) 在 $[t_0, t_1)$ 上的一个解. 而K中由参数方程

$$x_i=\varphi_i(t), \quad t_0\leqslant t<t_1$$

所表示的点集,称为(1.1.1)的经过P_0或者由P_0出发的积分曲线弧.

(c) 当 $t_1=b$ 时, 我们就称 t_1 为 (b) 中所考虑的曲线弧 $x_i=\varphi_i(t)$ 的正向终极时间. 假如不然, $t_1<b$, 则有两种可能.

第一种情形是: 对于任一有界闭集 $H\subset D$, 存在依赖于H的 $\bar{t}$, $t_0<\bar{t}<t_1$, 使得点 $(\varphi_1(\bar{t}), \cdots, \varphi_n(\bar{t}))$ 属于 $D-H$. (甚至, 我们可以证明: 在这种情形, 存在 $\bar{t}$: $t_0<\bar{t}<t_1$, 使得对于区间 $[\bar{t}, t_1)$ 上的所有的 t, 点 $(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$ 都属于 $D-H$. 参看 K. Mayrhofer [1], I. P. Eroughin [1]). 在这种情形,我们也称 t_1 是积分曲线弧的正向终极时间.

第二种可能则不然. 这时存在有界闭集 $H\subset D$, 使得对于 $t_0\leqslant t<t_1$, 有 $(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))\in H$. 在这种情形下,设 F_i 为柱体: $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $(x_1, \cdots, x_n)\in H$ 上的 $\max|f_i(t, x_1, \cdots, x_n)|$。 对于 t 在区间 $[t_0, t_1]$ 上的任何一对值 t', t'', 将 (1.1.2) 积分,即得 $|\varphi_i(t'')-\varphi_i(t')|\leqslant F_i|t''-t'|$. 由此可知当 $t\to t_1-0$ 时,每个 φ_i 的极限是有限的,我们把它记为 x_i^1.

由于点 $P_1=(t, x_1^1, \cdots, x_n^1)$ 属于K, 再一次应用已知的方法,在某区间 $[t_1, t_2)$ $(t_1<t_2)$ 上, 我们至少可以找到一组 n 个连

续函数．我们把这些函数称为原先解的延展，并且仍然记为 φ_i．对于 $t\in[t_0, t_2)$，这一组 φ_i 称为 (1.1.1) 在 $[t_0, t_2)$ 上的解．而点集 $x_i=\varphi_i(t)$，$t_0\leqslant t<t_2$，仍然称为 (1.1.1) 的经过点 P_0 的积分曲线弧．

当 $t_2=b$ 时，t_2 称为正向终极时间；假如 $t_2<b$，我们又遇到上述的两种可能．如果第一种情形成立，t_2 就是正向终极时间，否则，我们能找到对应于 t_2 的另外一点 $P_2\in K$．这个步骤可以继续进行下去．

假如这种步骤可以继续无限多次，我们就得到一个序列 $t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots<b$，它的上极限称为所给积分曲线弧的正向终极时间[1]．

这样，对于 (1.1.1) 的由任意一点 $P_0\in K$ 出发的各个积分曲线弧，相应地我们都有一个正向终极时间，记为 t^+．

类似地，我们可以定义一个从负向终极时间（记为 t^-）出发而到达 P_0 的积分曲线弧．

K 中由 $x_i=\varphi_i(t)(t^-<t<t^+)$ 所给出的点集，称为 (1.1.1) 的经过 P_0 的积分曲线．n 个函数 φ_i 给出了 (1.1.1) 在区间 (t^-, t^+) 上的一个解[2]．

我们把定义在 $(t^-, t_0]$ 或 $[t_0, t^+)$ 上的两个积分曲线弧的每一个，称为 (1.1.1) 的完整积分曲线弧．

(d) 在所有的情形中，均有 $a\leqslant t^-<t^+\leqslant b$．

现在我们举一个只含一个方程 $dx_1/dt=x_1^2$ 的系统 $(n=1)$ 的例子．这个系统只有一条积分曲线 $x_1=0$，能使 $t^-=a=-\infty$，$t^+=b=+\infty$．其它的积分曲线都是双曲线 $x_1=(t_0+1/x_0-t)^{-1}$ 的分支．其中，当 $x_0>0$ 时，$-\infty<t<t_0+1/x_0$，而当 $x_0<0$ 时，$t_0+1/x_0<t<+\infty$．因此，对于前者有

---

1) 我们注意到，假如系统 (1.1.1) 满足唯一性定理（参看§3.1），则正向终极时间与用以确定这些延展的特殊的方法无关．

2) 当然，并不排斥当 $t\to t^+-0$ 或 $t\to t^-+0$ 时，$\varphi_i(t)$ 的某几个或者所有的极限可能是有限的．

$t^- = a = -\infty, t^+ = t_0 + 1/x_0 < b = +\infty$,对于后者有 $-\infty = a < t^- = t_0 + 1/x_0$, $t^+ = b = +\infty$.

下面几段将研究给定系统的积分曲线，对于它们有 $t^+ = b$. 这时,我们假设 D 是 S_n 中的所有点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所组成的集合.

2. $t^+ = b$ 的条件. $n = 1$ 的情形

(a) 在这一段里，我们要讨论 $n = 1$ 的情形. 这时，系统(1.1.1)退化成只有一个方程,我们可以把它写成

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1.4}$$

其中 x 对应于 x_1, $\dot{x}$ 对应于 $dx/dt = dx_1/dt$, f 对应于 f_1. 假设函数 $f(t, x)$ 在集合

$$K:\ a < t < b,\ -\infty < x < +\infty$$

上为实的连续函数.

如果将(1.1.4)两端同乘以 x,就得到

$$dx^2/dt = 2xf(t, x), \tag{1.1.5}$$

由此可以推出,条件

$$xf(t, x) \leqslant 0 \tag{1.1.6}$$

保证 $x^2(t)$ 在 $t < b$ 时保持有界(非增),因此,对所有的积分曲线都有 $t^+ = b$.

(b) 将(1.1.6)做如下修改，就可以得到一个虽然不太显然的,然而却是比较有用的判别法.

设 $\omega(t, u)$ 为集合 $a < t < b$, $0 \leqslant u < +\infty$ 上的实连续函数,且对于方程

$$du/dt = \omega(t, u) \tag{1.1.7}$$

的所有的积分曲线,其正向终极时间 t^+ 均与 b 重合.

而且,设对于 (a, b) 的每个 t, $u\omega(t, u)$ 关于变量 u 非减.

我们希望证明,如果

$$xf(t, x) \leqslant |x|\omega(t, |x|) \tag{1.1.6.1}$$

成立,则对于(1.1.4)的积分曲线，也会有 $t^+ = b$. 下面的论证是 S. Faedo [1] 给出的,我们作了适当的修改(也可参看：Tokui Satō

[1]).

设 $P_0=(t_0, x^0)$ 为K中任意一点,而 $\varphi(t)$ 为 (1.1.4) 的由 P_0 出发的解. 于是, $d\varphi(t)/dt=f(t, \varphi(t))$, $t_0\leqslant t<t^+$. 把这等式两端同乘以 $2\varphi(t)$, 并由 t_0 到 t 积分,就得到

$$\varphi^2(t)=(x^0)^2+2\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)f(\tau, \varphi(\tau))d\tau.$$

根据 (1.1.6.1),我们有

$$\varphi^2(t)<(x^0)^2+1+2\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|\,\omega(\tau, |\varphi(\tau)|)d\tau,$$
$$t_0\leqslant t<t^+. \tag{1.1.8}$$

现在,设 $u(t)$ 为(1.1.7)的由点 $(t_0,\sqrt{(x^0)^2+1})$ 出发的解,则

$$u^2(t)=(x^0)^2+1+2\int_{t_0}^{t}u(\tau)\omega(\tau, u(\tau))d\tau,$$
$$t_0\leqslant t<b. \tag{1.1.9}$$

由 (1.1.8) 及 (1.1.9) 可知 $\varphi^2(t_0)<u^2(t_0)$. 因此, 存在 t_0 的一个右方邻域, 在其中有 $\varphi^2(t)<u^2(t)$, 或者 $|\varphi(t)|<u(t)$. 设 t_1 为使得 $|\varphi(t_1)|=u(t_1)$ 的第一个点, 则不可能有 $t_1<t^+$. 因为否则,由 $u\omega(t, u)$ 非减这个事实以及 (1.1.8) 就将推得

$$\varphi^2(t_1)=u^2(t_1)=(x^0)^2+1+2\int_{t_0}^{t_1}u(\tau)\omega(\tau, u(\tau))d\tau$$
$$\geqslant(x^0)^2+1+2\int_{t_0}^{t_1}|\varphi(\tau)|\omega(\tau, |\varphi(\tau)|)d\tau>\varphi^2(t_1),$$

但这是不可能的. 因此 $t_1=t^+$, 且对于 $t_0\leqslant t<t^+$, 有 $|\varphi(t)|<u(t)$. 如果 $t^+<b$, 则当 $t\to t^+-0$ 时, $|\varphi(t)|$ 将保持小于 $u(t)$, 因此在 t^+ 之后还可以延展(参看§1.1(c)). 从而 $t^+=b$.

(c) 特别是,假如

$$|f(t, x)|\leqslant\lambda(t)|x|+\mu(t), \tag{1.1.10}$$

其中 $\lambda(t)$, $\mu(t)$ 为 (a, b) 上的非负连续函数,则对于(1.1.4)的积分曲线, 我们都将有 $t^+=b$. 为了证实这一点, 只要注意到 $xf(t, x)\leqslant|xf(t, x)|\leqslant|x|\{\lambda(t)|x|+\mu(t)\}$, 而对于$(a, b)$的

每个 t，函数 $\lambda(t)u^2+\mu(t)u$ 对于 $u>0$ 都是非减的就足够了. 如所熟知，且也易于验证，对于线性方程 $\dot{u}=\lambda(t)u+\mu(t)$ 的积分曲线，有 $t^+=b$.

(d) (1.1.10) 提供了另一个关于 $t^+=b$ 的准则.

假如 $x(t)$ 为可微函数，并令 $r(t)=|x(t)|$，则 $r(t)$ 在所有点都存在右导数 $\dot{r}_+(t)$ 及左导数 $\dot{r}_-(t)$. 当 $x(t)\neq 0$ 时，这二者相等. 而且还有

$$|\dot{r}_\pm(t)|=|\dot{x}(t)|. \tag{1.1.11}$$

因此，如果 $x(t)$ 为 (1.1.4) 在 $[t_0, t^+)$ 上的解，则有

$$\dot{r}_\pm(t)\leqslant|f(t, x(t))|. \tag{1.1.12}$$

现在假设存在在 $[t_0, b)$ 上的连续函数 $\lambda(t)\geqslant 0$ 以及当 $u>0$ 时为连续的函数 $h(u)>0$，使得对某个 $u_0>0$，有

$$\int_{u_0}^{+\infty}\frac{du}{h(u)}=\lim_{v\to+\infty}\int_{u_0}^{v}\frac{du}{h(u)}=+\infty, \tag{1.1.13}$$

并且进一步假设

$$|f(t, x)|\leqslant\lambda(t)h(r),\ (r=|x|). \tag{1.1.14}$$

于是，由 (1.1.14) 及 (1.1.12)，对 (1.1.4) 在 $[t_0, t^+)$ 上的每一个解 $x(t)$，我们都将有 $\dot{r}_\pm(t)/h(r(t))\leqslant\lambda(t)$，对 t 积分得到:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{r}_\pm(\tau)}{h(r(\tau))}d\tau\leqslant\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau.$$

但是，$r(t)=|x(t)|$ 也和 $x(t)$ 一样，是绝对连续函数，因此，对上面的不等式的左端，可以应用熟知的积分变量置换定理，得到

$$\int_{r(t_0)}^{r(t)}\frac{du}{h(u)}\leqslant\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau. \tag{1.1.15}$$

如果 $t^+<b$，则由于已假设 $\lambda(t)$ 连续，所以当 $t\to t^+-0$ 时，右端将保持有限；因此，左端不可能趋于 $+\infty$. 再由 (1.1.13)，就得出 $r(t)$ 将保持有界. 于是，当 $t\to t^+-0$ 时，$x(t)$ 将存在有限的极限（§1.1(c)），并且在 t^+ 之后还可以延展. 所以，$t^+=b$.

(e) 注意到，假如在其它假设之外，再加上

$$\int_{t_0}^{b} \lambda(\tau)d\tau = \lim_{t\to b-0}\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau,$$

其中的极限是有限的，则当 $t \to b-0$ 时，$x(t)$ 存在有限极限.

3. $t^+ = b$ 的条件. 一般情形

(a) 为了转而讨论含有 n 个方程的系统的一般情形，采用矩阵运算符号是比较方便的.

如果我们考虑 $n \times 1$ 矩阵(n 行 1 列矩阵，或者向量)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix},$$

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix},$$

则形如

$$dx_1/dt = f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \cdots, dx_n/dt = f_n(t, x_1, \cdots, x_n)$$

的系统 (1.1.1)，可以表为较紧凑的形式

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1.1.16}$$

因此，这个表达式与 $n = 1$ 的情形的 (1.1.4) 在形式上完全相同，只不过其符号有着不同的含意.

(b) 如果我们用

$$x^T = (x_1, \cdots, x_n)$$

表示 x 的转置矩阵 ($1 \times n$ 矩阵)，并将 (1.1.16) 两端同乘 (行乘列) x^T (相当于用向量 x 与两个向量 $\dot{x}$ 和 f 作数量积)，就得到 $x^T\dot{x} = x^T f(t, x)$.

进一步，如果我们令

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2},$$

(所谓 x 的“欧几里得长度”)，立即得到 $x^T x = \|x\|^2$,

$$x^T\dot{x} = \dot{x}^T x = \frac{1}{2} d\|x\|^2/dt,$$

所以上面所得到的方程可以写成

$$d\|x\|^2/dt = 2x^T f(t, x).$$

这是 (1.1.5) 的推广. 我们有类似于 (1.1.6) 的结论: 假如 $x^T f(t, x) \leqslant 0$, 则对于 (1.1.16) 的所有积分曲线, 均有 $t^+ = b$.

现在注意到, 如果 u 和 v 都是 $n \times 1$ 矩阵, 则有

$$u^T v \leqslant \|u^T v\| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|,$$

根据和§ 1.2(b) 中相同的推证, 可得到如下的定理.

定理 1[1]. 设 $f(t, x)$ 为 $n \times 1$ 矩阵, 其各元素 $f_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ 为 $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 的实的连续函数, $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 在

$$K: \ a < t < b, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

上变化, 假设对所有这样的 t 和 x, 有

$$x^T f(t, x) \leqslant \|x\| \omega(t, \|x\|), \tag{1.1.17}$$

其中 $\omega(t, u)$ 为集合 $a < t < b$, $0 \leqslant u < +\infty$ 上的实连续函数, 使得对于 (a, b) 的每一个 t, $u\omega(t, u)$ 对于变量 u 为非减的. 又如果对于方程

$$du/dt = \omega(t, u) \tag{1.1.7}$$

的所有积分曲线, 正向终极时间 $t^+ = b$, 则对于系统

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1.16}$$

的积分曲线, 也有 $t^+ = b$.

(c) 为了得到和§ 1.2(d)中相类似的结果, 用由

$$|a| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

所定义的模[2] $|a|$ 来代替"长度" $\|a\|$, 更为方便.

---

1) 对 $b = +\infty$ 的情形的这种类型的准则, 可以参看 L. Amerio [1].

2) 对于元素为(实的或复的) a_i 的 $n \times 1$ 矩阵, 我们可以赋予形如 $\left(\sum_1^n |a_i|^p\right)^{1/p}$

如果 $x(t)$ 为可微矩阵，即它的所有的元素都可微，我们易于看到，如果令 $r(t)=|x(t)|$，则在每一点，右导数 $\dot{r}_+(t)$ 和左导数 $\dot{r}_-(t)$ 都存在，而且在那些诸元素 $x_i(t)$ 都不为 0 的点处，它们彼此相等，且有

$$|\dot{r}_\pm(t)| \leqslant |\dot{x}(t)|.$$

因此，如果 $x(t)$ 为系统 (1.1.16) 在 $t_0 \leqslant t < t^+$ 上的解，则有 $\dot{r}_\pm(t) \leqslant |f(t, x)|$. 根据与§ 1.2(c) 相同的推理，除符号的意义不同外，我们得到如下的定理(参看 A. Wintner [1], [2], I. P. Erugin [2], L. Markus [1]):

定理 2. 假如存在在 $[t_0, b)$ 上连续的函数 $\lambda(t) \geqslant 0$，以及 $u>0$ 时连续的函数 $h(u)>0$，对某个 $u_0>0$，有

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{h(u)} = \lim_{v\to+\infty} \int_{u_0}^{v} \frac{du}{h(u)} = +\infty, \qquad (1.1.13)$$

以及

$$|f(t, x)| \leqslant \lambda(t) h(|x|)$$

$$\left(|f| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|,\ |x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right), \qquad (1.1.14)$$

则对于系统 (1.1.16) 的由任一点 (t_0, x^0) 出发的积分曲线，均有 $t^+=b$.

4. 积分曲线的有界性

(a) 在很多事例中，只知道对于给定系统的积分曲线有 $t^+=$

的模 $(p \geqslant 1)$，$\|a\|$ 与 $|a|$ 分别为 $p=2$ 及 $p=1$ 时，这个模的特殊情形. 这样的模称为"p 阶 Hölder 型"的模. 因此，"长度" $\|a\|$ 和"模" $|a|$ 应该更确切地分别称为二阶和一阶 Hölder 模.

在 $\|a\|$ 与 $|a|$ 之间，有明显的关系式 $\|a\| \leqslant |a| \leqslant n^{1/2}\|a\|$, $n^{-1/2}|a| \leqslant \|a\| < |a|$.

其它类型的模，我们也要用到. 例如在以后我们将会遇到 $|a|$.

对模的一般研究，可参看 A. Ostrowski [1].

b 是不够的，我们还必须更明确地指出这些曲线是否有界[1]，或者换句话说，对应于各个解 $x(t)$，是否存在常数 $d \geqslant 0$，使对于 $t<b$，有 $\|x(t)\| \leqslant d$.

以后，我们将会看到，不论是讨论线性系统的稳定性（第九章，§2），或者是讨论 $n=2$ 情形的周期解的存在性（第七章，§2，§3），都需要考虑解的有界性．目前，让我们回顾一下 T. Yoshizawa 的如下的结果（见 T. Yoshizawa [1]，[2]）：

定理 3. 设 $f(t,x)$ 在 K: $a<t<b$, $\|x\|<+\infty$ 上有定义且连续．为了使得对于系统

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1.1.16}$$

的每条经过点 $P_0=(t_0,x^0)$ 的积分曲线 $x(t)$，都存在数 $\alpha(P_0) \geqslant 0$，使得 $\|x(t)\|<\alpha(P_0)$ 对 $t_0 \leqslant t<b$ 成立，必须且只须存在正定[2]函数 $\Phi(t,x)$，使得：(1) $\Phi(t,x)$ 在 K 上连续；(2) 当 $\|x\| \to +\infty$ 时，$\Phi(t,x)$ 关于 t 一致地趋近于 0；(3) 对于 (1.1.16) 的每一个解 $x(t)$，$\Phi(t,x(t))$ 是 t 的非减函数．

(b) 如果在定理 2 的其它假设之外，再加下述假设：

$$\int_{t_0}^{b}\lambda(\tau)d\tau=\lim_{t\to b-0}\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau<+\infty, \tag{1.1.18}$$

则对于任意 x^0，由 $P_0(t_0,x^0)$ 出发的各条积分曲线都是有界的．

事实上，在 (1.1.15) 中让 t 趋近于 $t^+=b$，即可得出结论：$r(t)=|x(t)|$ 必定保持有界．

(c) 如果在定理 2 中，假设 $h(u)$ 在 $u \geqslant 0$ 时连续，并假定 (1.1.18) 成立，则当 $t \to b$ 时，每一个解 $x(t)$ 都趋向于一点 c；换句话说，对于 (1.1.16) 的每个解 $x(t)$，存在一个 $n \times 1$ 常矩阵 c，使得当 $t \to b$ 时，$|x(t)-c|$ 趋近于 0.

---

1) 例如，对于系统 $(n=1)\dot{x}=-x/2t$ $(-\infty=a<t<b=0)$，仅有一条积分曲线 $x=0$ 为有界，其它的积分曲线为 $x=x_0|t_0/t|^{1/2}$，当 $t\to 0^-$ 而 $x_0>0$ 时，$x\to+\infty$，当 $t\to 0^-$ 而 $x_0<0$ 时，$x\to-\infty$。因此，对于所有这些积分曲线均有 $t^+=0=b$。

2) “正定”二字是译者加的．

事实上,我们已经看到,对于给定的 $x(t)$,存在数 $d \geqslant 0$,使得当 $t_0 \leqslant t < b$ 时,有 $|x(t)| \leqslant d$. 因此,存在数 $h \geqslant 0$,使得 $h(|x(t)|) \leqslant h$. 而且,由于对 $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' < b$[1],有

$$x(t') - x(t'') = \int_{t'}^{t''} f(\tau, x(\tau))d\tau,$$

故由 (1.1.14) 可以推得

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant h \int_{t'}^{t''} \lambda(\tau)d\tau.$$

由这个不等式及 (1.1.18) 就可以证实所作的论断.(参看 A. Wintner [3] 及 K. Hayashi (林一道)[1].)

5. Carathéodory 意义下的积分曲线

(a) 人所熟知,根据 Carathéodory 的作法,可以把系统

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1.16}$$

在给定区间上的解的概念加以推广.

如果 $x = x(t)$ 为 (1.1.16) 在区间 $[t_0, t_1)$ 上通常意义下的解,满足 $x(t_0) = x^0$,则它也满足积分方程组

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad t_0 \leqslant t < t_1. \tag{1.1.19}$$

另一方面,即使 $f(t, x)$ 不像到目前为止所假设的那样对于点 (t, x) 连续,这个方程组还是可以求解的.

在任何情况下,不论 (1.1.19) 的解定义在哪里,它都将是 t 的绝对连续函数 ($n \times 1$ 矩阵).

按照 Carathéodory 的说法,我们把每一个在 $[t_0, t_1)$ 上满足 (1.1.19) 的 $x(t)$ (绝对连续)称为系统 (1.1.16) 在 $[t_0, t_1)$ 上的**广义解**. 最多除了一个测度为 0 的 t 值的集合外,这种解仍然满足 (1.1.16).

---

1) 如果 $\varphi(t)$ 为 $n \times 1$ 矩阵,其元素为 $\varphi_i(t)$,则符号 $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt$ 表示元素为 $\int_\alpha^\beta \varphi_i(t)dt$ 的 $n \times 1$ 矩阵. 易于验证

$$\left|\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\right| \leqslant \left|\int_\alpha^\beta |\varphi(t)|\,dt\right|.$$

(b) 如果 $f(t, x)$ 定义在 K: $a < t < b$, $|x| < +\infty$ 上，且 (t_0, x^0) 为K中任意一点，又假如：(1) 对 (a, b) 的每个固定的 t 值，$f(t, x)$ 对 x 连续；(2) 对每个固定的 x 值，$f(t, x)$ 在 (a, b) 上可测；(3) 存在至少在 $t_0 \leqslant t < t_1$ 上有定义的 L 可积函数 $M(t)$，使得 $|f(t, x)| \leqslant M(t)$，则可证：在 $[t_0, t_1)$ 上至少存在(1.1.16)的一个广义解，其中 $t_1 \leqslant b$.（参看 Sansone [1]，第二卷，第八章，第 88 页）.

(c) 利用这条局部存在定理（或者任何其它的局部存在定理），我们可以像§ 1.1 那样定义正向终极时间 t^+ [负向终极时间 t^-] 以及在 Carathéodory **意义下的积分曲线**的概念.

§ 2. Lipschitz 系统和 Carathéodory 系统

1. 推广的 Gronwall 引理

在本节将要用到的以下的引理，在后面研究其它问题时，也是很有用的.

推广的 Gronwall 引理[1]. **设在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上给定了三个函数 $\lambda(t)$, $\varphi(t)$, $u(t)$，其中 $\lambda(t)$ 为非负 L 可积的，其余两个为绝对连续，而且满足**

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)u(\tau)d\tau + \varphi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \qquad (1.2.1)$$

则有

$$u(t) \leqslant \varphi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} \lambda(\theta)d\theta\right)\frac{d\varphi}{d\tau}d\tau,$$

$$(t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \qquad (1.2.2)$$

令

---

1) 这个引理首先是在一个特殊情形下，由 T. H. Gronwall [1]证明的. Gronwall 的结果先后由 R. Bellman [1], H. Weyl [1], L. Giuliamo [1] 和 S. Faedo [1] (第 124 页)所推广.

$$\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)u(\tau)d\tau = H(t),$$

则 (1.2.1) 可以写成

$$u(t) \leqslant H(t) + \varphi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{1.2.3}$$

用 $\lambda(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right)$ 乘上式的两端，并注意到 $\lambda(t)u(t) = dH/dt$ 在 $[t_0, t_1]$ 上几乎处处成立，于是在 $[t_0, t_1]$ 上几乎处处有

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right)H(t)\right] \leqslant \lambda(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right)\varphi(t).$$

由 t_0 到 t 积分，因为 $H(t_0) = 0$，得到

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right)H(t) &\leqslant \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} \lambda(\theta)d\theta\right)\varphi(\tau)d\tau \\ &= -\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(\theta)d\theta\right)\varphi(t) + \varphi(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} \lambda(\theta)d\theta\right)\frac{d\varphi}{d\tau}d\tau,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}H(t) + \varphi(t) &\leqslant \varphi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} \lambda(\theta)d\theta\right)\frac{d\varphi}{d\tau}d\tau,\end{aligned}$$

再由 (1.2.3)，就推出 (1.2.2).

2. Lipschitz 系统．对于两个积分曲线弧的 $|x(t) - y(t)|$ 的估值

(a) 给定系统

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.2.4}$$

(x 为 $n \times 1$ 矩阵)，其中 $f(t, x)$ 在 K:

$$a < t < b \ (-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty), \ |x| < +\infty$$

上有定义且连续，假设矩阵 $f(t, x)$ 对于 x 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L > 0$，使得对于每个 $t \in (a, b)$ 及每一对 x' 及 x''，都有

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant L|x' - x''|, \tag{1.2.5}$$

这时，我们就把 (1.2.4) 简称为 K 中的 Lipschitz 系统.

(b) 现设 $g(t, x)$ 为和 $f(t, x)$ 具有相同的性质的 $n \times 1$ 矩阵. 当然，其常数 L 可能与 f 者不同.

设对于每一个 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$，存在连续函数 $\delta(t)$，使得

$$|f(t, x) - g(t, x)| \leqslant \delta(t) \ (\alpha < t < \beta), \tag{1.2.6}$$

对 x 一致成立.

令 $P_0 = (t_0, x^0)$，$Q_0 = (t_0, y^0)$ 为 K 中横坐标相同的两点，$x(t)$ 为系统 (1.2.4) 的由点 P_0 出发的积分曲线弧，$y(t)$ 为系统 (也是 Lipschitz 系统)

$$\dot{y} = g(t, y) \tag{1.2.7}$$

的由 Q_0 点出发的积分曲线弧. 设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 都定义在某一区间 $[t_0, t_1)$ 上. 对于这两条积分曲线，我们要在这区间上来估计 $|x(t) - y(t)|$.

对于每个 $t \in [t_0, t_1)$，我们立即有

$$x(t) - y(t) = x^0 - y^0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, y) - g(\tau, y)]\, d\tau + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x) - f(\tau, y)] d\tau,$$

由 (1.2.5) 及 (1.2.6)，可以推出

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x^0 - y^0| + \int_{t_0}^{t} \delta(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} L|x(\tau) - y(\tau)| d\tau.$$

应用 Gronwall 引理(推广的)，就得到

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x^0 - y^0| \exp\left(\int_{t_0}^{t} L d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{t} L d\theta\right) \delta(\tau) d\tau. \tag{1.2.8}$$

这就给出了所要求的估计.

当 $f(t, x) = g(t, x)$，即当 $x(t)$，$y(t)$ 为同一系统 (Lipschitz 系统) 的解时，(1.2.8) 就简化成

$$|x(t)-y(t)| \leqslant |x^0-y^0| \exp\left(\int_{t_0}^{t} L d\tau\right). \qquad (1.2.9)$$

另一方面，如果 f 并不恒等于 g，而是 $|x^0-y^0|=0$，则由 (1.2.8) 就得出

$$|x(t)-y(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{t} L d\theta\right)\delta(\tau) d\tau. \qquad (1.2.10)$$

3. 唯一性定理. 对初值点 P_0 及 f 的连续相依性

(a) 如果我们假定 $g(t, x) \equiv f(t, x)$ 且有 $x^0=y^0$，则由 (1.2.9) 就得到 $|x(t)-y(t)|=0$，因此也就得出下面的熟知的唯一性定理.（参看 Sansone [1]，第一卷，第一章，§3.1).

定理 5. （唯一性）. 如果 (1.2.4) 为 Lipschitz 系统，则从任意点 $P_0 \in K$ 出发(或终止于任何点 $P_0 \in K$) 的完整积分曲线弧有且只有一条.（§1.1 (c)).

(b) 现在我们来证明如下的定理:

定理 6. 设

$$\dot{x}=f(t, x) \qquad (1.2.4)$$

为 Lipschitz 系统，$x(t)$ 为其由 $P_0=(t_0, x^0)$ 出发而定义在 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 上的一条积分曲线弧，此处 $T<b$. 则对任意 $\varepsilon>0$，存在常数 $\delta>0$，使得当 $|x^0-y^0| \leqslant \delta$ 时，(1.2.4) 的由 $Q_0=(t_0, y^0)$ 出发的积分曲线弧 $y(t)$ 也在 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 上有定义，且满足 $|x(t)-y(t)| \leqslant \varepsilon (t_0 \leqslant t \leqslant T, T<b)$.

设 Γ 为积分曲线 $x(t)$ 的弧，即点集 Γ: $x=x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. 对任意 $\varepsilon>0$，取包含 Γ 的有界区域 D，使得由 Γ 到 D 的边界 FD 的距离 $\geqslant \varepsilon$[1]. 现在，取

$$\delta=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\exp(-L(T-t_0)), \qquad (1.2.11)$$

以及满足 $|x^0-y^0| \leqslant \delta$ 的 y_0. 由定理 5，从点 $Q_0=(t_0, y^0)$ 出

1) 例如，该区域可取为这样的点 (t, x) 的集合，这些点至少是一个中心在 Γ 上半径为 2ε 的球的内点.

发的(1.2.4)的定义在 $t_0 \leqslant t \leqslant T'$ 上的积分曲线弧存在且唯一，我们把它记为 $x = y(t)$.

进一步，如果 $T' < T$，则由(1.2.9)及(1.2.11)，在 $t_0 \leqslant t \leqslant T'$ 上就有 $|x(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon/2$. 于是，当 $t_0 \leqslant t \leqslant T'$ 时，$x = y(t)$ 保持在 D 之中. 因此，根据§ 1.1 (c)，它对于 $t > T'$ 也有定义. 所以 $T' \geqslant T$.

(c) 我们现在叙述如下的定理，其证明与刚才给出的那个定理类似. 只须用(1.2.10)代替(1.2.9)即可.

定理 7. 设(1.2.4)为 Lipschitz 系统，$x(t)$ 为由 $P_0 = (t_0, x^0)$ 出发且在 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ $(T < b)$ 上有定义的积分曲线弧. 又对于任意 $\varepsilon > 0$，存在在 $[t_0, T]$ 上连续的函数 $\delta(t) \geqslant 0$，使得若 $y = y(t)$ 为系统(与(1.2.4)一样也是 Lipschitz 系统)

$$\dot{y} = g(t, y) \tag{1.2.7}$$

的由 P_0 出发的积分曲线弧，且对于 $t_0 \leqslant t \leqslant T$，不等式

$$|f(t, x) - g(t, x)| \leqslant \delta(t)$$

对 x 一致成立，则 $y(t)$ 就在 $[t_0, T]$ 上存在，且有

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon.$$

4. Carathéodory 系统

(a) 我们把

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.2.4}$$

称为在 K: $a < t < b$, $|x| < +\infty$ 上的 Carathéodory 系统，如果：(1) $f(t, x)$ 对于 (a, b) 中的每个 t，对 x 连续，而对于每个 x，对 t 可测；(2) 在每个区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ 中，存在两个 L 可积函数 $\mu(t)$, $\lambda(t)$，使得

$$|f(t, x)| \leqslant \mu(t), \quad \alpha < t < \beta, \quad |x| < +\infty, \tag{1.2.12}$$

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant \lambda(t)|x' - x''|, \tag{1.2.13}$$

$$\alpha < t < \beta, \quad |x'| < +\infty, \quad |x''| < +\infty.$$

对于这样的系统，我们有如下的定理.

定理 8. 关于 Lipschitz 系统的定理 5，6，7 可以推广到 Carathéodory 系统，只要把定理中的"Lipschitz 系统"字样换成"Carathéodory 系统"，并把其中的积分曲线按照 Carathéodory 的推广的意义来理解就行了(§ 1.5).

只要稍微修改一下§ 2.3 中的证明，就能够得到定理 8 的证明(参看 Sansone [1]，第二卷，第八章§ 8.2).

§ 3. 系统 (1.1.1) 的解 $\varphi(t, t_0, x^0)$

1. 函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$. 唯一性情形

(a) 系统

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.3.1}$$

在给定区间上的解，不仅可以看成 t 的函数而且也是相应积分曲线弧的初始点的坐标 t_0, x^0 的函数.

因此，把这样的解表示为 $x = \varphi(t, t_0, x^0)$ 是很有利的. 其中 φ 为 n-向量，它是 t, t_0, x^0 的函数，其中 t 和 t_0 为实数，而 x^0 为 n-向量.

本节的目的是推导 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 的性质.

(b) 我们已经知道，如果 (1.3.1) 是 Lipschitz 系统或者仅仅是 Carathéodory 系统，则由定理 5 或定理 8 知道 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 是唯一的. 下面的定理给出了一个更为一般的唯一性的准则. (参看 L. Giuliano [2], [3], H. Okamura [1],[2].)

定理 9. 设 $f(t, x)$ 定义在 K: $a < t < b$, $|x| < +\infty$ 上，且对固定的 x，对 t 可测；对固定的 t，对 x 连续，而且在每个区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ 上，存在 L 可积函数 $\mu(t)$，使得

$$|f(t, x)| \leqslant \mu(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{1.3.2}$$

又假设对于每个 $u > 0$，$h(u)$ 为正的连续函数，而且，只要 $u_0 > \varepsilon > 0$，就有

$$\int_{0^+}^{u_0} \frac{du}{h(u)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{h(u)} = +\infty, \tag{1.3.3}$$

最后，假设对每个区间 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$，存在$L$可积函数 $\lambda(t)$，使得

$$(x'-x'')^T[f(t,x')-f(t,x'')] \leqslant \lambda(t)h(\|x'-x''\|^2),$$
$$t \in [\alpha, \beta], \tag{1.3.4}$$

则由K的任何点 $P_0=(t_0, x^0)$ 出发的系统

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1.3.1}$$

的完整积分曲线弧有一且唯一.

由(1.3.2)，从P_0至少可以引出(1.3.1)的一条积分曲线弧. 假设在 $t_0<t\leqslant T$ 上有两条不同的积分曲线弧 $x(t)$ 及 $y(t)$. 把 x 与 y 代入(1.3.1)，可以推出

$$\frac{1}{2}d\|x-y\|^2/dt=(x-y)^T[f(t,x)-f(t,y)].$$

令 $\|x-y\|^2=u$，由(1.3.4)，得到

$$\frac{1}{2}du/h(u) \leqslant \lambda(t)dt.$$

由 $t_0+\varepsilon$ 到 $T>t_0+\varepsilon$ 积分这式，并应用在§1.2(d)用过的积分代换法，就得到

$$\frac{1}{2}\int_{u(t_0+\varepsilon)}^{u(T)}\frac{dv}{h(v)} \leqslant \int_{t_0+\varepsilon}^{T}\lambda(\tau)d\tau.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，上式右端保持有界. 而同时，因为假设 $u(t)>0$，特别是 $u(T)>0$，而且当 $\varepsilon \to 0^+$ 时 $u(t_0+\varepsilon) \to u(t_0)=0$，故由(1.3.3)知上式左端趋于$+\infty$，矛盾.

(c) 特别是，如 $h(u)=u$ 时(1.3.4)成立，则我们可以推出另一个准则(参看 E. J. McShane[1])，从它立即可以推出 Carathéodory 系统的唯一性定理(定理 8). 为此，只须注意到

$$(x'-x'')^T[f(t,x')-f(t,x'')]$$
$$\leqslant |x'-x''|\,|f(t,x')-f(t,x'')|$$

以及

$$\lambda(t)|x'-x''|^2 \leqslant \lambda(t)n\|x'-x''\|^2.$$

(d) 如果 $\lambda(t)=0$ 恒成立，则(1.3.4)就变成

$$(x'-x'')^T[f(t,x')-f(t,x'')]\leqslant 0, \qquad (1.3.4.1)$$

由它可以推出，对于(1.3.1)的每一对由 P_0 出发的解 $x(t)$，$y(t)$，都有

$$\frac{1}{2}d\|x-y\|^2/dt\leqslant 0.$$

(1.3.4.1)式可以解释为 n-向量 $f(t,x)$ 对于 x 是非增的．当 $n=1$ 时，这就是著名的 Peano 准则(参看 G. Sansone [1]，第一卷，第 47 页及其参考文献)．

2. $\varphi(t,t_0,x^0)$ 的连续性

(a) $\varphi(t,t_0,x^0)$ 对 (t,t_0,x^0) 的连续性是唯一性的结果．事实上，我们有如下的定理．(参看 G. Sansone [1]，第一卷，67 页，F. Cafiero [1]，A. D. Myshkis-V. K. Grinfel'd [1]，A. F. Andreyev-Yu. S. Bogdanov [1] 和 A. F. Fillippov [1].)

定理 10. 函数 $\varphi(t,t_0,x^0)$ 对 (t,t_0,x^0) 为连续的，如果它是唯一的；且对固定的 x，$f(t,x)$ 对 t 是可测的；而对于固定的 t，$f(t,x)$ 对 x 是连续的；又对每个 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，存在 L 可积函数 $\mu(t)$，使得 $|f(t,x)|\leqslant\mu(t)$．

这个定理有如下的推论．

推论. 假如系统(1.3.1)是 Lipschitz 系统，或者仅为 Carathéodory 系统，则 $\varphi(t,t_0,x^0)$ 对 (t,t_0,x^0) 为连续的．

(b) 根据这个推论和定理 6，以及定理 8，我们可以断言：假如(1.3.1)为 Lipschitz 系统(或者 Carathéodory 系统)，则 $\varphi(t,t_0,x^0)$ 对于任意区间 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 中的 t 一致地对 x^0 连续，其中 $T<t^+(\leqslant b)$．这个说明将有助于对稳定性概念的理解．

3. 稳定性

(a) 假设 n-向量函数 $f(t,x)$ 在 K：$a<t<+\infty$，$|x|<+\infty$ 中有定义且连续，并能保证过 K 中任意点 $P_0=(t_0,x^0)$，系统

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.3.1}$$

的积分曲线存在且唯一，而 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 处处连续. 例如，如果(1.3.1)为 K 中的 Lipschitz 系统，上述条件都是满足的(§3.2 推论.).

设 $x = \bar{x}(t)$ 为 (1.3.1) 的积分曲线，其正向终极时间 $t^+ = +\infty$ 而负向终极时间 $t^- \geqslant a$.

假设存在点 $P_0(t_0, x^0)$ $(t_0 \geqslant t^-, x^0 \neq \bar{x}(t_0))$，由它出发的积分曲线 $x = x(t)$ 有 $t^+ = +\infty$. 由§ 3.2(b) 最后的说明可知，对任意 $T > 0$ 及 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_T = \delta_T(t_0, \varepsilon) > 0$，使得当 $|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| \leqslant \delta_T$ 时，在每个区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ 上有

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant \varepsilon.$$

如果固定 t_0 及 ε 而让 T 变化 $(T \geqslant 0)$，则相应的 δ_T 的最大下界 $\delta \geqslant 0$. 可能会有 $\delta = 0$，如我们在§ 1.1(d) 所举的方程$(n=1)$，对任意 t_0，关于解 $x = \bar{x}(t) = 0$，就是这种情形. 若不是这样，如果 $\delta > 0$，则根据 Lyapunov (参看 A. M. Lyapunov [1]) 的定义，我们就说当 $t \to +\infty$ 时，解 $x = \bar{x}(t)$ 是稳定的，或说成是正向稳定的. 因此，有下面的定义.

定义 1. 系统 (1.3.1) 的解 $\bar{x}(t)$ 称为当 $t \to +\infty$ 时是稳定的，如果对任给的两个数 t_0 及 ε $(t_0 > t^-, \varepsilon > 0)$，存在 $\delta > 0$，使得对于 (1.3.1) 的所有满足

$$|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| \leqslant \delta \tag{1.3.5}$$

的 $x(t)$，均有

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad t_0 \leqslant t < +\infty. \tag{1.3.6}$$

当 $\bar{x}(t)$ 不是稳定的时候，我们就说它是不稳定的.

换句话说，如果我们把 (1.3.1) 的解记作 $\varphi(t, t_0, x^0)$，我们将称 $\bar{x}(t)$ 是稳定的 (对 $t \to +\infty$)，如果当 $|x^0 - \bar{x}(t_0)| \to 0$ 时，$|\varphi(t, t_0, x^0) - \varphi(t, t_0, \bar{x}(t_0))|$ 对于满足 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 的一切 t 一致趋于零.

(1.3.5) 中的数 δ 一般不仅依赖于 ε，而且还依赖于 t_0. 从 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 对 (t, t_0, x^0) 的连续性的假设，立即可以推出，如果对

于某一特殊的 $t_0 > t^-$，解的稳定性条件成立，则对于任意 $t_0 > t^-$，解的稳定性条件也将成立．然而，一般说来，数 δ 将因 t_0 的不同而不同．所以，可以看出 δ 是 ε 和 t_0 的函数 $\delta(\varepsilon, t_0)$．（如果不假设 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 对 x^0 连续，则有较此处所考虑的稳定性更为一般的其它形式的稳定性．参看 Yoshizawa [3]）．

(b) 如果在稳定性的定义中，我们指明所存在的 $\delta > 0$ 与 t_0 无关，则就说 $\bar{x}(t)$ 对于 t_0 是一致稳定的，或者简称为 $\bar{x}(t)$ 是一致稳定的．因此有如下的定义．

定义 2. 系统 (1.3.1) 的解 $\bar{x}(t)$ 称为是一致稳定的，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对任意 $t_0 > t^-$（此处 t^- 为所考虑的解 $\bar{x}(t)$ 的负向终极时间），只要 $|\bar{x}(t_0) - x(t_0)| \leqslant \delta$ 成立，$|\bar{x}(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon$ 也就对 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 成立。

(c) 在提出稳定解的概念的同时，Lyapunov 还提出了渐近稳定解的定义（参看 Lyapunov [1]，第 253 页）．

定义 3. 系统 (1.3.1) 的解 $\bar{x}(t)$ 称为当 $t \to +\infty$ 时是渐近稳定的，如果：(1) 它是稳定的（定义 1）；(2) 对每个 $t_0 > t^-$（$\bar{x}(t)$ 的负向终极时间）以及每个满足 $|x^0 - \bar{x}(t_0)| \leqslant \gamma$（对某个 $\gamma = \gamma(t_0) > 0$）的 x^0，总有

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, t_0, x^0) - \varphi(t, t_0, \bar{x}(t_0))| = 0. \tag{1.3.7}$$

(d) (1.3.1) 的解可以同时是一致稳定的和渐近稳定的．对于这些特殊类型的解，我们有如下的定义．

定义 4. (1.3.1) 的解 $\bar{x}(t)$ 称为是一致渐近稳定的，假如：(1) 它是一致稳定的（定义 2）；(2) 存在固定的 $\delta_0 > 0$，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $T(\varepsilon) > 0$，使得对于满足 $|x^0 - \bar{x}(t_0)| \leqslant \delta_0$ 及 $t_0 > t^-$（t^- 为 $\bar{x}(t)$ 的负向终极时间）的每一个初值点 (t_0, x^0)，当 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时，均有

$$|\varphi(t, t_0, x^0) - \varphi(t, t_0, \bar{x}(t_0))| \leqslant \varepsilon.$$

换句话说，当 $t \to +\infty$ 时，对于满足 $t_0 > t^-$ 及 $|x_0 - \bar{x}(t_0)| \leqslant \delta_0$ 的 (t_0, x^0)，$|\varphi(t, t_0, x^0) - \varphi(t, t_0, \bar{x}(t_0))|$ 必须一致

地趋近于零.

一致渐近稳定解的概念是由 I. E. Malkin [1] 引入的，而这个术语则是 J. E. Massera 提出来的(参看 Massera [1]).

(e) 在上述所有稳定性的定义中，初值 x^0 都必须取得充分靠近所考虑的解 $x(t)$ 的初值 $\bar{x}(t_0)$. 但在实际应用中，x^0 可能与 $\bar{x}(t_0)$ 相差任意大. 因此，我们有如下的定义(参看 E. A. Barbashin-N. N. Krasovskii [1]).

定义 5. 假设 $a=-\infty$，亦即 $f(t, x)$ 的定义域K为整个 (t, x) 空间. (1.3.1) 的解 $\bar{x}(t)$ 称为是全局渐近稳定的，假如：(1) 它是稳定的；(2) 对任意 (t_0, x^0)，(1.3.7) 成立.

(f) (1.3.1) 的解的上述各种类型的稳定性都是与初始点(t_0, x^0)有关. 从应用数学的观点来看，这相当于考虑关于原始数据的摄动或误差的稳定性. 然而，在一个物理系统中，可能还有经常性的摄动，它们在由系统

$$\dot{x}=f(t, x) \tag{1.3.1}$$

所描述的现象的整个过程中，都起着作用.

极其经常的是，不仅仅是 x^0 是近似地表示初始的物理状态，而且事实上整个系统 (1.3.1) 也是近似的. 也就是说，连 f 本身也只不过是近似地描述了实际现象. 这说明有必要提出下面的定义.

定义 6. 系统 (1.3.1) 的解 $\bar{x}(t)$ 称为是整体稳定的，如果对任意 $t_0>t^-$($\bar{x}(t)$ 的负向终极时间)及 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(t_0, \varepsilon)>0$，使得对于满足不等式$|f(t, x)-g(t, x)|<\delta$ 和 $|x^0-\bar{x}(t_0)|<\delta$ 的任意 $g(t, x)$ 和 x^0，系统

$$\dot{y}=g(t, x) \tag{1.3.8}$$

的解 $\psi(t, t_0, x^0)$ 对 $t_0\leqslant t<+\infty$ 都满足不等式

$$|\psi(t, t_0, x^0)-\varphi(t, t_0, \bar{x}(t_0))|<\varepsilon.$$

(假设 $g(t, x)$ 连续，且具有与 $f(t, x)$ 相同的性质，即保证解的唯一性及对初始条件的连续相依性.)

整体稳定的概念是 J. G. Malkin 提出来的(参看 J. G. Malkin [2] 及 N. A. Artem'ev [1]),而这一术语则是 J. L. Massera 所引用的(参看 J. L. Massera [1]).

指出下面一点是有意义的,即整体稳定的概念是从定理 7 得到启发的,正如解的稳定的概念(定义 1)是从定理 6 得到启发的一样.

(g) 上述六个定义所提出的基本概念,都可以推广到 Carathéodory 系统或者满足定理 10 的更为一般的系统上去.

(h) 当(1.3.1)的右端 $f(t, x)$ 不明显地依赖于 t 时,系统称为是自治的. 对于这样的系统,我们远可以考虑其它类型的稳定性,例如 Poisson 稳定性(第四章,§1)和轨道稳定性(第九章,§3).

4. 线性系统的函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$

(a) 线性系统

$dx_i/dt = a_{i1}(t)x_1 + \cdots + a_{in}(t)x_n + a_i(t)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,
其中 $a_{ij}(t)$ 及 $a_i(t)$ 为定义在 (a, b) 上的实函数,可以写成下面的向量形式

$$\dot{x} = A(t)x + a(t), \tag{1.3.9}$$

此处 x 与 $\dot{x}$ 为通常的意义,$a(t)$ 为以 $a_i(t)$ 为元素的 $n \times 1$ 矩阵,$A(t)$ 为以 $a_{ij}(t)$ 为元素的 $n \times n$ 矩阵.

如所熟知,应用定理 1 或者定理 2 可以证明:(1.3.9)的每一条积分曲线的终极时间为 $t^+ = b$, $t^- = a$(参看 Sansone [1],第一卷,第一章§3, §4). 这个事实当 $A(t)$, $a(t)$ 为 (a, b) 上的连续函数时成立;当 $A(t)$, $a(t)$ 在 (a, b) 的每一个子区间上 L 可积时,对于 Carathéodory 解的更为一般的情形,同样也成立.

(b) 本段的主要目的是求(1.3.9)的函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 的显式表达式.

考虑(1.3.9)的对应的齐次系统

$$\dot{y} = A(t)y. \tag{1.3.9.1}$$

若 $n \times n$ 矩阵 $Y(t)$ 的各列为(1.3.9.1)的一个解,则 $Y(t)$ 满足

下面的矩阵方程

$$\dot{Y}=A(t)Y, \tag{1.3.9.2}$$

反过来，如果 $Y(t)$ 为 (1.3.9.2) 的一个解，则它的每一列也是 (1.3.9.1) 的解.

在这种情形，易于看到（G. Sansone [1]，第一卷，第二章，§ 1.2）$\det Y$ 满足方程

$$d(\det Y)/dt=(\operatorname{tr}A(t))\det Y,$$

其中

$$\operatorname{tr}A(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)$$

为 $A(t)$ 的迹.

由此可以得到著名的 Jacobi-Liouville 公式（参看 G. Sansone [1]，第二章，§ 1.2）:

$$\det Y(t)=\det Y(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(\tau)d\tau\right).$$

由此可知：(1.3.9.2) 的解 $Y(t)$ 或者对所有的 t 值都为退化阵，或者只要 $\det Y(t_0)\neq 0$，它就恒不为退化阵.

在后一种情形，$Y(t)$ 的 n 列是线性无关的，从而它们给出了构成 (1.3.9.1) 的基础解系的 n 个解. 这时称 $Y(t)$ 为系统 (1.3.9.1) 的一个基本解矩阵（简记为 f. m）. 假如 $Y(t)$ 为一个 f. m.，而 C 为一非奇异的 $n\times n$ 常数矩阵，则 $Y(t)C$ 也是一个 f. m.，适当选取 C，使 $Y(t_0)C$ 是单位矩阵 I. 我们把满足 $U(t_0)=I$ 的 f. m. $U(t)$称为**标准基本解矩阵**.

(c) 设 $y(t)$ 为 (1.3.9.1) 的任意一个解，$Y(t)$ 为一 f. m.，我们用方程 $y(t)=Y(t)c$ 定义一个 $n\times 1$ 矩阵 c. 将这式求导数，并注意到 (1.3.9.2)，就得到 $Y(t)\dot{c}=0$. 但是 $\det Y\neq 0$，因此必须 $\dot{c}=0$，从而 c 为常数阵. 于是，对于 t 的每一对 t 及 t_0，我们有：$y(t)=Y(t)c$ 及 $y(t_0)=Y(t_0)c$. 如果用 Y^{-1} 表示 Y 的逆阵，则有 $Y^{-1}(t)y(t)=Y^{-1}(t_0)y(t_0)$，从而

$$y(t)=Y(t)Y^{-1}(t_0)y^0,\quad (y^0=y(t_0)). \tag{1.3.10}$$

这个公式给出了齐次系统(1.3.9.1)的函数 $\varphi(t, t_0, y^0)$ 的显式表达式.

(d) 设 $Y(t)$ 为一 f.m., $Z(t) = Y^{-1}(t)$. 对恒等式 $ZY=I$ 求导数,并注意到 (1.3.9.2) 以及 $\det Y \neq 0$ 这个事实,我们就得到 $\dot{Z} = -ZA(t)$. 于是,如果把 (1.3.9) 两端同左乘以 $Z(t)$ 并积分,就得到

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau. \quad (1.3.11)$$

这个式子给出了非齐次系统(1.3.9)的函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 的显式表达式.

我们注意到函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$关于 x^0 是线性的,又由(1.3.10),就能把 (1.3.11) 改写成

$$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau, \qquad (1.3.11.1)$$

其中 $y(t)$ 为(1.3.9.1)的解,它在 $t = t_0$ 时和 $x(t)$ 取相同的值 x^0. 公式(1.3.11.1)称为 Lagrange 公式(参看 G. Sansone [1],第二章,§ 1.5).

5. $\varphi(t, t_0, x^0)$ 的可微性

(a) 考虑(1.3.1)的一般情形. 函数 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 总有对 t 的导数(参看§ 1(a)),且如果 $f(t, x)$ 为连续函数,则处处都有

$$\partial\varphi/\partial t = dx/dt = f(t, \varphi).$$

但是,φ 对 t_0 和 x^0 并不总有导数. 现在假设这些导数存在,且设 $\psi = \psi(t, t_0, x^0)$ 是元素为 $\partial\varphi_1/\partial t_0, \cdots, \partial\varphi_n/\partial t_0$ 的 n-向量,$\Phi(t, t_0, x^0)$ 是元素为 $\partial\varphi_i/\partial x_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 的 $n \times n$ 矩阵. 显然有 $\Phi(t_0, t_0, x^0) = I$.

如果 $\partial f_i/\partial x_j$ 对 $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 都存在,则元素为 $\partial f_i/\partial x_j$ 的矩阵 $\partial(f_1, \cdots, f_n)/\partial(x_1, \cdots, x_n)$ 将表示为 $\partial f/\partial x$.

如果 $\partial f/\partial x$ 在 $K: a < t < b$, $|x| < +\infty$ 中连续,则(参看 G. Sansone [1],第一章,§5.7) 对于 $t \in (a, b)$, $t_0 \in (a, b)$, $|x^0| < +\infty$, ψ 与 Φ 存在且连续,并且满足如下的方程组

$$\dot{\psi} = \frac{\partial f}{\partial x}\psi, \quad \dot{\Phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\Phi.$$

上面的第一个方程相当于有 n 个方程的线性系统，而第二个矩阵方程相当于 n 个系统，每个系统含有 n 个方程.

(b) 如果我们记

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \partial f_i / \partial x_i = \operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial x},$$

则由于 $\det \Phi(t, t_0, x^0) = I$，就可以从 § 3.4 得到

$$\det \Phi(t, t_0, x^0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{div} f d\tau\right). \quad (1.3.12)$$

表达式 (1.3.12) 是由 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 所给出的变换的 Jacobi 行列式，这个变换把超平面 $t = t_0$ 上的点 x^0 映射成超平面 $t = t$ 上的点 $\varphi(t, t_0, x^0)$.

6. 含参数的系统

我们经常要讨论如下类型的系统

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad (1.3.13)$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 为参数.

如果 (1.3.13) 的由给定点 (t_0, x^0) 出发的解满足存在唯一性条件，则此解也依赖于参数 λ_i，即 $x = \varphi(t, t_0, x^0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$. 而且，如果 f_i 对于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 的导数存在，则可以证明 $\varphi(t, t_0, x^0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 对 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 的导数也存在（参看 G. Sansone [1]，第一章，§ 5.4)，而且，这些导数还满足某个线性系统.

很清楚，只要把空间的维数由 $n+1$ 增加成 $n+k+1$，(1.3.13) 就可以化成以前曾经考虑过的系统来研究. 为此，设

$$x_i = y_i (i = 1, \cdots, n)$$

及

$$\lambda_j = y_{j+n} (j = 1, \cdots, k),$$

则 (1.3.13) 就可以写成如下的系统

$$\dot{y}_i = g_i(t, y_1, \cdots, y_{n+k}) (i = 1, \cdots, n+k), \quad (1.3.14)$$

其中前 n 个函数 g_i 就是 f_i，而其余的 k 个函数全都恒等于零．系统(1.3.14)是在空间 S_{n+k+1}（其中点为 $(t, y_1, \cdots, y_{n+k})$）中的形如(1.3.1)的系统．

对系统(1.3.13)的函数 $\varphi(t, t_0, x^0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 的研究可以化成对系统(1.3.14)的函数 $\varphi(t, t_0, y^0)$ 的研究．

§4. 周 期 解

1. 周期积分曲线．周期轨道

(a) 在系统

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.4.1}$$

的经历无限长时间（即 $t^- = -\infty$, $t^+ = +\infty$）的积分曲线中，周期积分曲线特别重要．

(1.4.1)的积分曲线 $x = \varphi(t)$ 称为是周期的，如果存在常数 $\tau > 0$，使得

$$\varphi(t + \tau) = \varphi(t), \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{1.4.2}$$

常数 τ 称为 $\varphi(t)$ 的一个周期．这时，我们也说这条曲线具有周期 τ．我们不排除 $\varphi(t)$ 为常数的情形．很明显，如果 τ 是一个周期，则数 $k\tau (k = 2, 3, \cdots)$ 也都是周期．

设 τ_1 与 τ_2 为两个周期，则我们可以根据它们之比是有理数还是无理数而分为两种情形．第一种情形，设 $\tau_1/\tau_2 = p/q$（p 与 q 为互质的正整数），如果我们令 $\tau = \tau_1/p = \tau_2/q$，则 $pq\tau$ 也就是周期．

第二种情形．根据 Dirichlet 的一个定理(参看 I. F. Koksma [1])，当 m 与 n 为整数时，点 $m\tau_1 + n\tau_2$ 的集合在实数轴上是处处稠密的．而且，因为由(1.4.2)有 $\varphi(m\tau_1 + n\tau_2) = \varphi(0)$，故 $\varphi(t)$ 在一个处处稠密的集合上取相同的值 $\varphi(0)$．现在，再由 $\varphi(t)$ 的连续性，就可肯定 φ 为常数．在这种情形，积分曲线变成平行于 t 轴的直线．

因此，如果一条积分曲线是周期的，但不为常数，则它的两个

周期之比必为一有理数．我们也知道，在周期中存在一个正的最小值，称为最小周期或者原始周期，或者就简称为 $\varphi(t)$ 的周期．

(b) 我们将在§5中看到，有时需要考虑积分曲线在超平面 $t=0$ 或者在任何与它平行的超平面上的正投影．如果积分曲线是一个周期曲线，则称它的投影是一条(周期)轨道．当积分曲线为常数时，则它的轨道退化成一个点．

2. 例外周期解

(a) 假设 $f(t, x)$ 对 t 是最小周期为 $\omega>0$ 的周期函数，则

$$f(t+\omega, x)=f(t, x), \quad -\infty<t<+\infty. \tag{1.4.3}$$

如果 $x(t)$ 为 (1.4.1) 的周期为 τ 的周期解，而 τ/ω 为无理数，则称它是例外周期解，或例外解．特别是，所有的常数解都是例外解．现在，我们将根据 J. L. Massera [2] 和 J. Kurzweil-O. Vejvoda [1] 所得到的结果，来分析例外解的某些性质．

(b) **定理 11.** 如果 $x=\varphi(t)$ 为一例外解，则其轨道完全包含在点 x^0 的集合 X_0 之中，这些点 x^0 对于任意 t 都有

$$f(t, x^0)=f(0, x^0).$$

对任意的 t_0，令 $x^0=\varphi(t_0)$．因为对任意一对整数 m 和 p，有

$$\begin{aligned} f(t_0+m\omega+p\tau, x^0) &= f(t_0+p\tau, x^0) \\ &= f(t_0+p\tau, \varphi(t_0+p\tau)) = d\varphi/dt|_{t=t_0+p\tau} \\ &= d\varphi/dt|_{t=t_0} = f(t_0, x^0), \end{aligned}$$

所以有 $f(t_0+m\omega+p\tau, x^0)=f(t_0, x^0)$．

由于点 $m\omega+p\tau$ 的集合在 t 轴上处处稠密，又因 $f(t, x^0)$ 连续，故 $f(t, x^0)$ 为常数．从而 $x^0\in X_0$．但是，既然 t_0 是任意的，就有 $\varphi(t)\in X_0$．这个定理有一个直接的推论．

推论． 如果 $f(t, x)=g(x)+h(t)$，且 $h(t)$ 不为常数，则系统 (1.4.1) 没有例外解．

(c) 根据和 (b) 中相同的理由，可推得：如果 $x=\varphi(t)$ 为 (1.4.1) 的例外解，而 t_0, t_1 为 t 的任意二值，则

$$f(t_1, \varphi(t_0)) = f(t_0, \varphi(t_0)),$$

且由于 t_0 和 t_1 是任意的，就有

$$f(t, \varphi(t)) = f(t_1, \varphi(t)). \tag{1.4.4}$$

对于任意 α，我们也有

$$f(t, \varphi(t+\alpha)) = f(t+\alpha, \varphi(t+\alpha)), \tag{1.4.5}$$

又因为 $f(t, \varphi(t)) = d\varphi/dt$，于是有下面的定理.

定理 12. (1.4.1)的每一个例外解 $\varphi(t)$ 也必为每个自治系统 $\dot{x} = f(\lambda, x)$ 的解，其中 λ 为任意常数.（为了求得所有不同的 $f(\lambda, x)$，只要让 λ 在一个长度为 ω 的区间上变化就行了.）

定理 13. 如果 $\varphi(t)$ 为系统 (1.4.1) 的例外解，则对任意常数 α，$\varphi(t+\alpha)$ 也是同一系统的例外解(如果 $\varphi(t)$ 不为常数，为了求得不同的解，只要让 α 在长度为 τ 的区间上变化就可以了).

由定理 12，再利用我们将在§ 5 中介绍的环和奇点的概念，我们就得到如下的定理.

定理 14. 系统 (1.4.1) 的例外解的轨道或者是一个环，或者是一个奇点.

推论. 如果 $n = 1$，则 (1.4.1) 的例外解只能是常数解.

(d) 我们立即可以看到，当 $n > 1$ 时，可以存在非常数的例外解. 例如，当 $n = 2$ 时，我们有如下的系统

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -x_1 + (x_1^2 + x_2^2 - 1)h(t),$$

其中 $h(t)$ 是(最小)周期为 $\omega > 0$ 的周期函数. 这个系统有周期为 2π 的解

$$x_1 = \varphi_1(t) = \sin(t+\alpha),\quad x_2 = \varphi_2(t) = \cos(t+\alpha).$$

如果 $\omega/2\pi$ 不为有理数，这个解就是一个非常数的例外解.

(e) **定理 15.** 如果 $n = 2$，且 $f(t, x)$ 为 x 的线性函数，于是系统 (1.4.1) 形如

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + p_1(t), \\ \dot{x}_2 &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + p_2(t), \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

其中 $p_{ij}(t)$，$p_i(t)$ 是周期为 $\omega > 0$ 的周期函数(至少有一个函数具有最小周期 ω)，则其例外解只可能是常数解.

事实上，假如 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ 是(1.4.6)的例外解，则由(1.4.4)可知，对于任意的 t_1 及 t_2，有 $f(t_1,\varphi(t))=f(t_2,\varphi(t))$。因而在这种情形就得到

$$\left.\begin{aligned}&[p_{11}(t_1)-p_{11}(t_2)]\varphi_1(t)+[p_{12}(t_1)-p_{12}(t_2)]\varphi_2(t)\\&\qquad+p_1(t_1)-p_1(t_2)=0,\\&[p_{21}(t_1)-p_{21}(t_2)]\varphi_1(t)+[p_{22}(t_1)-p_{22}(t_2)]\varphi_2(t)\\&\qquad+p_2(t_1)-p_2(t_2)=0.\end{aligned}\right\}\quad(1.4.7)$$

如果 $p_{ij}(t)$ 全为常数，则从这些关系可以推出 $p_i(t)$ 也将是常数，这与假设矛盾．因此，肯定存在 t 的一对值 t_1，t_2，使得在(1.4.7)中的 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 的四个系数中，至少有一个必须异于零．例如，设 $p_{11}(t_1)-p_{11}(t_2)\neq 0$，则由(1.4.7)的第一个方程可知，积分曲线 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ 位于平行于 t 轴的平面上，而且因为它在 (x_1,x_2) 平面上的投影是闭的，故必退化成一个点．

(f) 如果 $f(t,x)$ 是 x 的线性函数，而 $n\geqslant 3$，则我们也可能有不为常数的例外解．例如，系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-\lambda x_2+Xh_1(t),\\\dot{x}_2&=\lambda x_1+Xh_2(t),\\\dot{x}_3&=\lambda x_1-\lambda x_2+Xh_3(t),\end{aligned}$$

其中 $X=x_1+x_2-x_3$，对任意的 $h_i(t)$，这系统有解

$$x_1=a\cos(\lambda t+b),\quad x_2=a\sin(\lambda t+b),\quad x_3=x_1+x_2,$$

其中 a 与 b 为任意常数．这个解有周期 $2\pi/\lambda$，而 $h_i(t)$ 则可以设为具有任意周期的周期函数．

(g) 对于 $n=2$ 的情形，我们有如下的定理，对它我们只加叙述而不予以证明(参看 J. L. Massera [2]，第 48 页.)

定理 16. 设 $n=2$，$f(t,x)$ 为 t 与 x 的全纯函数，且设系统 $\dot{x}=f(t,x)$ 存在例外解，则这系统必具有如下的形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=A(x_1,x_2)B(t,x_1,x_2)+C(x_1,x_2),\\\dot{x}_2&=A(x_1,x_2)D(t,x_1,x_2)+E(x_1,x_2),\end{aligned}$$

其中 A，B，C，D，E 为全纯函数，而方程 $A(x_1,x_2)=0$ 确定一

个简单闭曲线，在其上有

$$C\partial A/\partial x_1 + E\partial A/\partial x_2 = 0,\ C^2 + E^2 \neq 0,$$
$$(\partial A/\partial x_1)^2 + (\partial A/\partial x_2)^2 \neq 0.$$

§5. 自 治 系 统

1. 自治系统及其积分曲线的性质

(a) 形如

$$\dot{x} = X(x) \tag{1.5.1}$$

的系统是一类很重要的系统．这样的系统由于它们的右端与时间 t 无关而称为自治系统．

$X(x)$为 x 的 $n\times 1$ 矩阵函数，它对于变量 x 在点$(x_1,\cdots,x_n)$的欧几里得空间 S_n 的区域D内有定义． 如果我们不做相反的说明，就假设D为整个 S_n 空间，而 $X(x)$ 在其中是连续的．

(b) 自治系统的积分曲线具有下面的重要性质．设 $P_1=(t_1,\bar{x})$ 及 $P_2=(t_2,\bar{x})$为给定两点，如果我们沿 t 轴做平移 $t=\tau-(t_2-t_1)$，则 (1.5.1) 的每条由 P_1 出发的积分曲线平移成为(1.5.1)的由 P_2 出发的积分曲线．所以，如果 $x=\varphi(t)$ 为(1.5.1)的在给定区间 $[t_0,t_1)$ 上的解，则函数 $\varphi(t+c)$ 也是 (1.5.1) 在 $[t_0+c,t_1+c)$ 上的一个解，其中 c 为任意常数．

这可由 $dt=d\tau$ 和X与 t 无关这个事实推出．

(c) 假如唯一性条件得到满足，为了使 (1.5.1) 的一条积分曲线是周期的，只须存在 t 的两个不同的值 t_1 与 t_2，使得

$$x(t_2) = x(t_1). \tag{1.5.2}$$

事实上，平移 $t=\tau-(t_2-t_1)$ 把从点 $(t_1,x(t_1))$ 出发的积分曲线Γ变到从点 $(t_2,x(t_2))$ 出发的积分曲线．因此，由唯一性假设，Γ应变到它自己．于是，对任意 t 都有 $x(t+t_2-t_1)=x(t)$，从而 t_2-t_1 是一个周期．

(d) 对于自治系统，常数积分曲线 $x(t)=c$(c 为常数) 存在的充要条件为 $X(c)=O$，其中O为 $n\times 1$ 零矩阵．

2. 轨线. 相空间

(a) 假设 (1.5.1) 中的 $X(x)$ 保证经过 S_n 的任意点 P_0 的积分曲线唯一.

于是,对点 (t, x) 的空间 S_{n+1} 的任一点,都有(1.5.1)的一且唯一的积分曲线经过,从而(1.5.1)的积分曲线充满了 S_{n+1},且对于 S_{n+1} 的点,积分曲线能且只能经过它一次. 如果把任意一条积分曲线 Γ:

$$x = x(t), \quad t^- < t < t^+ \tag{1.5.3}$$

垂直投影到方程为 $t = 0$ 的超平面 S_n 上去,则由 §1 可知,当且仅当 Γ 为周期解时,特别是常数解时,Γ 上的不同两点才有可能有相同的象.

积分曲线的这种投影称为系统 (1.5.1) 的轨线. 方程 (1.5.3) 称为轨线关于参数 t 的参数表达式. 这种轨线上的正向对应于 t 增加的方向.

如果作平移 $t = \tau + a$,其中 a 为给定的常数,则积分曲线 Γ 就变成积分曲线 Γ_a. 对应于 Γ_a 的轨线应与 Γ 的象重合. 因此,$x = \bar{x}(\tau) = x(\tau + a)\,(t^- - a < \tau < t^+ - a)$ 给出了同一条轨线的另一个参数表达式. 于是,每条轨线是 (1.5.1) 的无穷多条积分曲线的象,这些积分曲线沿 t 轴平移能够互相重合.

(b) 通过超平面 $t = 0$ 上的各点,仅有一条轨线;它是某条积分曲线的投影,同时,也是那些沿 t 轴平移能与这条积分曲线相重合的积分曲线的投影.

显然,(1.5.1) 的积分曲线在超平面 $t = \bar{t}\,(\bar{t} \neq 0)$ 上的所有的正投影的几何图形,和在超平面 $t = 0$ 上的正投影是完全相同的.

超平面 $t = 0$ 或者任何超平面 $t = c$ (c 为常数) 称为系统 (1.5.1) 的相空间,相空间是自治系统的积分曲线的实际空间的一面镜子. 因此自治系统的积分曲线的结构以及解的性态都可以从相空间中轨线的形状推想出来. 这经常从直观上给我们有益的启发,$n = 2$ 的情况尤其如此.

(c) 从现在起，我们把超平面 $t=0$ 上通过点 P 的轨线记为 $\gamma_P(t)$，并且在它的无数多个参数表达式 $x=x(t)\ (t^-<t<t^+)$ 中,选取使得点 P 的坐标为 $x_1(0),\cdots,x_n(0)$ 的那一个,简言之, $\gamma_P(t)$ 表示时间 $t=0$ 时通过 P 的轨线.

如果 Q 为 $\gamma_P(t)$ 上对应于 $t=\bar{t}$ 的点,则我们将记作 $\gamma_P(\bar{t})=Q$. 于是,根据定义就有 $\gamma_P(0)=P$.

为了方便起见,对于 $\gamma_P(t)$ 上从点 P 起分别对应于 t 增加方向和 t 减少方向的两部分,引人记号 $\gamma_P^+(t)$ 和 $\gamma_P^-(t)$. 我们称 $\gamma_P^+(t)$ 为当 $t=0$ 时通过点 P 的正半轨，$\gamma_P^-(t)$ 为 $t=0$ 时通过 P 点的负半轨.

(d) 假如 $P_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 不是方程 $X(x)=0$ (即方程组 $X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ i=1,\cdots,n$)的解,则 X_i 中至少有一个在 P_0 不为 0. 设 $X_1\neq 0$, 即 $X_1(x_1^0,\cdots,x_n^0)\neq 0$. 则在 P_0 的某个邻域中有 $X_1(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$, 于是，我们就可以把系统 (1.5.1) 换成系统

$$dx_i/dx_1=X_i/X_1,\ (i=1,\cdots,n). \tag{1.5.4}$$

我们应注意这样的事实,即 (1.5.1) 的轨线只有当 $X_1\neq 0$ 时才是(1.5.4)的解. 因此,系统(1.5.4)的解一般并不代表每条完整的轨线.

(e) 从这些说明立即可知，如果 $\lambda(x)$ 为一处处为正或为负的纯量函数,则系统

$$dx/dt=X(x) \tag{1.5.1}$$

和系统

$$dx/dt=\lambda(x)X(x) \tag{1.5.1.1}$$

的轨线完全相同.

这就是说相空间中的同一个图形可以对应于不同的系统，虽然这些系统各自的积分曲线可能有极不相同的结构.

从分析的观点看，由 (1.5.1) 的每一个解可以通过积分求得 (1.5.1.1) 的一个解 (总假定 $\lambda(x)\neq 0$)，反过来也对. 事实上,如果 $\varphi(t)$ 为 (1.5.1) 的解,则 $\varphi(t(\tau))$ 为(1.5.1.1)的解,其中 $t(\tau)$

由 $\tau = \int dt/\lambda(\varphi(t))$ 所定义.

3. 奇点.环.开轨线

(a) 设 Γ 为 (1.5.1) 的常数积分曲线 $x(t) = c$，则其对应的轨线退化为相空间中的一点 c，其中 c 为方程

$$X(x) = 0 \tag{1.5.5}$$

的一个解.

反过来，这个方程组的任何解也是一条常数积分曲线的象.

方程组 (1.5.5) 的每一个解称为奇点或者奇轨线.

(b) 我们说，轨线 $\gamma_P(t)$ 当 $t \to T - 0$ [或 $t \to T + 0$] 时趋近于奇点 Q，假如对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\sigma > 0$，使得当 $t > T - \sigma$ (如果 $T < +\infty$) [$t < T + \sigma$ (如果 $T > -\infty$)] 或者 $t > 1/\sigma$ (如果 $T = +\infty$) [$t < -1/\sigma$ (如果 $T = -\infty$)] 时，从点 Q 到 $\gamma_P(t)$ 的欧几里得距离小于 ε.

现在已经清楚，如果我们假设唯一性定理成立，则对于有限的 T，当 $t \to T - 0$ [$t \to T + 0$] 时，$\gamma_P(t)$ 是不可能趋近于一个奇点的. 因为，否则，过点 $(T, \gamma_P(T))$ 就会有两条积分曲线通过，即已给的 $\gamma_P(t)$ 和常数积分曲线 $x = c$. (如果唯一性定理不成立，则 T 可以是有限的，例如在第六章§ 6.3 的例子，就会看到这种情形.)

反过来，易于证明：如果 $x(t)$ 为 (1.5.1) 的满足

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = c \tag{1.5.6}$$

的解，其中 c 为一常数，我们就有

$$X(c) = 0. \tag{1.5.7}$$

这有两种可能性. 或者每一个解 $x(t)$ 是 t 的单调函数，从而

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t \to +\infty} X(x(t)) = 0,$$

从而 (1.5.7) 成立；或者 $x_i(t)$ 中至少有一个在它的极限 c_i 附近无限次振动. 在这种情形，由 Rolle 定理可知，当 $t \to +\infty$ 时，

$\dot{x}_i(t) = X_i(x(t))$ 会无限次等于 0. 由于 $\lim\limits_{t\to+\infty} X(x(t))$ 存在，方程 (1.5.7) 仍然成立.

(c) 如果 Γ 为非奇异积分曲线，则它上面就没有使其切线平行于 t 轴的点. 因此，Γ 在 P 点的切线在相空间的投影，就是作为 Γ 的象的轨线在 P_0 点的切线，其中 P_0 为 P 的象.

因此，非奇轨线上各点都有切线. 切线将按对应于曲线正向的方向来定向，也就是按 t 增加的方向来定向. 这样定向的切线也称为**正向切线**.

(d) 如果 Γ 为具有最小周期 T 的非常数的周期积分曲线，则 Γ 上对应于长度为 T 的时间区间的弧段，在超平面 $t=0$ 上的正投影是一个简单闭曲线，其上每一点都有连续转动的切线.

在这种情形，Γ 的轨线称为一条轨道 (参看§ 4.1). 它是由无数多条重叠的闭曲线所组成. 通常我们把这些闭曲线中的任意一条都称为一个**环**.

(e) 最后，如果 Γ 为非周期积分曲线，则它和它的象是 1-1 对应的，因此，它的象是在每一点都有切线的开曲线，我们称之为**开轨线**.

补　　充

1. 对方程 $\dot{x} = -2tx^2$ 的各解，求值 t^- 及 t^+.

2. Gronwall 引理的推广.

设 $u(t)$ 及 $\lambda(t)$ 为 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上的正连续函数，$\omega(u)$ 为定义在 $u \geqslant 0$ 上的非负递增连续函数，k 及 M 为非负常数，则由不等式

$$u(t) \leqslant k + M\int_{t_0}^{t_1} \lambda(\tau)\omega(u(\tau))d\tau,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

可推得不等式

$$u(t) \leqslant \Omega^{-1}\left[\Omega(k) + M\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right],\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1' \leqslant t_1,$$

此处

$$\Omega(u)=\int_{u_0}^{u} dv/\omega(v),\ (u_0\geqslant 0,\ u\geqslant 0),$$

$\Omega^{-1}(u)$ 为函数 $\Omega(u)$ 的反函数，而 (t_0, t_1') 是 (t_0, t_1) 的这样的子区间，在其上，

$$\Omega(k)+M\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau$$

的值在 $\Omega^{-1}(u)$ 的定义域之内(参看：I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.* 7(1956), 81—94).

3. 求证定理 1 中关于 $u\omega(t, u)$ 的单调性的假设可以略去(参看：R. Conti, Limitazion "in ampiezza" delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni, *Boll. U. M. I.* (3), 11 (1956), 344—349，其中考虑了 f 为复函数的情形). 进一步的推广，可参看：R. Conti, Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, *Boll. U. M. I.* (3), 11 (1956), 510—514.

4. 唯一性定理的一个推广(参看：E. Coddington, N. Levinson, *Theory of differential equations* (1955), 49—52 页).

设 $\omega(t, u)$ 为定义在 $0<t<a$, $u\geqslant 0$ 上的非负函数；它对每个固定的 u，对 t 为 L 可测；对于固定的 t，对 u 连续；再设存在定义在 $0<t<a$ 上的函数 M，它对于每个 $\gamma>0$，在 $\gamma<t<a$ 上 L 可积，并满足 $\omega(t, u)\leqslant M(t)$. 又假设对每个 $\alpha(0<\alpha<a)$，$u(t)\equiv 0$ 是在 $0\leqslant t<\alpha$ 上几乎处处满足 $u'=\omega(t, u(t))$，并且 $u'_+(0)$ 存在，以及 $u(0)=u'_+(0)=0$ 的唯一绝对连续函数.

那末，只要 $f(t, x)$ 在 $|t-t_0|\leqslant a$, $|x-x^0|\leqslant b(a, b>0)$ 上连续，并对 $t\neq t_0$ 有

$$|f(t, \bar{x})-f(t, x)|\leqslant\omega(|t-t_0|, |\bar{x}-x|),$$

则在 $|t-t_0|\leqslant a$ 上至少存在 $\dot{x}=f(t, x)$ 的一个满足 $x(t_0)=$

x^0 的解(通常意义下的解).

关于这个定理的进一步推广,可参看: F. Brauer, Some results on uniqueness and successive approximations. *Canad. J. of Math.* 11 (1959), 527—533.

5. 几个已知的唯一性定理都是 4 中所述定理的特殊情况. 例如,取 $\omega(t, u) = t/u$, 就得到 M. Nagumo ($n = 1$) 和 O. Perron (n 为任意) 的唯一性定理.

最后这个结果也可以就高阶方程情形向另一个方面进行推广. 如 A. Wintner 的文章: On the local uniqueness of the initial value problem of the differential equation $d^n x/dt^n = f(t, x)$ (*Boll. U. M. I.* (3), 11(1956), 496—498) 以及 L. Merli 的文章: Sul-teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ (*Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl, Sc, Fis. Mat. nat.* (8), 22 (1957). 580—584). L. Merli 的结果如下:

设 S 为由 $0 < t \leqslant a$, $-b_i \leqslant x^{(i)} \leqslant b_i$, $b_i > 0$ ($i = 0, 1, \cdots, n-1$) 所确定的点 $(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ 的集合,S_0 为在 S 上再加上点 $(0, \cdots, 0)$ 的集合. 如果 $f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ 为定义在 S_0 上的连续函数,且满足

$$\begin{aligned}|f(t, x_1, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n-1)}) &- f(t, x_2, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n-1)})| \\ &\leqslant L_n|x_1 - x_2|/t^n + L_{n-1}|x_1^{(1)} - x_2^{(1)}|/t^{n-1} + \cdots \\ &\quad + L_1|x_1^{(n-1)} - x_2^{(n-1)}|/t,\end{aligned}$$

其中

$$(t, x_1, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n-1)}), \ (t, x_2, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n-1)})$$

为 S 的任意一对点,而 L_k 为满足 $\sum_{k=1}^{n} L_k/k! \leqslant 1$ 的一组数,则对于某个 $t_0 > 0$, n 阶方程 $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ 在 $0 \leqslant t < t_0$ 至多有一个满足 $x(0) = x^{(1)}(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0$ 的解.

参 考 文 献

AMERIO, L.

[1] Un preliminare teorema di Analisi per lo studio di moti con resistenza passiva, *Atti R. Accad. Italia*, (7), **3** (1942), 415–426.

ANDREYEV, A. F. and BOGDANOV, YU. S.

[1] On continuous dependence on the initial data of the solution of Cauchy problems, *Uspekhi Mat, Nauk*, XIII, 3 (81), 165–166 (1958) (Russian)

ARTEMIEV, N. A.

[1] Realizable motions, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **3** (1939), 351–367, (Russian).

BARBASHIN, E. A. and KRASOVSKII, N. N.

[1] On the stability of motion in the large, *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **86** (1952), 453–456, (Russian).

BELLMAN, R.

[1] The stability of solutions of linear differential equations. *Duke Math. J.*, **10** (1943), 643–647, p. 644.

CAFIERO, F.

[1] Un' osservazione sulla continuità rispetto ai valori iniziali degli integrali dell'equazione $y'=f(x,y)$, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8), **3** (1947), 479–482.

ERUGIN, I. P.

[1] On the continuation of solutions of differential equations, *Prikl. Mat. i Mekh.* **15** (1951), 55–58; *ibid.* **19** (1955), 764, (Russian).

[2] Some general questions on the theory of stability of motion, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **15** (1951), 227–236 (Russian).

FAEDO, S.

[1] Su un teorema di esistenza del calcolo delle variazioni e una proposizione generale di calcolo funzionale, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, (2), **12** (1943, pub. 1947), (119–133), pp. 124–125.

FILIPPOV, A. F.

[1] On continuous dependence of solutions on initial conditions, *Uspekhi Mat. Nauk*, XIV, 6 (90) (1959), 197–201 (Russian).

GIULIANO, L.

[1] Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una disuguaglianza di Peano, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8), **1** (1946), 1264–1271.

[2] Sull'unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (2), **2** (1940), 221–227.

[3] Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, *Rend. R. Acc. Italia*, (7) **1** (1940), 330–336.

GRONWALL, T. H.

[1] Note on the derivatives with respect to a parameter of the solution of a system of differential equations, *Ann. of Math.*, (2), **20** (1919), 292–296.

HAYASHI, K.

[1] On transformations of differential equations, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, Ser. A., **28** (1954), 313–325.

KOKSMA, J. F.

[1] *Diophantische Approximationen*, *Ergebn. d. Math.*, Bd. 4, Heft 4, (Berlin, 1936), p. 424.

KURZWEIL, J. and VEJVODA, O.

[1] On periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations, *Czechosl. Math. J.*, **5** (80) (1955), 362–370 (Russian).

LYAPUNOV, A. M.

[1] *Problème général de la stabilité du mouvement.* Princeton University Press, 1947 (Annals of Math. Studies, No. 17) (Reproduction of the French translation in 1907 of a Russian memoir, dated 1892).

MALKIN, I. G.

[1] On the inversion of the theorem of Lyapunov on asymptotic stability, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **18** (1954), 129–138 (Russian).

[2] On stability in the first approximation, *Sbornik Nauchnykh Trudov Kazakhsk. Aviats. Inst. No.* 3. (1935) (Russian).

MARKUS, L.

[1] Escape times for ordinary differential equations, *Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino*, **11** (1951/52), 271–276.

MASSERA, J. L.

[1] *Lezioni sulla "Théorie de la Stabilité."* Lectures given at Varenna in the summer of 1954 and published by the Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.)

[2] Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Publ. Inst. Mat. y Estad. Fac. Ing. Montevideo*, **2** (1950), 43–51.

MAYRHOFER, K.

[1] Über die Enden der Integralkurven bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, *Monatsh. f. Math. u. Ph.*, **41** (1934), 183–187.

MCSHANE, E. J.

[1] On the uniqueness of the solution of differential equations, *Bull. Am. Math. Soc.*, **4** (1939), 755–757.

MYSHKIS, A. D. and GRINFEL'D, U. K.

[1] On continuous dependence of the solution of Cauchy problems on initial data, *Uspekhi Matem. Nauk*, IX, *3* (61), (1954), 171–174 (Russian).

OKAMURA, H.

[1] Sur l'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires, *Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ.*, Ser. A, **23** (1941), 225–231.

[2] Condition nécéssaire et suffisante remplie par les équations différentielles ordinaires sans points de Peano, *ibid.* **24** (1942), 21–28.

OSTROWSKI, A.

[1] Über Normen von Matrizen, *Math. Zeitschr.* **63** (1955), 2–18.

SANSONE, G.

[1] *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, 2a ediz. vol. 1, 2 (Bologna, 1948–49).

SATŌ TOKUI

[1] Sur l'équation intégrale non-linéaire de Volterra, *Compositio Math.* II (1953), 271–290: Th. 17.

WEYL, H.

[1] Concerning a classical problem in the theory of singular points of ordinary differential equations. *Revista de Ciencias*, Lima, **46** (1944), 73–112, p. 86.

WINTNER, A.

[1] The non-local existence problem of ordinary differential equations, *Am. J. Math.*, **67** (1945), 277–284.

[2] The infinities of the non-local existence problem of ordinary differential equations, *ibid.*, **68** (1946), 173–178.

[3] An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria, *ibid.* **68** (1946), 451–454.

YOSHIZAWA, T.

[1] Note on the boundedness of solutions of a system of differential equations, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, Ser. A., 2 (1953), 293–298.

[2] Note on the boundedness and the ultimate boundedness of solutions of $x' = F(t, x)$, *ibid.*, **29** (1955.), 275–291.

[3] On the stability of solutions of a system of differential equations, *ibid.*, **29** (1955), 27–33.

第二章　特殊的平面自治系统

在这一章和第三、四、五、六各章中，我们将研究平面自治系统，亦即形如

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y)$$

的系统，其中 x, y 是欧几里得平面中的点的直角坐标。

我们将从分析某些特殊类型的系统开始.

§1. 线 性 系 统

1. 奇点

最简单的情形是系统右端的 X, Y 为 x, y 的线性函数，亦即所考虑的系统形式如

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y+a,\quad \dot{y}=\gamma x+\delta y+b. \tag{2.1.1}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b$ 是任意实常数.

如果方程组

$$\alpha x+\beta y+a=0,\quad \gamma x+\delta y+b=0 \tag{2.1.1'}$$

对 x, y 无解，则 (2.1.1) 没有奇点.

(不过，我们将在§ 5.3 中看到，这时存在无穷远奇点.)

另一方面，如果方程组 (2.1.1) 有解 $\bar{x}, \bar{y}$，以 $x-\bar{x}$ 代替 x，$y-\bar{y}$ 代替 y，(2.1.1) 就变成齐次系统

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y,\quad \dot{y}=\gamma x+\delta y. \tag{2.1.2}$$

从现在起我们就考虑这个系统.

(2.1.2) 的奇点的坐标是方程组 $\alpha x+\beta y=0$，$\gamma x+\delta y=0$ 的解. 因此，若矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

之秩等于零，即若 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$，则 x, y 平面上的所有的点都是奇点.

在这种情形，(2.1.2) 的积分曲线是一些平行于 t 轴的直线.

若矩阵 (2.1.3) 之秩等于 1，亦即若

$$\Omega=\alpha\delta-\beta\gamma=0, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2>0, \tag{2.1.4}$$

则对应于系统

$$\dot{x}=\lambda x, \quad \dot{y}=0 \quad (\lambda \neq 0) \tag{2.1.5}$$

的轨线的图形如图 1(a) 与图 1(b) 所示，其中的箭头表示轨线的正向，这两个图分别对应于 $\lambda<0$ 和 $\lambda>0$.

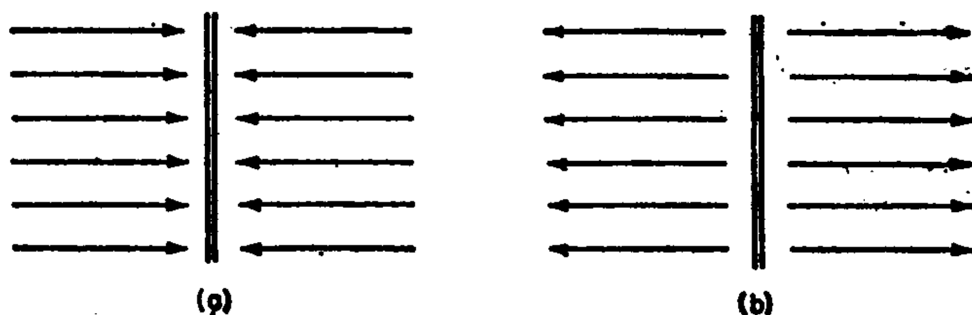


图 1

对应于系统

$$\dot{x}=\lambda y, \quad \dot{y}=0 \quad (\lambda \neq 0) \tag{2.1.6}$$

的轨线如图 2 所示，其中 $\lambda<0$；若 $\lambda>0$，则应改变箭头方向. 在这两种情况下，整条直线上的点都是奇点.

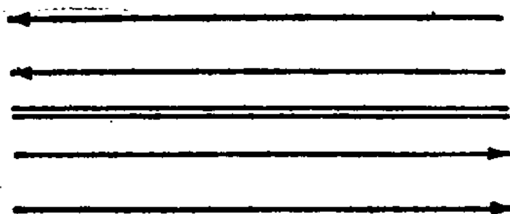


图 2

在§ 1.4(d) 中我们将会看到，与假设 (2.1.4) 相对应的轨线的图形只可能是这些.

剩下的情形是矩阵 (2.1.3) 之秩等于 2，即

$$\Omega=\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0. \tag{2.1.7}$$

这时 x, y 坐标系的原点 O 是系统 (2.1.2) 的唯一奇点，因而

我们将称它为孤立奇点.

在§5中我们也将会看到在那里所解释的意义下，还可以存在其它的无穷远奇点.

2. 线性系统的孤立奇点的标准型

(a) 这一段我们将研究某些特殊的线性系统的相平面，其中假设 $\Omega \neq 0$. 在第四段我们将证明，如果不计相平面上以 O 为不动点的仿射变换，在这里出现的图形一定是而且只能是在假设(2.1.7)下可能出现的那些图形.

(b) 我们从系统

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \dot{y} = \mu y \quad (\lambda\mu < 0) \tag{2.1.8.1}$$

开始，其解为 $x = c_1 e^{\lambda t}$, $y = c_2 e^{\mu t}$ (c_1, c_2 为任意常数).

这个系统的轨线除原点 O 和正负 y 轴以外，都是方程

$$dy/dx = (\mu y)/(\lambda x)$$

的积分曲线，即曲线 $|y|^\lambda = c|x|^\mu$, c 为任意常数. 其相图如图3所示，其中假定 $\lambda < 0 < \mu$; 反之，若 $\mu < 0 < \lambda$, 则只需在下图中对换 x 轴和 y 轴，或者将 t 改为 $-t$; 其图形与下图相同，箭头则相反. 对这两种情形，点 O 都称为鞍点.

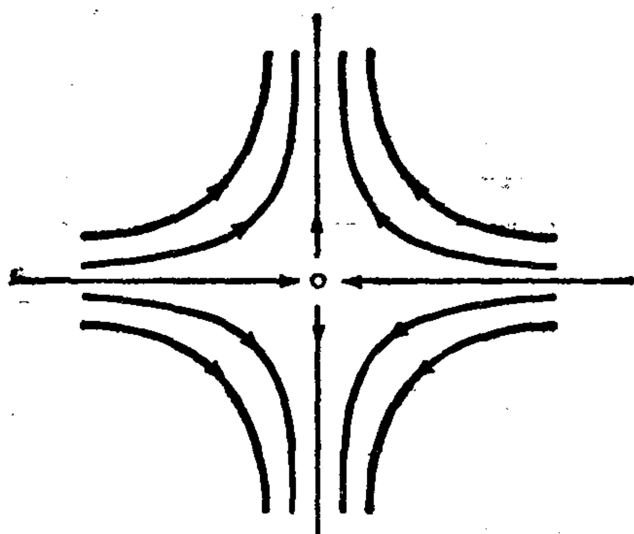


图 3

(c) 对于系统

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \dot{y} = \mu y \quad (\lambda\mu > 0,\ \lambda \neq \mu), \qquad (2.1.8.2)$$

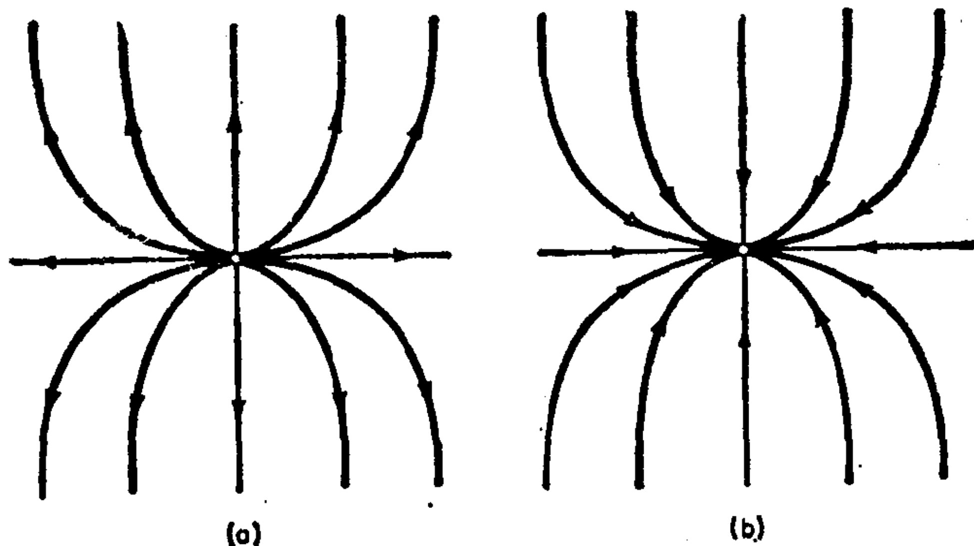


图 4

它的解和轨线的分析表达式与上一情形相同，但是相平面的图形则完全不同． 例如，若 $|\lambda| < |\mu|$，则当 $\lambda + \mu < 0$ 时有图 4(b)，当 $\lambda + \mu > 0$ 时有图 4(a)．点 O 称为**双切结点**，前者称为**稳定的**，后者称为**不稳定的**．

反之，若 $|\lambda| > |\mu|$，则只需对上图对换 x 轴和 y 轴．

(d) 系统

$$\dot{x} = \lambda x + \lambda y, \quad \dot{y} = \lambda y \quad (\lambda \neq 0) \qquad (2.1.8.3)$$

的解是曲线 $x = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$，$y = c_2 e^{\lambda t}$ (c_1，c_2 为任意常数)．其轨线是坐标原点 O，两条坐标半轴 $y = 0$，$x > 0$ 和 $x < 0$，以及曲线 $x = y\log|y| + cy$*)，c 为任意常数．

一般相图如图 5(a)（若 $\lambda > 0$）与 5(b)（若 $\lambda < 0$）所示，点 O 称为**单切结点**，前者为**不稳定的**，后者为**稳定的**．

(e) 系统

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \dot{y} = \lambda y \quad (\lambda \neq 0) \qquad (2.1.8.4)$$

的解是曲线 $x = c_1 e^{\lambda t}$，$y = c_2 e^{\lambda t}$ (c_1，c_2 为任意常数)，轨线除原点 O 以外，都是从 O 出发的射线（除去点 O），当 $\lambda < 0$ 时它们都指向 O，当 $\lambda > 0$ 时它们都指向无穷远，点 O 分别称为**稳**

*) 本书 log 系指自然对数．——译者注

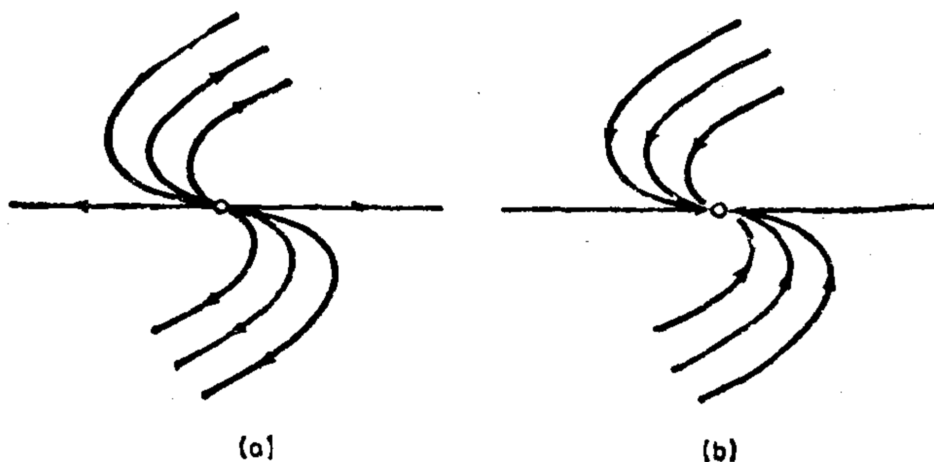


图 5

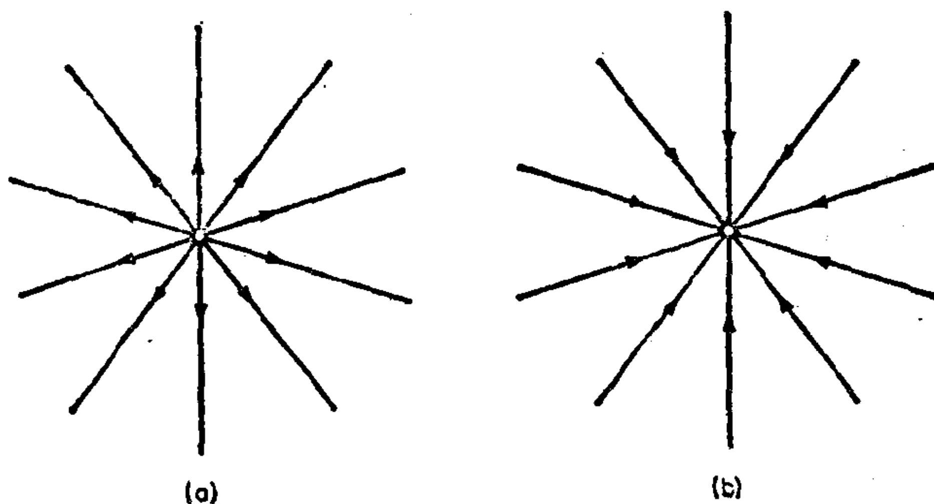


图 6

定星形结点和不稳定星形结点，它们的形状依次如图 6(b) 与 6(a) 所示.

(f) 系统

$$\dot{x} = \lambda x - \mu y, \quad \dot{y} = \mu x + \lambda y \quad (\lambda\mu \neq 0) \qquad (2.1.8.5)$$

的解是曲线 $x = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t + c_2)$, $y = c_1 e^{\lambda t}\sin(\mu t + c_2)$ (c_1, c_2 为任意常数)，轨线除 O 以外均为对数螺线 $\rho = c e^{\lambda\theta}$ (c 为任意常数，ρ, θ 为极坐标，$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$)，$\lambda < 0$ 时轨线指向原点，$\lambda > 0$ 时离开原点.

图 7(a) 与 7(b) 表明了 $\mu > 0$ 时的两种情形. 如果 $\mu < 0$，则当 t 增加时螺线顺时针方向围绕原点.

点 O 分别称为稳定焦点和不稳定焦点.

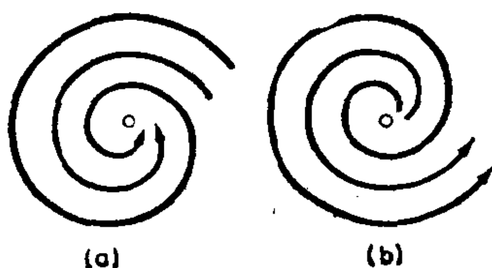


图 7

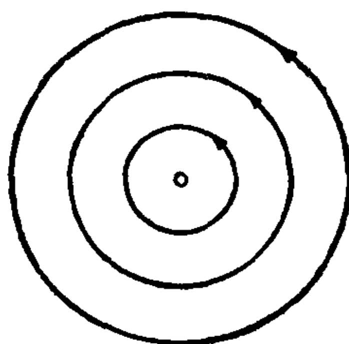


图 8

(g) 最后，系统

$$\dot{x} = -\mu y, \quad \dot{y} = \mu x \quad (\mu \neq 0) \tag{2.1.8.6}$$

的解是曲线 $x = c_1 \cos(\mu t + c_2)$, $y = c_1 \sin(\mu t + c_2)$ (c_1, c_2 为任意常数). 轨线是以 O 为中心的一族同心圆，$\mu > 0$ 时为逆时针方向，$\mu < 0$ 时为顺时针方向. 图 8 表示前一种情形，点 O 称为**中心**.

(h) 含有两个常系数方程的线性齐次系统的孤立奇点的分类以及相应的术语，可以在 H. Poincaré [1] (p. 385) 这一经典论文中找到，也可参看 H. Poincaré [2] (p. 12).

按照第一章§3.3所引用的术语，与其说奇点是稳定的，倒不如更正确地说对应于这些点的解 $x = 0$, $y = 0$ 当 $t \to +\infty$ 时是稳定的(确切地说是渐近稳定). 类似地，对应于不稳定奇点的解 $x = 0$, $y = 0$ 当 $t \to +\infty$ 时是不稳定的，但当 $t \to -\infty$ 时是渐近稳定的.

我们进一步注意到，解 $x = 0$, $y = 0$ 在鞍点情形是不稳定的，在中心情形是(非渐近)稳定的. 最后，我们指出，将 t 改为 $-t$，并不改变鞍点与中心的特性. 但在结点和焦点情形，则稳定点变成了不稳定点，不稳定点变成了稳定点.

3. 相平面的仿射变换

(a) 我们再来考虑前面§1.2(g)中讨论过的系统(中心情形). 在以 O 为不动点的**仿射变换**下，即在具有实系数 a, b, c, d 的线

性变换

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \quad (ad - bc \neq 0) \tag{2.1.9}$$

下，x，y 平面上 (2.1.8.6) 的轨线集(一族同心圆)变成了一族同心椭圆，它们是在 (2.1.9) 下 (2.1.8.6) 所变成的新线性齐次系统

$$\dot{x}' = \alpha' x' + \beta' y', \quad \dot{y}' = \gamma' x' + \delta' y' \tag{2.1.8'}$$

的轨线. 因此，新的相平面与前面一样被一族围绕 O 的环所覆盖.

若将 (2.1.9) 应用于系统 (2.1.8.5) (焦点情形)，则这系统的轨线，即对数螺线变成了围绕 O 的"螺旋状"曲线，其图形无本质变化. 这种情况也出现在上一段考虑过的其它例子 (b), (c), (d), (e) 之中.

在§ 1.4 中我们将证明 (定理 1 和定理 2)，任给一个系统 (2.1.2)，当 (2.1.7) 成立时，总可找到一个仿射变换 (2.1.9)，将这系统的轨线变成刚才我们所阐述的几种标准型之一，或者当满足 (2.1.4) 时化为§ 1.1 中所考虑过的几种标准型之一.

(b) 指出下面一点对今后将是有用的. 代替系统 (2.1.2)，我们考虑系统

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y + f(x, y), \quad \dot{y} = \gamma x + \delta y + g(x, y). \tag{2.1.10}$$

于是，在仿射变换 (2.1.9) 下，它变为

$$\dot{x}' = \alpha' x' + \beta' y' + F(x', y'), \quad \dot{y}' = \gamma' x' + \delta' y' + G(x', y'), \tag{2.1.10'}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} F(x', y') &= af\left(\frac{dx' - by'}{ad - bc}, \frac{-cx' + ay'}{ad - bc}\right) + bg(\cdots, \cdots), \\ G(x', y') &= cf(\cdots, \cdots) + dg(\cdots, \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{2.1.11}$$

因此，若在点 O 的邻域内，$f(x, y)$, $g(x, y)$ 是连续函数(或满足 Lipschitz 条件，或具有一阶偏导数等等)，则 $F(x', y')$, $G(x', y')$ 在 O 的邻域内也是 x', y' 的连续函数(或满足 Lipschitz 条件，或具有一阶偏导数等等).

若 O 是 (2.1.10) 的奇点 $[f(0, 0) = g(0, 0) = 0]$，则它也是

(2.1.10′) 的奇点 $[F(0,0)=G(0,0)=0]$，又若 f, g 满足条件

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)\rho^{-1}=0, \qquad \lim_{\rho\to 0} g(x,y)\rho^{-1}=0,$$
$$\rho=(x^2+y^2)^{1/2},$$

则也有

$$\lim_{\rho'\to 0} F(x',y')\rho'^{-1}=0, \qquad \lim_{\rho'\to 0} G(x',y')\rho'^{-1}=0,$$
$$\rho'=(x'^2+y'^2)^{1/2},$$

这是因为由 (2.1.9)，我们有

$$\rho'\leqslant |x'|+|y'|\leqslant [|a|+|b|+|c|+|d|][|x|+|y|]\leqslant h\rho,$$

和

$$\rho\leqslant |x|+|y|\leqslant \frac{|a|+|b|+|c|+|d|}{|ad-bc|}[|x'|+|y'|]\leqslant k\rho',$$

其中 h, k 为正的常数，它们都只依赖于 a, b, c, d。

4. 奇点类型的分类

(a) 现在我们来证明如下定理。

定理 1. 给定系统

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y, \quad \dot{y}=\gamma x+\delta y, \tag{2.1.2}$$

设

$$\Omega=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0, \tag{2.1.7}$$

令

$$I=\alpha+\delta, \tag{2.1.7.1}$$

则存在实的非退化 $(ad-bc\neq 0)$ 的线性变换

$$x'=ax+by, \quad y'=cx+dy, \tag{2.1.9}$$

它将系统 (2.1.2) 化为下面几种形状：

(i) 系统

$$\dot{x}'=\lambda x', \quad \dot{y}'=\mu y' \quad (\lambda\mu<0), \tag{2.1.8.1}$$

若

$$\Omega < 0; \tag{2.1.12.1}$$

(ii) 系统

$$\dot{x}' = \lambda x', \quad \dot{y}' = \mu y' \quad (\lambda\mu > 0, \lambda \neq \mu), \tag{2.1.8.2}$$

若

$$0 < 4\Omega < I^2; \tag{2.1.12.2}$$

(iii) 系统

$$\dot{x}' = \lambda x' + \lambda y', \quad \dot{y}' = \lambda y' \quad (\lambda \neq 0), \tag{2.1.8.3}$$

若

$$0 < I^2 = 4\Omega, \quad \beta^2 + \gamma^2 > 0; \tag{2.1.12.3}$$

(iv) 系统

$$\dot{x}' = \lambda x', \quad \dot{y}' = \lambda y' \quad (\lambda \neq 0), \tag{2.1.8.4}$$

若

$$0 < I^2 = 4\Omega, \quad \beta^2 + \gamma^2 = 0; \tag{2.1.12.4}$$

(v) 系统

$$\dot{x}' = \lambda x' - \mu y', \quad \dot{y}' = \mu x' + \lambda y' \quad (\lambda\mu \neq 0), \tag{2.1.8.5}$$

若

$$0 < I^2 < 4\Omega; \tag{2.1.12.5}$$

(vi) 系统

$$\dot{x}' = -\mu y', \quad \dot{y}' = \mu x' \quad (\mu \neq 0), \tag{2.1.8.6}$$

若

$$0 = I^2 < 4\Omega. \tag{2.1.12.6}$$

事实上，系统 (2.1.2) 在任一变换 (2.1.9) 下变为

$$\dot{x}' = (a\alpha + b\gamma)x + (a\beta + b\delta)y,$$
$$\dot{y}' = (c\alpha + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)y,$$

我们先来看看常数 a, b, c, d 应如何选取，才能使刚才写的这个系统与系统 (2.1.8.1) 和 (2.1.8.2) [情形 (i), (ii)] 一样.

为此，需要证明，常数 a, b, c, d, λ, μ 可以如此选取，使得它们满足方程组

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + b\gamma = \lambda a, \quad a\beta + b\delta = \lambda b, \\ c\alpha + d\gamma = \mu c, \quad c\beta + d\delta = \mu d, \end{aligned}\right\} \tag{2.1.13}$$

由此即得两个方程组

$$\left.\begin{aligned}(\alpha-\lambda)a+\gamma b=0,\\ \beta a+(\delta-\lambda)b=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.1.13.1}$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha-\mu)c+\gamma d=0,\\ \beta c+(\delta-\mu)d=0.\end{aligned}\right\}\tag{2.1.13.2}$$

为了求得非平凡解 (a, b), (c, d), 我们必须把 λ, μ 取为**特征方程**

$$\begin{vmatrix}\alpha-\rho & \beta\\ \gamma & \delta-\rho\end{vmatrix}=0\tag{2.1.14}$$

即方程

$$\rho^2-I\rho+\Omega=0\tag{2.1.14.1}$$

的两个根. 在现在的假设下, 这是两个相异的实根. 事实上, 由 (2.1.13.1), (2.1.13.2), 判别式 $I^2-4\Omega$ 为正. 因此可取 a, b 为 (2.1.13.1) 的非平凡解, c, d 为 (2.1.13.2) 的非平凡解.

使得 $ad-bc\neq 0$ 的这样的 a, b, c, d 总是可以取到的, 亦即这样取得的 a, b, c, d 可使 (2.1.9) 有逆. 事实上, 若 $\beta=\gamma=0$, 因而 $\lambda=\alpha$, $\mu=\delta$. 这时可取 $a=d=1$, $b=c=0$, 使得 (2.1.9) 是恒等变换; 反之, 若 $\beta^2+\gamma^2>0$, 例如 $\beta\neq 0$, 由于 a 与 b 以及 c 与 d 都不同时为零, 设 $b\neq 0$, $d\neq 0$, 由

$$a/b=(\lambda-\delta)/\beta,\quad c/d=(\mu-\delta)/\beta,$$

又因 $\lambda\neq\mu$, 故 $a/b\neq c/d$.

现在来考虑情形 (iii). 我们必须证明, a, b, c, d, λ 可由下列方程组求得

$$\left.\begin{aligned}(\alpha-\lambda)c+\gamma d=0,\\ \beta c+(\delta-\lambda)d=0;\end{aligned}\right\}\tag{2.1.15.1}$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha-\lambda)a+\gamma b-\lambda c=0,\\ \beta a+(\delta-\lambda)b-\lambda d=0.\end{aligned}\right\}\tag{2.1.15.2}$$

在现在的假设 (2.1.12.3) 下, 特征方程 (2.1.14) 只有一个解, 因此这时我们必须取 $\lambda=(\alpha+\delta)/2\ (\neq 0)$. 再令 c, d 为方程组 (2.1.15.1) 的非平凡解, 将它们代入 (2.1.15.2), 就得到以 a, b

为未知数的两个方程．容易验证，其中之一可由另一个得到．因此可将这两个方程的任一个的任何非零解取作为常数 a, b.

由于 c 和 d 不同时为零，例如设 $c \neq 0$，于是我们可用下面的方法选取不全为零的 a, b, 使得它们满足(2.1.15.2)的第一个方程．这样，a, b, c, d 被确定了．又因这些 a, b, c, d 必须满足(2.1.15.1) 的第一个方程和 (2.1.15.2) 的第一个方程，亦即有

$$a(\alpha - \lambda) + b\gamma = \lambda c, \quad c(\alpha - \lambda) + d\gamma = 0, \quad \lambda c \neq 0,$$

故有 $ad - bc \neq 0$.

在情形 (iv)，由 (2.1.12.4) 必有 $\alpha = \delta$，于是系统 (2.1.2) 已经是 (2.1.8.4) 类型了，换句话说，这时 (2.1.9) 为恒等变换．

剩下情形 (v) 和 (vi)，它们可以一起考虑．我们指出，如果允许有复变数变换和复系数系统，则 (v) 与 (vi) 这两种情形和 (i) 与 (ii) 那两种情形并没有什么不同，都可将 (2.1.2) 化为形式 $\dot{x}' = \lambda x'$, $\dot{y}' = \bar{\lambda} y'$，其中 λ, $\bar{\lambda}$ 为特征方程的一对共轭复根．

这时常数 a, b, c, d, λ, μ 必须如此选取，使它们满足方程组

$$\left.\begin{aligned}
&(\alpha - \lambda)a + \gamma b + \mu c = 0, \\
&\beta a + (\delta - \lambda)b + \mu d = 0, \\
&-\mu a + (\alpha - \lambda)c + \gamma d = 0, \\
&-\mu b + \beta c + (\delta - \lambda)d = 0.
\end{aligned}\right\}$$

容易验证，在现在的假设 (2.1.12.5) 或 (2.1.12.6) 下，若 λ, μ 分别表示特征方程的一对共轭复根的实部和虚部，则上面方程组的系数行列式等于零，因而这同一方程组有非零解 (a, b, c, d). 为了证明这时所确定的 a, b, c, d 满足 $ad - bc \neq 0$，只需注意到，上面的代数方程组等价于复数形式的方程组

$$(a + ic)[\alpha - (\lambda + i\mu)] + (b + id)\gamma = 0,$$
$$(a + ic)\beta + (b + id)[\delta - (\lambda + i\mu)] = 0,$$

于是可再重复对情形 (i) 与 (ii) 的推证.

(b) 由于假设 (2.1.12.1), $\cdots$, (2.1.12.6) 已包含了与假设 $\Omega \neq 0$ 相容的一切可能情况，故除了在§ 1.2 所考察过的各种类型的奇点以外，不再存在其它类型的孤立奇点（不计仿射变换）．因

此，我们可以推广§1.2中所引入的奇点的 Poincaré 分类法：若(2.1.12.1)成立，则称 O 为鞍点；若(2.1.12.2)，(2.1.12.3)或(2.1.12.4)成立，则称 O 为结点；若(2.1.12.5)成立，则称 O 为焦点；若成立(2.1.12.6)，则称 O 为中心．又依次称满足(2.1.12.2)，(2.1.12.3)和(2.1.12.4)的结点为双切结点，单切结点和星形结点．

在鞍点情形，进入 O 的四条轨线（两条对应于 $t\to+\infty$；另两条对应于 $t\to-\infty$）称为分界线．

最后，我们按 $I<0$ 还是 $I>0$ 来区别结点和焦点，为稳定奇点还是不稳定奇点，其中 $I=\alpha+\delta$．

(c) 为方便起见，我们将系统

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y,\quad \dot{y}=\gamma x+\delta y \tag{2.1.2}$$

的孤立奇点的分类及其对应的标准型列表如下，其中

$$\Omega=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,\quad I=\alpha+\delta:$$

中　心	$0=I^2<4\Omega$	$\dot{x}=-\mu y,\ \dot{y}=\mu x,\ \mu\neq 0$
焦　点	$0<I^2<4\Omega$	$\dot{x}=\lambda x-\mu y,\ \dot{y}=\mu x+\lambda y,\ \lambda\mu\neq 0$
星形结点	$0<I^2=4\Omega,\ \beta^2+\gamma^2=0$	$\dot{x}=\lambda x,\ \dot{y}=\lambda y,\ \lambda\neq 0$
单切结点	$0<I^2=4\Omega,\ \beta^2+\gamma^2>0$	$\dot{x}=\lambda x+\lambda y,\ \dot{y}=\lambda y,\ \lambda\neq 0$
双切结点	$0<4\Omega<I^2$	$\dot{x}=\lambda x,\ \dot{y}=\mu y,\ \lambda\mu>0,\ \lambda\neq\mu$
鞍　点	$4\Omega<0(\leqslant I^2)$	$\dot{x}=\lambda x,\ \dot{y}=\mu y,\ \lambda\mu<0$

(d) 为了证明§1.3(a)中的论断，我们必须证明

定理 2. 若系统

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y,\quad \dot{y}=\gamma x+\delta y \tag{2.1.2}$$

满足假设

$$\Omega=\alpha\delta-\beta\gamma=0,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2>0, \tag{2.1.4}$$

则存在非退化变换

$$x'=ax+by,\quad y'=cx+dy \tag{2.1.9}$$

$(ad-bc\neq 0)$，它将(2.1.2)变为

$$\dot{x}' = \lambda x', \quad \dot{y}' = 0 \quad (\lambda \neq 0),$$

若 $l = \alpha + \delta \neq 0$; 或变为

$$\dot{x}' = \lambda y', \quad \dot{y}' = 0 \quad (\lambda \neq 0),$$

若 $l = \alpha + \delta = 0$.

借助于任一非退化变换 (2.1.9)，可将系统 (2.1.2) 变为

$$\begin{aligned}(ad - bc)\dot{x}' = &[a(\alpha d - \beta c) + b(\gamma d - \delta c)]x' \\ &+ [a(\beta a - \alpha b) + b(\delta a - \gamma b)]y', \\ (ad - bc)\dot{y}' = &[c(\alpha d - \beta c) + d(\gamma d - \delta c)]x' \\ &+ [c(\beta a - \alpha b) + d(\delta a - \gamma b)]y'.\end{aligned}$$

若 a, b 为方程组

$$\beta a - \alpha b = 0, \quad \delta a - \gamma b = 0 \tag{2.1.16}$$

的非零解，则由于

$$a(\alpha d - \beta c) + b(\gamma d - bc) = (\alpha + \delta)(ad - bc),$$

我们有

$$\dot{x}' = (\alpha + \delta)x', \ (ad - bc)\dot{y}' = [cd(\alpha - \delta) - \beta c^2 + \gamma d^2]x'. \tag{2.1.17}$$

现在，若 $l = \alpha + \delta \neq 0$，则对 $a \neq 0$ 我们取 $c = -\gamma$，$d = \alpha$，对 $b \neq 0$，我们取 $c = -\delta$，$d = \beta$. 由于对前者

$$cd(\alpha - \delta) - \beta c^2 + \gamma d^2 = 0, \quad ad - bc = a(\alpha + \delta) \neq 0,$$

对后者 $ad - bc = b(\alpha + \delta) \neq 0$，故系统 (2.1.17) 变为

$$\dot{x}' = (\alpha + \delta)x', \quad \dot{y}' = 0,$$

这就是 (2.1.5).

另一方面，若 $l = \alpha + \delta = 0$，即 $\delta = -\alpha$，则由 $0 = \alpha\delta - \beta\gamma = -\alpha^2 - \beta\gamma$，不可能有 $\beta = \gamma$，因为否则就有 $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$，因此 $\beta \neq \gamma$. 若取 $c = -b$，$d = a$，则由 (2.1.16) 我们有 $cd(\alpha - \delta) - \beta c^2 + \gamma d^2 = (\gamma - \beta)(a^2 + b^2) \neq 0$，从而系统 (2.1.17) 变为 $\dot{x}' = 0$，$\dot{y}' = (\gamma - \beta)(a^2 + b^2)x'/(ad - bc)$，交换 x' 与 y' 的位置即得 (2.1.6).

§2. 齐 次 系 统[1)]

1. 齐次系统

系统

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y, \quad \dot{y}=\gamma x+\delta y$$

的许多性质与其说是与它右端关于 x, y 的线性性有关，不如说是与它右端关于 x, y 同为一次齐次函数的齐次性有关.

因此，这一节自然地要考虑下面一类系统

$$\dot{x}=X_m(x, y), \quad \dot{y}=Y_m(x, y), \tag{2.2.1}$$

其中 $X_m(x, y)$，$Y_m(x, y)$ 是定义在整个 x，y 欧几里得平面中的（实）函数，它们仅当 $x=0$，$y=0$ 时才同时为零，且都是 m ($m \geqslant 1$) 次齐次函数，即对任何实常数 λ，满足

$$X_m(\lambda x, \lambda y)=\lambda^m X_m(x, y), \quad Y_m(\lambda x, \lambda y)=\lambda^m Y_m(x, y). \tag{2.2.2}$$

关于 $X_m(x, y)$，$Y_m(x, y)$，我们还将假定它们有所需的任何阶导数，这一条件不仅保证了对任一点 (t_0, x_0, y_0)，(2.2.1) 的积分曲线存在且唯一，而且当 X_m，Y_m 同为 x, y 的 m 次齐次多项式时它肯定会满足，而这种情况在文献和一些应用中是经常出现的.

大家知道，X_m，Y_m 满足 (2.2.2) 的系统 (2.2.1) 的轨线可以通过积分求得其参数表达式

$$\begin{aligned} x &= c\exp\left(\int_0^u \frac{X_m(1, v)}{Y_m(1, v)-vX_m(1, v)}\,dv\right), \\ y &= cu\exp\left(\int_0^u \frac{X_m(1, v)}{Y_m(1, v)-vX_m(1, v)}\,dv\right), \quad (c\ \text{为常数}) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

但是，这个显式表达对于说明轨线的性态通常并没有多大帮助. 特别是，它不能说明轨线在奇点 O（以及无穷远点）附近的性态.

---

1) 这一节的材料见 H. Forster [1], R. Von Mises [1], G. E. Scilov [1] 和 L. S. Liaghina [1].

不过，由(2.2.3)可以知道，若对轨线作以O为中心的相似变换，特别是作以O为中心的对称变换，则仍得到(2.2.1)的轨线.

2. 不变射线.星形结点

(a) 如果我们引入以O为极点的极坐标：$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则系统(2.2.1)变为

$$\dot{\rho}=\rho^m Z(\theta),\quad \dot{\theta}=\rho^{m-1}N(\theta), \tag{2.2.4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}Z(\theta)&=Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta)\sin\theta+X_m(\cos\theta,\ \sin\theta)\cos\theta,\\ N(\theta)&=Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta)\cos\theta-X_m(\cos\theta,\ \sin\theta)\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{2.2.5}$$

系统(2.2.1)的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 也可看作为(2.2.4)的解 $\rho=\rho(t)$，$\theta=\theta(t)$. 然而，为方便起见，对每个表达式$\theta(t)$可以给它一个确定的θ值，例如取满足$-\pi<\theta(0)\leqslant\pi$ 的那一个.

因为 $Z^2(\theta)+N^2(\theta)=X_m^2(\cos\theta,\sin\theta)+Y_m^2(\cos\theta,\sin\theta)$，而我们在§ 2.1中已假定$O$是(2.2.1)的孤立奇点，故

$$Z^2(\theta)+N^2(\theta)>0. \tag{2.2.6}$$

对任一异于O而幅角为θ的点P，我们用角 $\alpha(-\pi<\alpha\leqslant\pi)$ 表示向径$\overrightarrow{OP}$到(2.2.1)在P点的轨线的正向切线之间的夹角(回忆所谓**正向切线**[第一章§ 5.3(c)]，就是按轨线正向取的切线，而轨线正向就是按t增加时轨线的走向). 容易看出，这样定义的角并不依赖于向径$\overrightarrow{OP}$的模，而只与幅角θ有关，这是因为

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=Z(\theta)[X_m^2(\cos\theta,\ \sin\theta)+Y_m^2(\cos\theta,\ \sin\theta)]^{-\frac{1}{2}},\\ \sin\alpha&=N(\theta)[X_m^2(\cos\theta,\ \sin\theta)+Y_m^2(\cos\theta,\ \sin\theta)]^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

这里指数式前取正号表明确定正向.

由(2.2.7)得知，从O出发的射线(除去O)都是系统(2.2.1)的轨线族的等倾线(轨线在其上具相同的斜率).

如果有这样一条射线，其上每一点都有 $\alpha=0$，则此射线本身也是轨线，我们称这样的射线为**不变射线**；这种射线的反向射线也是不变射线. 由(2.2.7)知道，不变射线的幅角是由方程

$$N(\theta)=0 \tag{2.2.8}$$

确定的.

(b) 若这一方程恒满足，则所有从O出发的射线都是不变射线，其图形与图6相同，点O仍称为星形结点.

由(2.2.6)，这时 $Z(\theta)$ 恒不为零，若它恒为负，则由(2.2.4)知道，当 t 增加时所有这些射线都指向 O，若 $Z(\theta)$ 恒为正，则指向相反，我们依次称这种星形结点为稳定的和不稳定的.

(c) 若 $X_m(x, y)$，$Y_m(x, y)$ 都为m次齐次多项式

$$X_m(x, y)=a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\cdots+a_{m-1}xy^{m-1}+a_my^m,$$

$$Y_m(x, y)=b_0x^m+b_1x^{m-1}y+\cdots+b_{m-1}xy^{m-1}+b_my^m,$$

其中 a_i，b_i 为实常数，则相应于(2.2.8)的方程

$$xY_m(x, y)-yX_m(x, y)=0 \tag{2.2.9}$$

可以写为

$$\begin{aligned}&b_0x^{m+1}+(b_1-a_0)x^my\\&+(b_2-a_1)x^{m-1}y^2+\cdots+(b_m-a_{m-1})xy^m-a_my^{m+1}=0.\end{aligned}$$

因此，若这方程恒满足，则 X_m，Y_m 具形状

$$X_m=xA_{m-1}, \quad Y_m=yA_{m-1},$$

$$A_{m-1}=a_0x^{m-1}+a_1x^{m-2}y+\cdots+a_{m-1}y^{m-1}.$$

按照我们所作的假定，O是孤立奇点，故 A_{m-1} 无实一次因子，因而仅当 m[*] 为奇数时(2.2.9)才可能恒满足.

3. 中心与焦点

(a) 由§2.1末尾的说明，若齐次系统(2.2.1)的轨线中有一个环，则所有的轨线(除O以外)都是与这环相似的关于O的环.

这时相平面的图形类似于我们在线性系统所考虑的那种情形. 正因为这个缘故，我们仍称O为系统(2.2.1)的中心(在§3，我们将把中心这一概念推广到其它类型的系统中去，中心的统一定义将留到第四章中再给出).

---

[*] 原书误为 n.——译者注

要使O为中心，(2.2.8)必须无实根．换句话说，$N(\theta)$要定号,因此存在正数$d>0$，使得当$-\pi<\theta\leqslant\pi$时$|N(\theta)|\geqslant d$．不失一般性,假定$N(\theta)$为正，如果它为负，则可改t为$-t$．由第一章§5.2(d)的结果，系统(2.2.4)的每条完整的轨线可以表示为$\rho=\rho(\theta)$的形式,其中$\rho(\theta)$是方程

$$\rho^{-1}d\rho/d\theta=Z(\theta)/N(\theta) \tag{2.2.10}$$

的解．

现在,从0到θ积分此式,得

$$\rho(\theta)=\rho(0)\exp\left(\int_0^\theta\frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}d\alpha\right). \tag{2.2.11}$$

因此，当$\theta\to+\infty$时，轨线绕原点无穷多次，但由于O是中心，故有$\rho(2\pi)=\rho(0)$，或者

$$\int_0^{2\pi}\frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}d\alpha=0. \tag{2.2.12}$$

这一条件连同$N(\theta)\neq0$也是O为中心的充分条件．

(b) 若(2.2.12)不满足,则由于

$$\rho(2n\pi)=\rho(0)\exp\left(n\int_0^{2\pi}\frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}d\alpha\right),$$

得知当上式右端的积分小于零时，序列$\rho(2n\pi)$($n=1,2,\cdots$)趋于零,而当这个积分大于零时,这序列趋于$+\infty$．

如同线性系统的焦点情形,这些轨线的性态如螺旋线,正因为这个缘故,我们称O为齐次系统(2.2.1)的焦点（焦点概念如同中心概念一样将在后面第四章中给予推广）．如果当$t\to+\infty$时轨线螺旋状绕近O,则称O为稳定的,如果当$t\to-\infty$时它们绕近O,则称O为不稳定的．这两种情形分别对应于下面两个不等式:

$$N(\theta)\int_0^{2\pi}\frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}d\alpha<0,\quad N(\theta)\int_0^{2\pi}\frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}d\alpha>0. \tag{2.2.13}$$

(c) 若$X_m(x,y)$，$Y_m(x,y)$是偶次齐次多项式，则方程(2.2.8)至少有一个实根．因此当X_m，Y_m为齐次多项式时,仅当它们的公共次数为奇数时才可能有中心或焦点．

(d) 应用齐次函数的 Euler 定理，我们容易验证下面的恒等式

$$(m+1)Z(\theta) = \partial X_m(\cos\theta,\ \sin\theta)/\partial x + \partial Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta)/\partial y - dN/d\theta,$$

利用这个式子，可以把出现在 (2.2.12)，(2.2.13) 中的积分写成更便于计算的形式

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{m+1}\int_0^{2\pi} \frac{\partial X_m(\cos\alpha,\ \sin\alpha)/\partial x + \partial Y_m(\cos\alpha,\ \sin\alpha)/\partial y}{N(\alpha)} d\alpha. \tag{2.2.14}$$

4. 孤立不变射线. 正规角域

(a) 设 θ_0 为方程

$$N(\theta) = 0 \tag{2.2.8}$$

的孤立零点. 由条件 (2.2.6)，$Z(\theta_0) \neq 0$，故存在以 O 为顶点的角域 $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$，$\delta > 0$，使得在其中 $Z(\theta) \neq 0$. 不失一般性，设 $\delta < \pi/2$. 称每个这样的角域 $|\theta - \theta_0| < \delta$ 为关于极角 θ_0 的不变射线的正规角域.

于是我们有

$$Z(\theta) = Z(\theta_0)[1 + \varepsilon_1(\theta - \theta_0)], \quad |\theta - \theta_0| \leqslant \delta. \tag{2.2.15}$$

由 $dZ/d\theta$ 的连续性得知 ε_1 有界，若 θ_0 是 $N(\theta)$ 的 k 重零点，则可写

$$N(\theta) = N^{(k)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^k[1 + \varepsilon_2(\theta - \theta_0)]/k! \quad |\theta - \theta_0| \leqslant \delta, \tag{2.2.16}$$

其中 $N^{(k)}(\theta_0)$ 是 $N(\theta)$ 在 $\theta = \theta_0$ 的 k 阶导数，ε_2 也有界.

现在我们有三种情形:

(α) k 为奇数，$Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0) > 0$;

(β) k 为奇数，$Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0) < 0$;

(γ) $k(\geqslant 2)$为偶数.

对这三种情形，我们依次称为关于射线 $\theta=\theta_0$ 的第一类、第二类和第三类(混合型)正规角域.

以 A_- 记角域 $\theta_0-\delta\leqslant\theta<\theta_0$, A_+ 记角域 $\theta_0<\theta\leqslant\theta_0+\delta$. 于是，由于按照我们的假设，$\theta_0$ 为 $N(\theta)$ 的孤立零点，因而 $N(\theta)$ 在 A_- 和 A_+ 中保持定号.

由类似于§ 2.3(a) 中的推理，得知齐次系统 (2.2.1) 的任一整条在 A_- 或 A_+ 中的轨线弧都可以表示为方程 $\rho=\rho(\theta)$ 的形式，其中 $\rho(\theta)$ 是方程 (2.2.10) 的解.

由 $\cos\alpha(\theta)$ 和 $\sin\alpha(\theta)$ 的表达式 (2.2.7)，得知相应于任一点 (x, y)的向量场 $(\dot{x}, \dot{y})$，在情形 (α) (第一类)如图 9(a) 与 9(b) 所

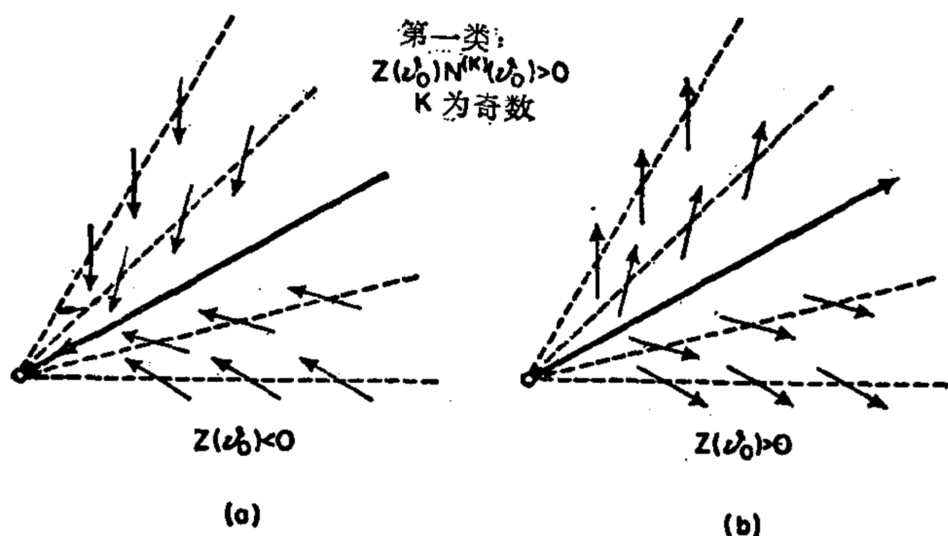


图 9

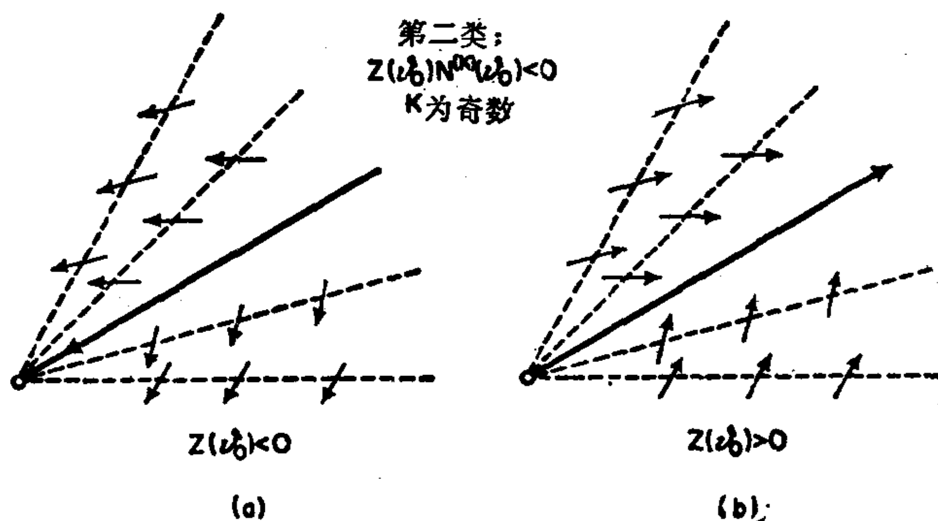


图 10

示;在情形(β)(第二类)如图 10(a) 与 10(b) 所示,在情形(γ)(第三类)如图 11(a), (b), (c), (d) 所示.

(b) 下一段将研究在正规角域内轨线弧的性态. 我们先作一点说明.

我们说极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$ 的曲线在给定点 $P_0\neq O$ 凸(凹)向极点 O, 如果有以 P_0 为中心的小弧段, 使得对这弧段上的任一点 P, 矢径 $\overrightarrow{OP}$ 先与曲线相交, 然后才与曲线在 P_0 点的切线相交(先与曲线在 P_0 点的切线相交,后与这曲线相交).

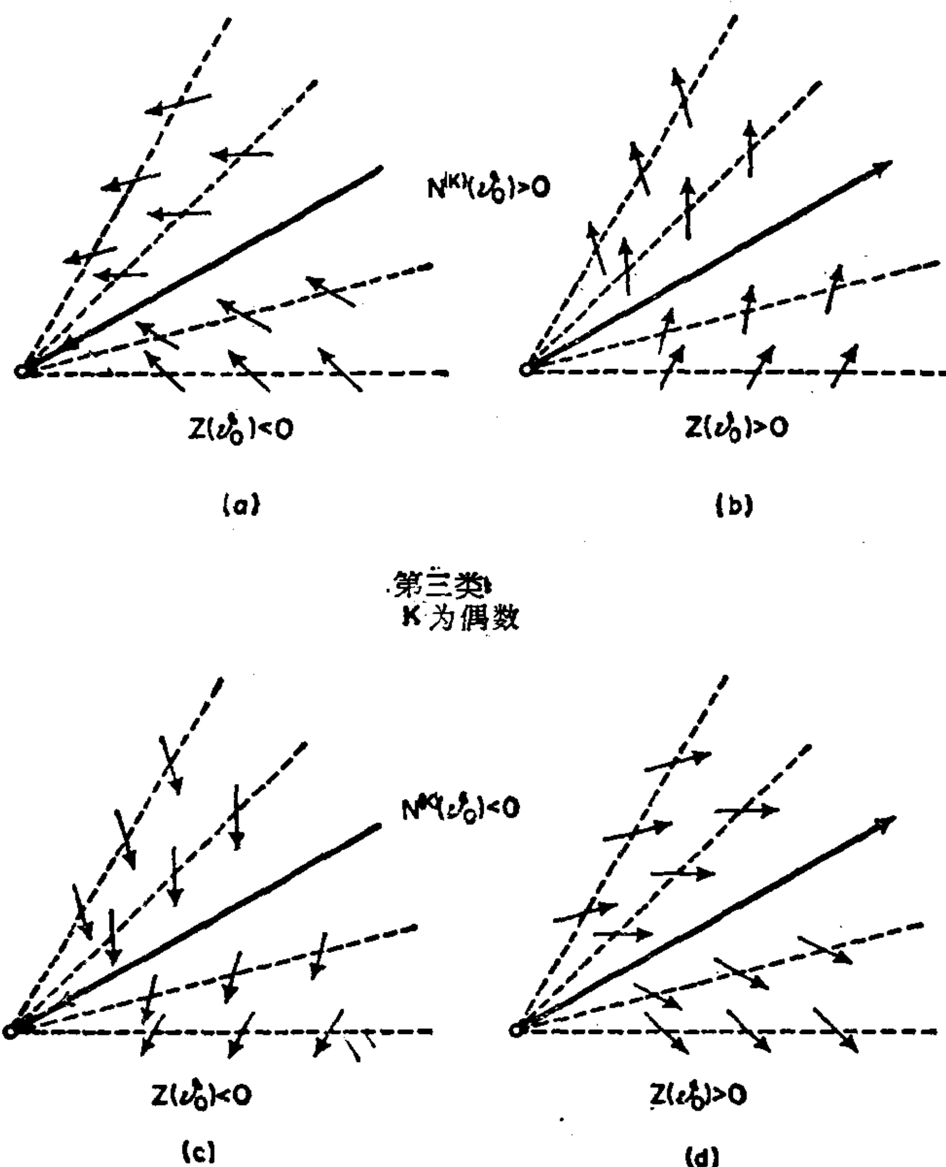


图 11

回忆曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 的曲率 $1/R$（连同它的符号）为$(2\rho'^2+\rho^2-\rho\rho'')(\rho^2+\rho'^2)^{-3/2}$，就可根据在 P_0 点 $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''<0$ 还是 $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''>0$ 的情况，来确定所给曲线在 P_0 点是凸向 O 还是凹向 O*)。

若 $\rho=\rho(\theta)'$ 是轨线方程，则由(2.2.10)我们有

$$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=\rho^2(\theta)N^{-2}(\theta)\Big[N^2(\theta)+Z^2(\theta)+Z(\theta)\frac{dN(\theta)}{d\theta}-N(\theta)\frac{dZ(\theta)}{d\theta}\Big],$$

这个表达式的符号显然与

$$N^2(\theta)+Z^2(\theta)+Z(\theta)\frac{dN(\theta)}{d\theta}-N(\theta)\frac{dZ(\theta)}{d\theta}$$

的符号相同.

对于 $N(\theta)=0$ 的根 $\theta=\theta_0$ 来说，这后一个表达式化为

$$Z^2(\theta_0)+Z(\theta_0)N'(\theta_0).$$

如果后者不等于零，那么取一个比正规角域定义中的 δ 更小的适当的 δ（仍记为 δ——译者注），可使在整个角域 $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$ 中 $Z^2(\theta)+Z(\theta)N'(\theta)$ 保持一定符号. 在情形 (α)，由于有 $Z(\theta_0)N'(\theta_0)\geqslant0$，在 $k\geqslant3$ 的情形 (β)，以及在情形 (γ)，由于有 $Z(\theta_0)N'(\theta_0)=0$，故都可以肯定 $Z^2(\theta)+Z(\theta)N'(\theta)$ 为正，因此我们有下面的定理:

定理 3. 若 § 2.1 中的条件都满足，A 是关于 θ_0（$N(\theta)$的 k 重零点）的第一类、第三类或第二类（$k\geqslant3$）的充分小的正规角域，则位于 A 中的轨线是凹向 O 的；若 A 是第二类（$k=1$）正规角域，则其中的轨线凸向 O 还是凹向 O，分别由

$$Z^2(\theta_0)+Z(\theta_0)N'(\theta_0)<0$$

还是 >0 来确定.

$Z(\theta_0)+N'(\theta_0)=0$ 的情况留待下一节再讨论.

(c) 正规角域的对顶角域也是同一类型的正规角域. 这是因

---

*) 原书 $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''$ 的符号与凸凹性正好相反. ——译者注

为

$$Z(\theta+\pi)=(-1)^{m+1}Z(\theta),\quad N(\theta+\pi)=(-1)^{m+1}N(\theta),$$

以及 (2.2.7). 当 m 为偶数时，则只需改换箭头方向.

5. 轨线在正规角域中的性态

(a) 设 $A(|\theta-\theta_0|\leqslant\delta)$ 是对应于孤立不变射线 $\theta=\theta_0$ 的第一类正规角域，亦即 k 为奇数，$Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0)>0$.

设 $Z(\theta_0)<0$ (相反的情形可改 t 为 $-t$ 来处理)，于是 $N^{(k)}(\theta_0)<0$，因而对充分小的 δ，在角域 $A_-(\theta_0-\delta<\theta\leqslant\theta_0)$ 内 $N(\theta)>0$，而在角域 $A_+(\theta_0<\theta\leqslant\theta_0+\delta)$ 内 $N(\theta)<0$. 进一步，在 A_- 和 A_+ 中的轨线可以看作是 (2.2.10) 的解 $\rho=\rho(\theta)$，在现在的假设下 (2.2.10) 可以写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{Z(\theta_0)}{N^{(k)}(\theta_0)}\frac{k!}{(\theta-\theta_0)^k}(1+\varepsilon(\theta)),\qquad(2.2.10.1)$$

其中可取 δ 足够小，使得可设 $|\varepsilon(\theta)|<1/2$. 且当 $\theta-\theta_0$ 为无穷小时 $\varepsilon(\theta)$ 也为无穷小.

由此得知，在 A_- 中我们有

$$\rho(\theta)=\rho_0\exp\left(k!\,\frac{Z(\theta_0)}{N^{(k)}(\theta_0)}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta}\frac{1+\varepsilon(\varphi)}{(\varphi-\theta_0)^k}\,d\varphi\right),\ \rho_0=\rho(\theta_0-\delta),\qquad(2.2.17.1)$$

又由于

$$\int_{\theta_0-\delta}^{\theta}\frac{1+\varepsilon(\varphi)}{(\varphi-\theta_0)^k}\,d\varphi<-\frac{1}{2}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta}\frac{d\varphi}{(\theta_0-\varphi)^k},$$

故当 $\theta\to\theta_0-0$ 时有 $\rho(\theta)\to 0$.

类似地，若我们在射线 $\theta=\theta_0$ 上任取一点，并对 $\theta_0<\theta\leqslant\theta_0+\delta$ 应用公式

$$\rho(\theta)=\rho_0\exp\left(k!\,\frac{-Z(\theta_0)}{N^{(k)}(\theta_0)}\int_{\theta}^{\theta_0+\delta}\frac{1+\varepsilon(\varphi)}{(\varphi-\theta_0)^k}\,d\varphi\right),\ \rho_0=\rho(\theta_0+\delta),\qquad(2.2.17.2)$$

和不等式

$$\int_{\theta}^{\theta_0+\delta}\frac{1+\varepsilon(\varphi)}{(\varphi-\theta_0)^k}d\varphi>\frac{1}{2}\int_{\theta}^{\theta_0+\delta}\frac{d\varphi}{(\varphi-\theta_0)^k},$$

则对相应的轨线当 $\theta\to\theta_0+0$ 时有 $\rho(\theta)\to 0$. 由此我们有下面的定理：

定理 4. 在情形 (α)（k 为奇数，$Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0)>0$），齐次系统 (2.2.1) 的位于角域 $A_-(\theta_0-\delta\leqslant\theta<\theta_0)$ 中的轨线，当

$$Z(\theta_0)<0,\quad t\to+\infty$$

或者当 $Z(\theta_0)>0$，$t\to-\infty$ 时都趋于 O. 趋于 0 的轨线的切线趋于不变射线. 对 $A_+(\theta_0<\theta\leqslant\theta_0+\delta)$ 完全类似.

由定理 3，第一类正规角域中的轨线的可能形状如图 12(a) 与 12(b) 所示.

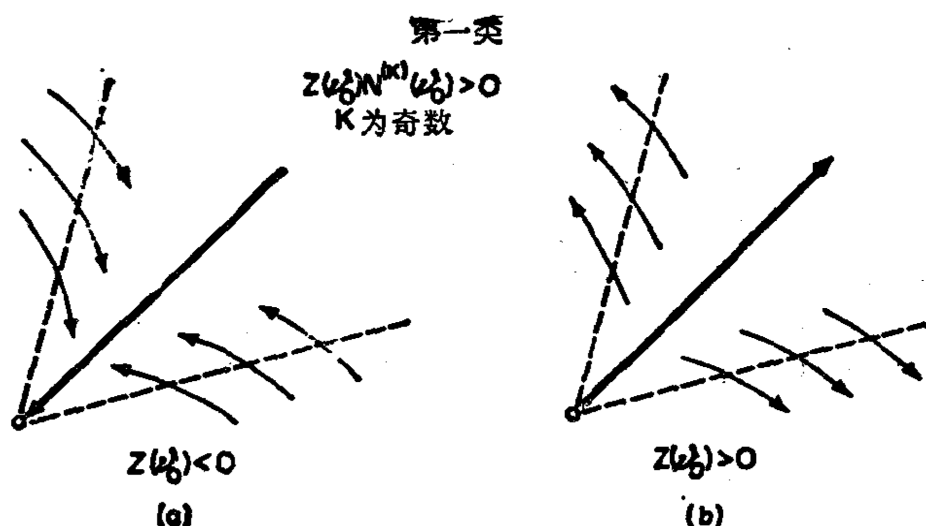


图 12

(b) 现在设 A 是第二类角域，即情形(β)：k 为奇数，$Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0)<0$. 这时不妨设 $Z(\theta_0)>0$，$N^{(k)}(\theta_0)<0$. 于是在 A_- 中 $N(\theta)>0$，在 A_+ 中 $N(\theta)<0$，方程 (2.2.10.1) 仍成立，在现在的假设下，方程 (2.2.17.1) 和 (2.2.17.2) 指出，当 $\theta\to\theta_0-0$ 时 $\rho(\theta)\to\infty$，$\theta\to\theta_0+0$ 时也如此. 这时我们说轨线趋于不变射线的无穷远点 P_∞.

再来确定轨线在 P_∞ 的切线. 为此，我们考虑当 $\theta\to\theta_0-0$ 和 $\theta\to\theta_0+0$ 时轨线上的点与不变射线 $\theta=\theta_0$ 之间的距离

$d(\theta-\theta_0)=\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ 的极限．由 (2.2.17.1)，在 A_- 中我们有

$$d(\theta-\theta_0)=\rho(\theta_0-\delta)\sin(\theta_0-\theta)\exp\left(k!\,\frac{Z(\theta_0)}{N^{(k)}(\theta_0)}\times\int_{\theta_0-\delta}^{\theta}\frac{1+\varepsilon(\varphi)}{(\varphi-\theta_0)^k}\,d\varphi\right). \qquad (2.2.18)$$

由假设 (β)，且设 $k\geqslant 3$，则当 $\theta\to\theta_0-0$ 时 $d(\theta-\theta_0)$ 趋于 $+\infty$．对 A_+ 类似．因此我们有下面的定理：

定理 5. 在第二类正规角域（k 为奇数，$Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0)<0$）中，设 $k>3$，则齐次系统的所有轨线，当 $Z(\theta_0)>0$ 而 t 增加时都趋于不变射线 $\theta=\theta_0$ 的无穷远点，或者当 $Z(\theta_0)<0$ 而 t 减少时趋于不变射线 $\theta=\theta_0$ 的无穷远点．并且它们以无限远直线作为渐近线．

用类似的方法我们可以证明下面的定理：

定理 6. 第二类正规角域中的轨线，当

$$k=1,\quad Z^2(\theta_0)+Z(\theta_0)N'(\theta_0)>0,\quad Z(\theta_0)N'(\theta_0)<0$$

时，其性状与定理 5 中轨线的性状相同．

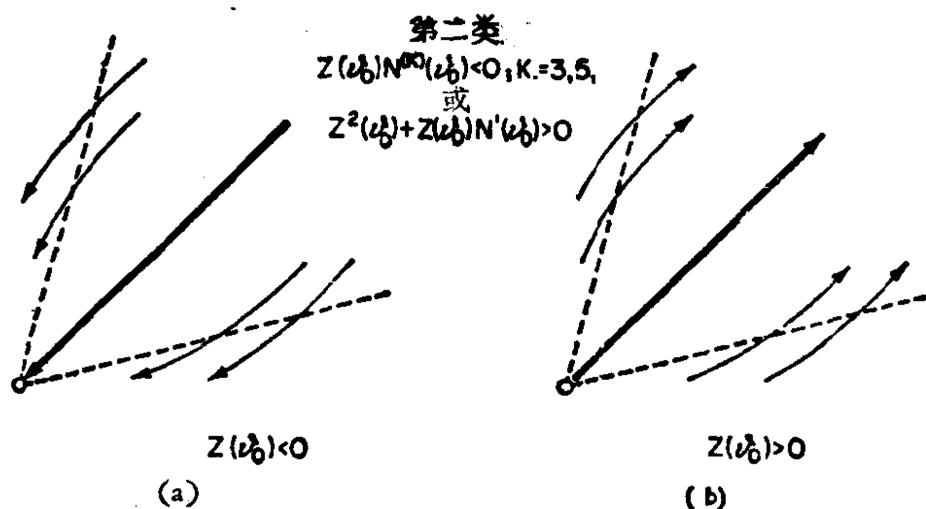


图 13

这些轨线的形状如图 13(a) 与 13(b) 所示．

由 (2.2.10.1)，我们也有下面定理：

定理 7. 若 A 是第二类角域，且有

$$k = 1,\quad Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N'(\theta_0) < 0,$$

则 A 中一切轨线当 $Z(\theta_0) > 0$ 而 t 增加，或者当 $Z(\theta_0) < 0$ 而 t 减少时都趋于不变射线的无穷远点，并且它们都以同一不变射线为渐近线.

这种情形的轨线形状如图 14(a) 与 14(b) 所示.

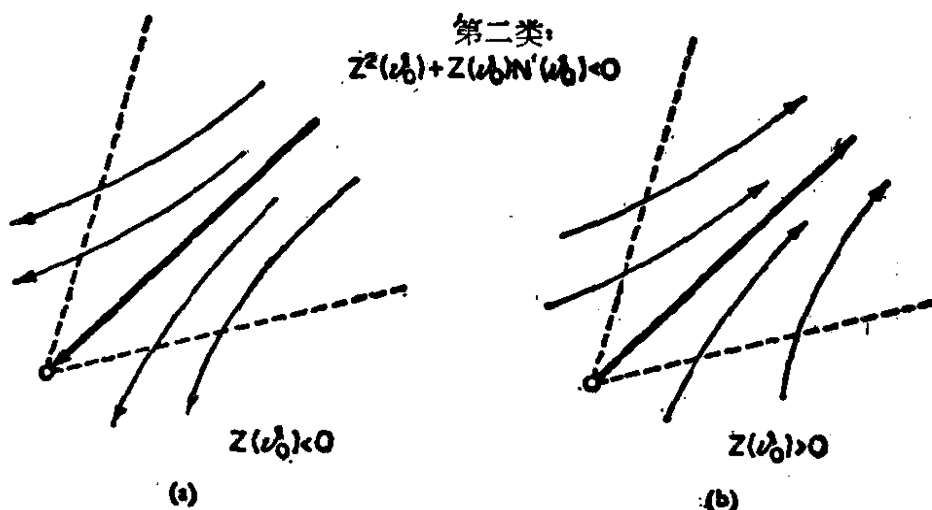


图 14

(c) 现在我们来考虑情形

$$Z(\theta_0) + N'(\theta_0) = 0. \tag{2.2.19}$$

这也是第二类角域 ($k = 1$, $Z(\theta_0)N'(\theta_0) = -Z^2(\theta_0) < 0$).

我们先将 $Z(\theta)$ 与 $N(\theta)$ 在区间 $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$ 内作 Taylor 展开，注意到 $N(\theta_0) = 0$, $N'(\theta_0) = -Z(\theta_0)$, 就有

$$Z(\theta) = Z(\theta_0) + Z'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + Z''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2/2 + \cdots + Z^{(l)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^l/l! + O[(\theta - \theta_0)^{l+1}],$$

$$N(\theta) = -Z(\theta_0)(\theta - \theta_0) + N''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2/2 + \cdots + N^{(l)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^l/l! + O[(\theta - \theta_0)^{l+1}],$$

其中 $O[(\theta - \theta_0)^{l+1}]$ 具有通常的意义.

由此得

$$N^2(\theta) + Z^2(\theta) + Z(\theta)N'(\theta) - Z'(\theta)N(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1(\theta - \theta_0) + \alpha_2(\theta - \theta_0)^2 + \cdots + \alpha_l(\theta - \theta_0)^l + O[(\theta - \theta_0)^{l+1}], \tag{2.2.20}$$

其中

$$\alpha_0 = Z(\theta_0)[Z(\theta_0) + N'(\theta_0)],\ \alpha_1 = Z(\theta_0)[2Z'(\theta_0) + N''(\theta_0)], \cdots \tag{2.2.21}$$

由方程(2.2.19)得知,(2.2.20)中的 α_0 为零,假定 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{l-1} = 0$, $\alpha_l \neq 0$, $l \geqslant 1$. 换句话说, α_l, $l \geqslant 1$, 是第一个不等于零的 α[1].

由(2.2.20)以及§2.4(b)中的说明,得知若 l 是偶数,则当 $\alpha_l > 0$ 时在 A 中的轨线都凹向 O, 而当 $\alpha_l < 0$ 时轨线都凸向 O. 当 l 为奇数且 $\alpha_l > 0$ 时,在 A_- 和 A_+ 中的轨线分别凸向 O 和凹向 O. 反之,若 $\alpha_l < 0$, l 为奇数,则情况刚好相反.

对 $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$, 函数 $Z(\theta)/N(\theta)$ 可展开为

$$Z(\theta)/N(\theta) = \beta_0(\theta - \theta_0)^{-1} + \beta_1 + \beta_2(\theta - \theta_0) + \cdots + \beta_l(\theta - \theta_0)^{l-1} + O[(\theta - \theta_0)^l],$$

其中

$$\beta_0 = -1,\ \beta_1 = -\frac{2Z'(\theta_0) + N''(\theta_0)}{2Z(\theta_0)}, \cdots$$

在 θ_1 与 θ 之间积分(2.2.10), θ_1 与 θ 或者都 $< \theta_0$, 或者都 $> \theta_0$, 即得

$$\rho(\theta) = \frac{\rho(\theta_1)(\theta_1 - \theta_0)}{\theta - \theta_0} \times \exp\left(\int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \sum_{1}^{l} \beta_\nu(\varphi - \theta_0)^{\nu-1} + O[(\varphi - \theta_0)^l] \right\} d\varphi\right).$$

于是,对 $A_-(\theta_1 = \theta_0 - \delta)$, 我们有

$$d(\theta - \theta_0) = \rho(\theta_0 - \delta)\delta \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\theta - \theta_0} \times \exp\left(\int_{\theta_0 - \delta}^{\theta} \left\{ \sum_{l}^{1} \beta_\nu(\varphi - \theta_0)^{\nu-1} + O[(\varphi - \theta_0)^l] \right\} d\varphi\right).$$

---

1) 如果对每个指标 l, $\alpha_l = 0$, 且在 θ_0 的邻域内 $Z(\theta)$, $N(\theta)$ 有 Taylor 展开式,则对 $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$, 有 $N^2(\theta) + Z^2(\theta) + Z(\theta)N'(\theta) - Z'(\theta)N(\theta) \equiv 0$. 这个表达式除了正因子以外表示轨线 $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \neq \theta_0$ 时的曲率. 因此每条轨线都是直线,从而为不变射线,这与 $\theta = \theta_0$ 为孤立不变射线相矛盾.

从而，当 $\theta \to \theta_0 - 0$ 时 $d(\theta - \theta_0)$ 有不为零的有限极限；类似地对 A_+. 因此，在情形 (2.2.19)，A 中的一切轨线以平行于（但不重合）给定的射线的直线作为它们的渐近线.

总之，在 $Z(\theta_0) + N'(\theta_0) = 0$ 的情形，当 $Z(\theta_0) < 0$ 时，轨线性状就是如图 15(a), (b), (c), (d) 所示的那些.

若 $Z(\theta_0) > 0$，则箭头相反.

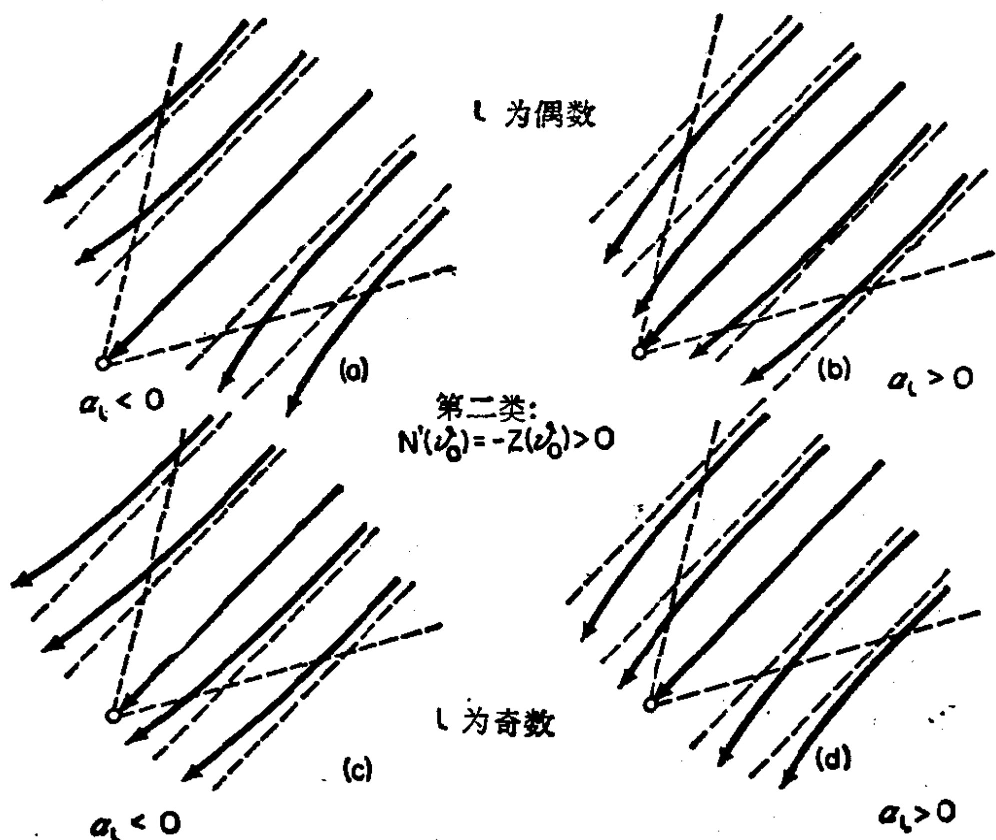


图 15

(d) 现在我们只要考虑情形 (γ)：k 为偶数，对应的正规角域是第三类（混合型）的.

根据类似于前面采用过的推理，我们可得下面的定理：

定理 8. 若 k 为偶数，且 $N^{(k)}(\theta_0) < 0$，$N(\theta_0) = N'(\theta_0) = \cdots = N^{(k-1)}(\theta_0) = 0$，则当 $Z(\theta_0) < 0$，而当 $t \to -\infty$ 时，齐次系统 (2.2.1) 在 A 中的轨线都趋于不变射线 $\theta = \theta_0$ 的无穷远点，并且以此无穷远直线作为渐近线. 若 $Z(\theta_0) > 0$，则当 $t \to -\infty$ 时轨线都趋于 O，且其切线趋于这条不变射线.

若 $Z(\theta_0)<0$ 而 $t\to+\infty$，则 A_+ 中的轨线都趋于 O，而且轨线的切线趋于这条不变射线；当 $Z(\theta_0)>0$，而 $t\to+\infty$ 时这些轨线都趋于这条不变射线的无穷远点，并且以此不变射线作为它们的渐近线.

若 $N^{(k)}(\theta_0)>0$，则只需将 A_- 和 A_+ 对换一下即可.

换句话说，第三类正规角域是第一类与第二类（$k\geqslant 3$）的混合. 轨线的可能形状如图 16(a), (b), (c), (d) 所示.

(e) 若 θ_1 与 θ_2 是方程 $N(\theta)=0$ 的两个相邻的孤立根，则

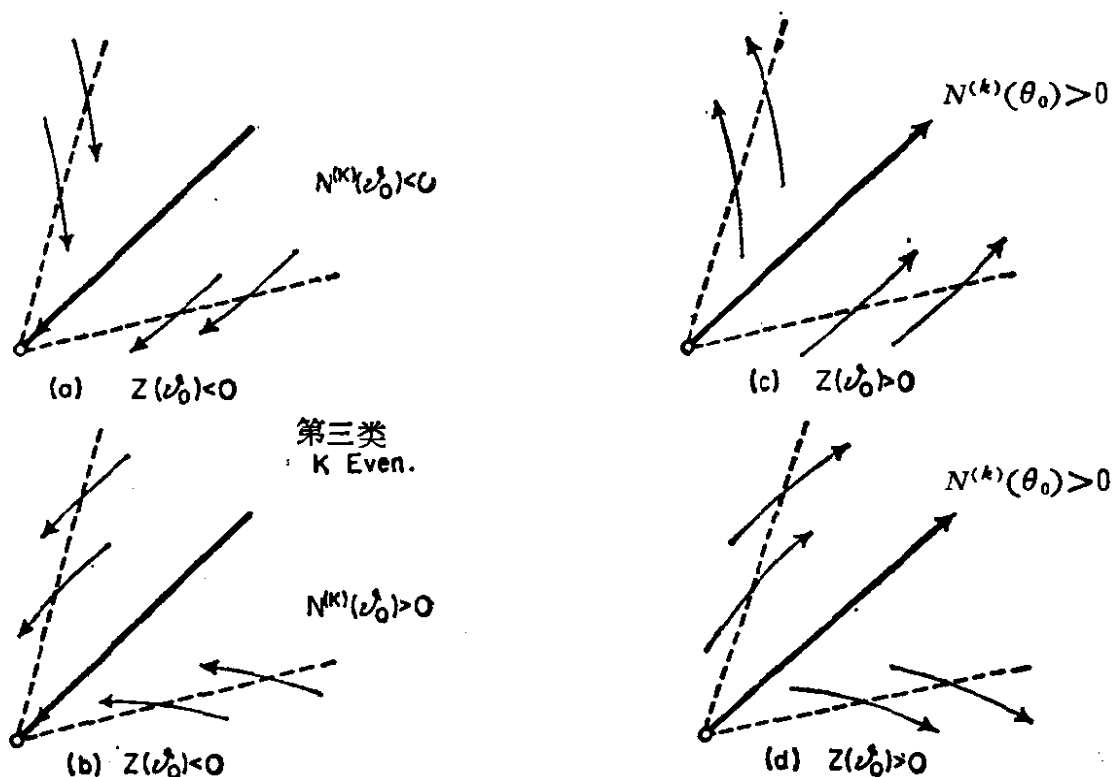


图 16

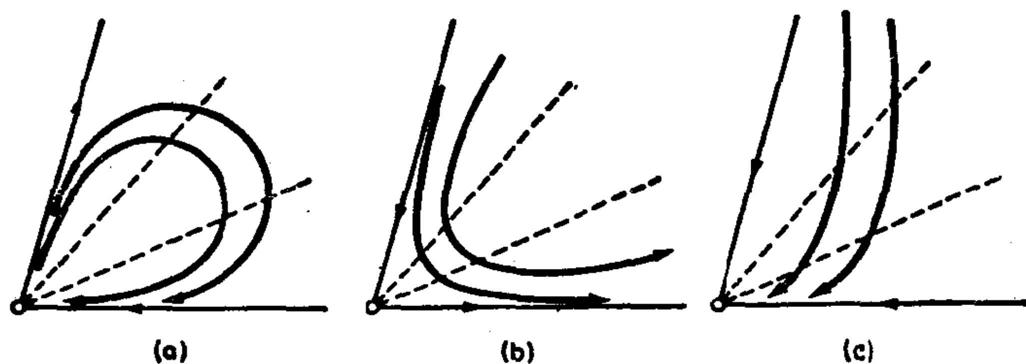


图 17

由射线 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_2$ 所构成的角域中的轨线的性状是前面的图 17(a),(b),(c) 这三种类型之一，其中第一种叫椭圆角域，第二种叫双曲角域,第三种叫抛物角域.

我们指出,§1 所考虑的几个例子中,鞍点有四个双曲角域,双切结点有四个抛物角域.

6. 例子

(a) 作为这一节的结果的第一个应用，让我们继续讨论线性系统

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y, \quad \dot{y} = \gamma x + \delta y.$$

这时 $Z(\theta)$ 与 $N(\theta)$ 为 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的两个二次型

$$Z(\theta) = \alpha\cos^2\theta + (\beta + \gamma)\cos\theta\sin\theta + \delta\sin^2\theta,$$

$$N(\theta) = \gamma\cos^2\theta + (\delta - \alpha)\cos\theta\sin\theta - \beta\sin^2\theta.$$

利用这两个式子以及 (2.2.14)，容易重新建立 §1 中的孤立奇点的分类.

(b) 现在给出几个非线性齐次系统的例子.

系统

$$\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$$

的轨线可由圆族 $x^2 + y^2 + cx = 0$ (c 为常数)得到. 除去点 O 以外,每一个这样的圆都是轨线，两条半轴 $x = 0, y > 0$ 和 $x = 0$, $y < 0$(第一类正规角域中的不变射线)也是轨线,点 O 本身当然也是轨线(图 18).

(c) 另一方面,系统

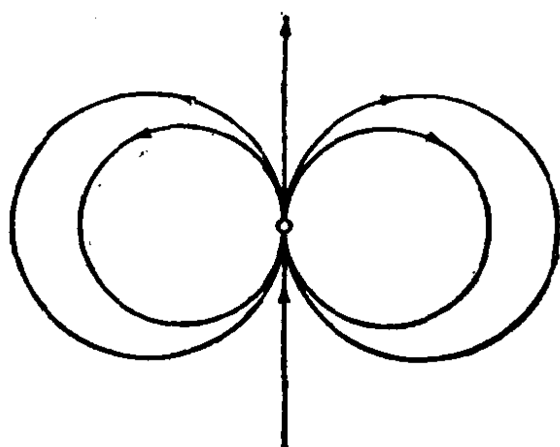
$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 + 2y^2$$

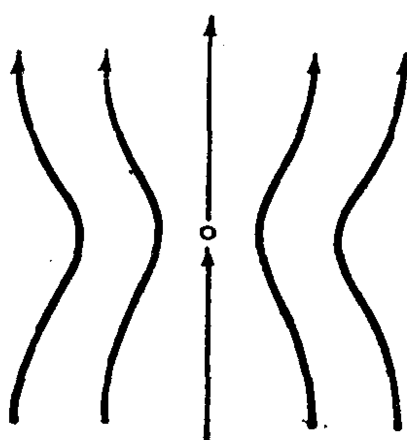
的轨线是四次曲线 $x^4 - c(x^2 + y^2) = 0$ (c 为常数)，以及第二类正规角域中的两条不变射线 $x = 0$, $y > 0$ 和 $x = 0, y < 0$(图 19).

(d)系统

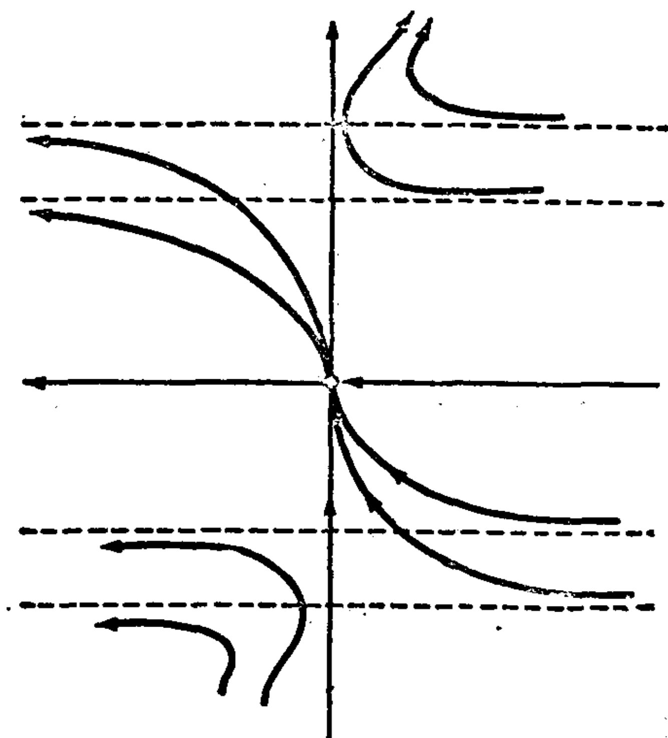
$$\dot{x} = xy - x^2, \quad \dot{y} = y^2$$

的轨线可由方程 $x = y/(\log|y| + c)$ 得到，其中 c 为常数. 这


图 18


图 19

里 $x=0,\ y>0$ 和 $x=0,\ y<0$ 为第三类正规角域中的不变射线；$y=0,\ x>0$ 和 $y=0,\ x<0$ 也是 $Z(0)+N'(0)=0$ 的情形的第二类正规角域中的不变射线（见图 20）. 我们指出，这时存在两个双曲角域（$xy>0$）和两个抛物角域（$xy<0$）.


图 20

(a),(b),(c),(d) 中所考虑的系统都是二次齐次系统（见 L. S. Lyagina [1]）. 下面考虑系统

$\dot{x}=(-3x^4+6x^2y^2+y^4)(x^2+y^2)^{-3/2},\quad \dot{y}=8xy^3(x^2+y^2)^{-3/2},$

其右端在 O 处等于零(由连续性),它是一次齐次系统,但不是线性的. 在极坐标系下这系统变为

$$\dot{\rho} = -3\rho\cos\theta, \quad \dot{\theta} = \sin 3\theta,$$

因此,其轨线由六条射线

$y=0,\ x>0$; $y=0,\ x<0$; $y=\sqrt{3}x,\ x>0$; $y=\sqrt{3}x,\ x<0$; $y=-\sqrt{3}x,\ x>0$; $y=-\sqrt{3}x,\ x<0$ 以及曲线 $\rho\sin 3\theta = c$, 即三次曲线 $y(3x^2-y^2)-c(x^2+y^2)=0$ 所组成,其中 c 为常数.

其正规角域都是第二类的 (图 21),它们共有六个双曲角域.

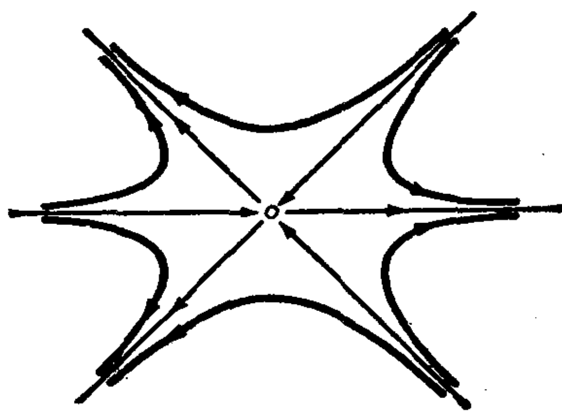


图 21

§3. 解 析 系 统

1. 引言

(a) 在§ 2 考虑的齐次系统中,特别重要的一类是

$$\dot{x} = X_m(x, y), \quad \dot{y} = Y_m(x, y),$$

其中 X_m 与 Y_m 都是 x, y 的 $m \geqslant 1$ 次齐次多项式.

这一节我们将考虑一类更为一般的系统

$$\dot{x} = X_m(x, y) + f(x, y), \quad \dot{y} = Y_m(x, y) + g(x, y), \quad (2.3.1)$$

其中 X_m, Y_m 与上面一样都为齐次多项式,这里

$$f(x, y) = \sum_{i+k>m} a_{i,k}x^i y^k, \quad g(x, y) = \sum_{i+k>m} b_{i,k}x^i y^k \quad (2.3.2)$$

是两个实系数幂级数，它们在以O为圆心，r为半径的圆域D内绝对收敛.

系数 $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ 可以从某个值 $i+k$ 起全为零（对 f, g 值 $i+k$ 不必要求相同）. X_m 或者 Y_m 可恒等于零. 所以这类系统包含了所有右端为多项式的系统，它们可以是齐次的，也可以不是齐次的，次数可以相同，也可以不同.

点O显然是系统 (2.3.1) 的奇点. 现在假定在D内除点O以外，该系统的右端不同时等于零，这一假定等价于有下面不等式:

$$(X_m(x, y)+f(x, y))^2+(Y_m(x, y)+g(x, y))^2>0, \quad 0<x^2+y^2<r^2. \tag{2.3.3}$$

因此，O是一个孤立奇点.

这一节将讨论在这个孤立奇点的邻域内相平面的图形.

(b) 如同§2所用的方法，引入极坐标 ρ, $\theta(x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta)$. 于是系统 (2.3.1) 变为

$$\rho\dot{\rho}=Z(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \quad \rho^2\dot{\theta}=N(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \tag{2.3.4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} Z(x, y)=&\ x[X_m(x, y)+f(x, y)] \\ &+y[Y_m(x, y)+g(x, y)], \\ N(x, y)=&\ x[Y_m(x, y)+g(x, y)] \\ &-y[X_m(x, y)+f(x, y)]. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.5}$$

由 (2.3.3) 得知，在D内所有异于O的点处均有

$$\begin{aligned} Z^2(x, y)&+N^2(x, y) \\ &=(x^2+y^2)\{[X_m(x, y)+f(x, y)]^2 \\ &\quad+[Y_m(x,y)+g(x,y)]^2\}>0. \end{aligned} \tag{2.3.3.1}$$

(c) 由 (2.3.5) 与 (2.3.3) 我们立刻看到，若在D中 $Z(x, y)=0$, 则 $N(x, y)$ 仅在O点处等于零，并且

$$X_m(x, y)+f(x, y)=y(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2y+\cdots),$$

$$Y_m(x, y)+g(x, y)=-x(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2y+\cdots),$$

由 (2.3.3.1)，上两式括号中的因子不恒等于零. 因而这个因子在D内或者恒不为零，或者至多在点O处等于零，亦即 $\alpha_0=0$. 从而

系统 (2.3.1) 的轨线与下面两个系统之一(视 $(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2y+\cdots)$ 的符号而定)的轨线相同(第一章§5.2(e)):

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x.\end{cases}$$

点 O 是**中心**,轨线是以 O 为圆心的一族圆 (§1).

(d) 另一方面,若在 D 内 $N(x, y)=0$, 则 $Z(x, y)$ 仅在 O 处等于零,并且

$$X_m(x, y)+f(x, y)=x(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2y+\cdots),$$
$$Y_m(x, y)+g(x, y)=y(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2y+\cdots).$$

因而 (2.3.1) 的轨线就是下面两个系统之一的轨线:

$$\begin{cases}\dot{x}=-x,\\ \dot{y}=-y;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dot{x}=x,\\ \dot{y}=y.\end{cases}$$

点 O 是**星形结点**(第一种情形为稳定的,第二种情形为不稳定的),轨线都是通过 O 的射线 (§1).

2. 例子

现在我们给出一些例子,说明系统 (2.3.1) 的奇点呈现很大的多样性. 其它的例子还可以在§1 与§2 中找到,但§2.6(e)中的例子除外,它不属于 (2.3.1) 的类型.

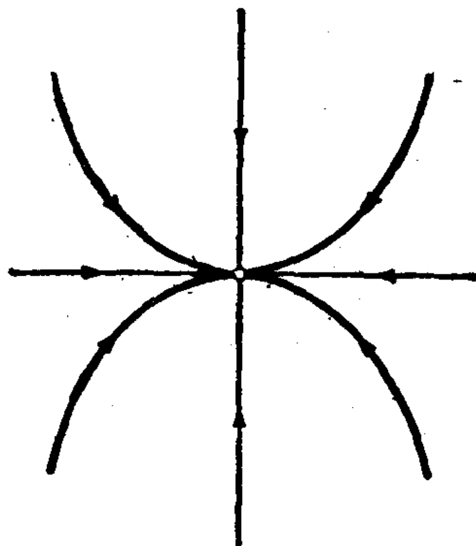


图 22

(a) 系统

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y^3 \tag{2.3.1.1}$$

的轨线除不言而喻的奇点O以外，还有两条射线 $x = 0$，$y > 0$；$x = 0$，$y < 0$ 和曲线弧 $x = c\exp(-1/(2y^2))$，c 为常数. 轨线如图 22 所示，它相当于一个双切结点图形（§ 1）.

(b) 系统

$$\dot{x} = xy(1 + 2x^2 + 2y^2), \quad \dot{y} = y^2 + y^4 - x^4 \tag{2.3.1.2}$$

的轨线是射线 $x = 0$，$y < 0$；$x = 0$，$y > 0$ 和四次曲线 $(x^2 + y^2)^2 - cx^2 + y^2 = 0$（$c$ 为常数）(图 23).

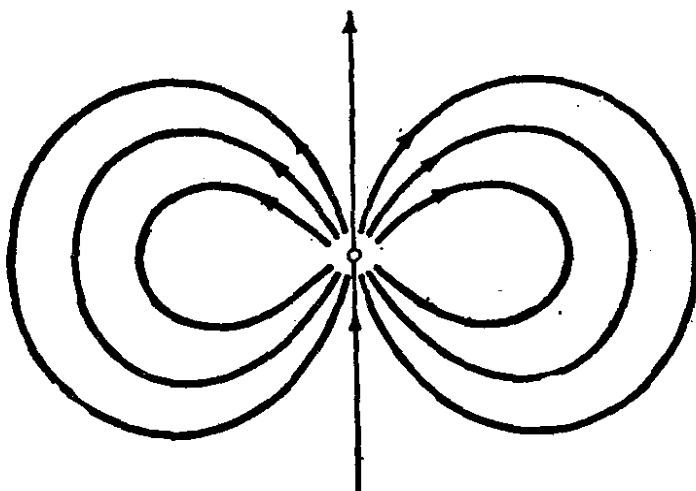


图 23

(c) 系统

$$\dot{x} = x^2y + y(x^2 + y^2)^2, \quad \dot{y} = xy^2 - x(x^2 + y^2)^2 \tag{2.3.1.3}$$

的轨线是四次曲线弧 $(x^2 + y^2)^2 - (1 + c)x^2 - cy^2 = 0$（$c$ 为常

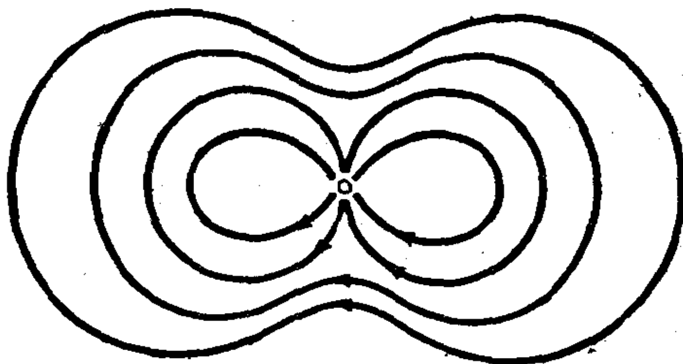


图 24

数)(图 24).

(d) 系统

$$\dot{x}=x, \quad \dot{y}=-y^3 \tag{2.3.1.4}$$

的轨线为点 O 以及四条坐标半轴和曲线弧

$$x=c\exp(1/(2y^2)), \quad c \text{ 为常数},$$

点 O 呈现由齐次系统定义的鞍点的形状(图 25).

(e) 系统

$$\dot{x}=x, \quad \dot{y}=y^2 \tag{2.3.1.5}$$

的轨线是坐标半轴以及曲线弧 $x=c\exp(-1/y)$,c 为常数(图 26).

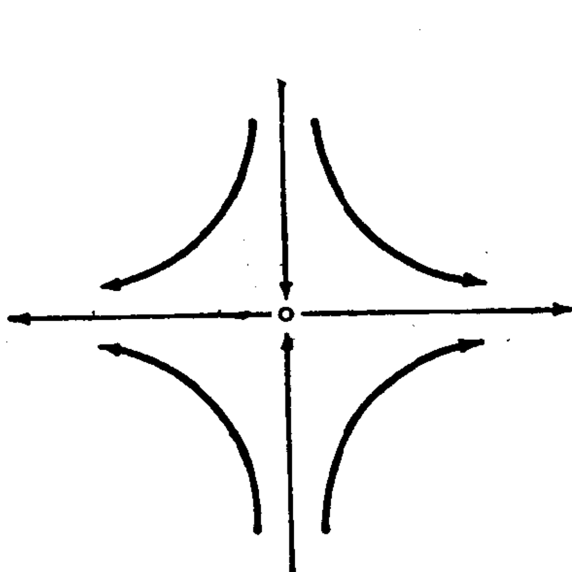


图 25

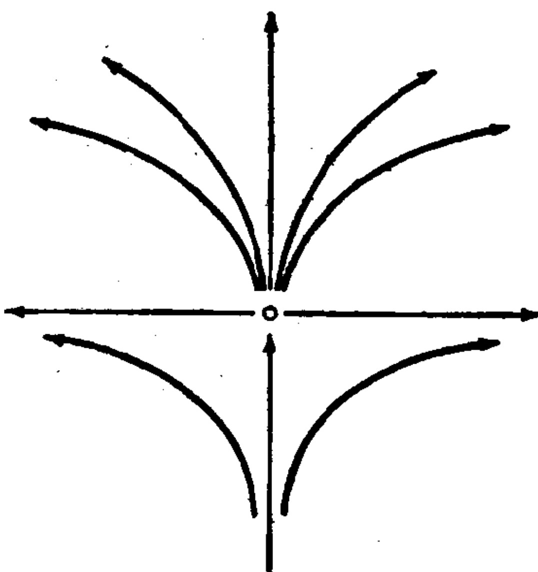


图 26

(f) 系统

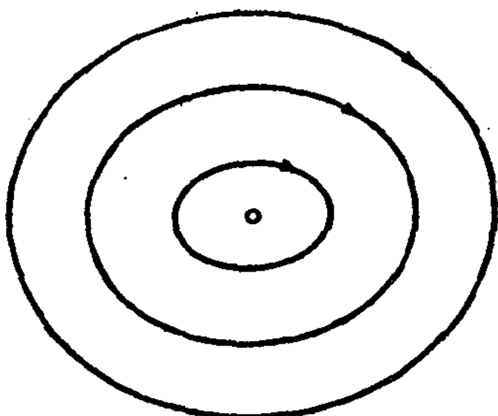
$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-2x^3 \tag{2.3.1.6}$$

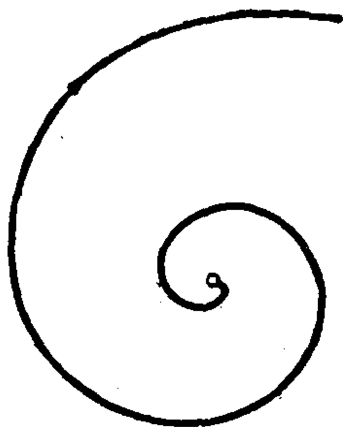
的轨线是四次曲线弧 $x^4+y^4=c$,c 为常数.

这些曲线都是围绕 O 点的闭曲线,亦即都是环,因此假如把对齐次系统(§2)所给的定义,如我们即将要作的那样加以推广的话,点 O 可以称为中心(图 27).

(g) 系统

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-2x^3(x-y)^2 \tag{2.3.1.7}$$


图 27


图 28

的轨线都是从原点 O 展开的螺线，事实上，我们有 $dy^2 = -4x^3 \cdot (x-y)^2 dx$，并且如果我们考虑通过同一点 $(-\alpha, 0)$，$\alpha > 0$ 的两条轨线弧 $y = y(x)$，$z = -z(x)$ $(y(x) \geqslant 0,\ z(x) \geqslant 0)$，则有

$$d(y^2 - z^2)/dx + 4x^3(y^2 - z^2) = 8x^4(y + z),$$

从而

$$y^2 - z^2 = 8e^{-x^4} \int_{-\alpha}^{x} e^{u^4} u^4 [y(u) + z(u)] du.$$

实际上，对 $x > -\alpha$ 直到 $z = -z(x)$ 与正 x 轴的交点为止都有 $y(x) > z(x)$.

适当地推广§1中的定义，我们就可以说点 O 是一个焦点(图 28).

其它一些例子将在以后给出.

3. 函数 $Z(x, y)$，$N(x, y)$

(a) 我们从下面的具实系数 $c_{i,k}$ 的一般级数展开式

$$F(x, y) = \sum_{i+k \geqslant 1} c_{i,k} x^i y^k \tag{2.3.6}$$

开始，它在圆域 $C(O, r)$ 内绝对收敛. 这里对函数 F 所作的假设将在 (b) 中应用于函数 Z 与 N. 下面的论述出自 S. Lefschetz [1] (见 S. Lefschetz [1] 第 61—67 页).

如果 r 充分小，由 Weierstrass 定理（例如参看 S. Bochner 与 W. Martin [1] 第 188 页），我们有

$$F(x, y) = x^q[y^p + \alpha_1(x)y^{p-1} + \cdots + \alpha_p(x)]e^{G(x,y)},$$

其中 p，q 为非负整数，$G(x, y)$ 是 $C(O, r)$ 中的全纯函数，$\alpha_1(x), \cdots, \alpha_p(x)$ 是 $|x| < r$ 中的解析函数(实或复)。

方程 $F(x, y)=0$ 的解是且只是方程 $x^q[y^p+\alpha_1(x)y^{p-1}+\cdots+\alpha_p(x)] = 0$ 的解. 如果后一方程不是恒等式，则除解 $x = 0$ 以外(若 $q>0$)，对充分小的 r，按 Puiseux 定理(可参看 S. Lefshetz, Algebraic geometry, p. 9(1953)) 它有有限个下面类型的解：

$$y = a_k x^{k/n} + a_{k+1}x^{(k+1)/n} + \cdots, \tag{2.3.7}$$

其中 a_k, a_{k+1}, $\cdots$ 都是实数，k, n 为正整数，并且每一个解都对区间$[-r, 0]$或者$[0, r]$内的 x 均有定义. 每一个解(2.3.7)以及当 $q>0$ 时还有 $x=0$, $y>0$, $x=0$, $y<0$ 都称为 $F(x,y)=0$ 的实分支.

我们立刻会看到，$F(x, y)=0$ 的两个不同分支在 $C(O, r)$ 内只有一个公共点 $x=y=0$. 这一事实对于 $x=0$ 的两个分支(若它们存在的话)，或者对于一个是这种分支之一而另一个是(2.3.7)的一个分支，或者对于分别对 $x\geqslant 0$ 和 $x\leqslant 0$ 都有定义的(2.3.7)的两个分支都是显然成立的. 而对于同时定义在 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant 0$ 上的如下类型的两个分支：

$$y = a_k x^{k/n} + a_{k+1}x^{(k+1)/n} + \cdots,$$

$$y = b_{k'} x^{k'/n'} + b_{k'+1}x^{(k'+1)/n'} + \cdots,$$

消去 y 得方程

$$x^{s/(nn')}(c_0 + c_1 x^{1/(nn')} + \cdots) = 0,$$

其中 $c_0 \neq 0$. 这个方程在 $C(O, r)$ 内只有一个解 $x=0$.

进一步还应指出，如果 $F(x, y)$ 不恒等于零，则它只有有限个形如 $x^2+y^2-c^2$(c 为常数)的因子. 因此，如果 r 取得足够地小，则 $F(x, y)$ 的实分支将 $C(O, r)$ 划分成有限个以 O 为顶点的扇形域，每一条从 O 出发的射线与每一个实分支只有有限个交点.

(b) 由方程(2.3.2)和(2.3.5)立刻看到，$Z(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 都是(2.3.6)类型的函数．因此若将上述理论应用到这两个函数上去，则除了在§3.1中已讨论过的恒等于零的情形以外，圆 $C(O,r)$ 被 $N(x,y)=0$ 和 $Z(x,y)=0$ 的分支划分成有限个扇形．在每个 N-扇形(或者 Z-扇形)的内部，函数 $N(x,y)$（或者 $Z(x,y)$）都有确定的符号．

由(2.3.3.1)，一条 Z-分支，亦即 $Z(x,y)=0$ 的实分支与一条 N-分支在 $C(O,r)$ 内只有一个公共点 O．

进一步我们还会看到，Z-分支的每条弧 $\overset{\frown}{OA}$（除去 O）都是一条无切弧[1]．事实上，若 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为 $x=0$，则 $\overset{\frown}{OA}$ 在 O 点的切线方程为 $x=0$．反之，若 $\overset{\frown}{OA}$ 满足(2.3.7)，则 $\overset{\frown}{OA}$ 在 O 点的切线方程当 $k<n$ 时仍是 $x=0$，而当 $k>n$ 时为 $y=0$，当 $k=n$ 时为 $y=a_kx$，$a_k\neq 0$．旋转坐标轴，亦即作 x, y 的适当的线性变换，使得坐标轴都不是任一 Z-分支 $\overset{\frown}{OA}$ 在 O 点的切线．于是，每个 Z-分支都有下面类型的表达式

$$y=mx+ax^{1+1/n}+\cdots. \qquad (2.3.7')$$

这曲线上任一点 P 处的切线的斜率为

$$\mu=m+\left(1+\frac{1}{n}\right)ax^{1/n}+\cdots.$$

由于 $\dot{\rho}=Z=0$，故(2.3.1)的轨线 γ_p 在 P 点的切线与中心在 O 的过 P 点的圆的切线在 P 点互相重合．因此这斜率为 $\mu'=-x/y=-1/(m+ax^{1/n}+\cdots)$．从而 $\mu\mu'=-1+\varepsilon(\rho)$，其中 $\varepsilon(\rho)$ 当 $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$ 为无穷小量时也是无穷小．若 r 充分小，则我们看到，轨线 γ_p 与弧 $\overset{\frown}{OA}$ 在 P 点不相切，从而 $\overset{\frown}{OA}$ 是无切弧．

---

1) 按照 H. Poincaré 的命名(见 Poincaré [1])，弧 γ 称为系统(2.3.1)的无切弧，如果 γ 上无奇点，并且当(2.3.1)的轨线通过 γ 上的任一点时，在此点轨线与 γ 不相切．

由连续性，如果(2.3.1)的轨线当 t 增加时从某个方向穿过 Z-分支的一段弧 $\overset{\frown}{OA}$，则一切其它与 $\overset{\frown}{OA}$ 相交的轨线均以同一方向穿过.

(c) 从现在起，我们所考虑的圆 $C(O, r)$，其中 $N(x, y)$ 的零点(当然假定 $N(x, y)$ 不恒等于零)唯一地属于从 O 出发的 N-分支.

4. 引理

现在来证明下面的引理（第四章将把这里以及下一节的结果推广到比现在所考虑的更为一般的系统中去).

引理 1. 若(2.3.1)的轨线 $\rho = \rho(t)$，$\theta = \theta(t)$ 存在有限的极限 $\rho(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} \rho(t)$，且 $0 \leqslant \rho(+\infty) < r$ (设 $N(x, y)$ 不恒等于零，这里的 r 能使得 $C(O, r)$ 满足§ 3.3 (c) 中的条件)，则极限 $\theta(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$ 存在(有限或无限)(当 $t \to -\infty$ 时显然有类似的结果).

首先考虑 $\rho(+\infty) > 0$ 的情形. 任给 ε，使得 $0 < \varepsilon < r - \rho(+\infty)$. 存在 $\bar{t} > 0$，使得对 $t > \bar{t}$，$|\rho(t) - \rho(+\infty)| < \varepsilon$. 假定 $\theta(t)$ 的极限值多于一个，设 $\theta_1, \theta_2, \theta_1 < \theta_2$ 为这些极限值的两个. 环扇形域 A: $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$、$|\rho - \rho(+\infty)| \leqslant \varepsilon$(图 29(a) 中阴影部分)中至多含有有限个 N-分支 ($N(x, y) \equiv 0$ 的情形已在§ 3.1(d) 中考虑过了)，每个分支与圆 $\rho = \rho(+\infty)$ 至多只有有限个交点. 因此至多除去有限个点以外，包含在 A 中的弧段 $\rho = \rho(+\infty)$ 上的一切点 P 都是某一个 N-扇形域的内点，在这个扇形域中固定一点 P.

在射线 OP 上存在线段 $P'PP''$，其上 $N(x, y)$ 有固定的符号. 不失一般性，设 P 是 $P'PP''$ 的中点，$\overline{P'P''} = 2\varepsilon$. 为清楚起见，可设 ρ, θ 为辅助平面上的直角坐标，于是扇形域变成了图 29(b) 中的阴影区域.

在上述情况下，轨线的象曲线 $\rho = \rho(t)$，$\theta = \theta(t)$ 必定从同

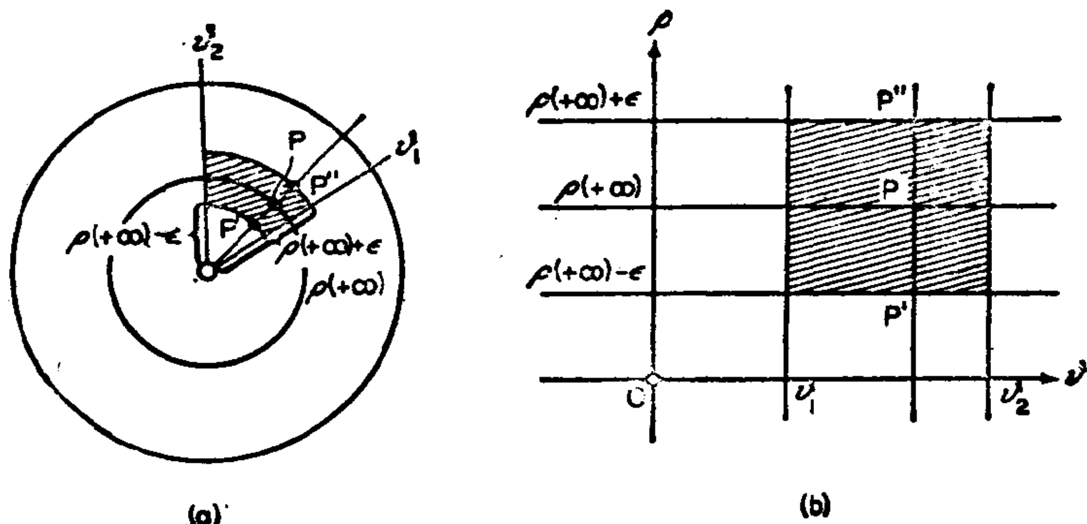


图 29

一方向与线段 $P'PP''$ 相交，譬如说都是从左到右．但对任一 t_0，存在 $\bar{t}>t_0$，使得对应的点能任意接近于直线 $\theta=\theta_1$，也有任意接近于 $\theta=\theta_2$ 的点．又由于如果 $t_0\geqslant\bar{t}$，这曲线就不可能离开介于 $\rho=\rho(+\infty)-\varepsilon$ 和 $\rho=\rho(+\infty)+\varepsilon$ 之间的带域，因而必须从右到左与线段 $P'PP''$ 相交．这是不可能的，因此只能有一个极限．引理得证．

$\rho(+\infty)=0$ 的情况的证明只是上面所证明的一个极限情形．

5. 趋于 O 的轨线．焦点

(a) 考虑系统 (2.3.1) 的譬如当 $t\to+\infty$ 时趋于 O 的轨线 $\rho=\rho(t)$，$\theta=\theta(t)$，这时 $\rho(+\infty)=0$．由上面的引理，$\theta(+\infty)$存在，有限或无限．对后一种情形，可以证明(见第四章§ 3.3)，当 $r>0$ 充分小时，所有从 $C(O,r)$ 中出发的轨线都趋于 O，且所有 $\theta(+\infty)$ 都是同一符号的无穷大．

这时点 O 称为系统 (2.3.1) 的焦点，$\rho(+\infty)=0$ 时为稳定的，$\rho(-\infty)=0$ 时为不稳定的(见§ 1.4；§ 2.3)．

另一方面，如果趋于 O 的轨线有 $\theta(+\infty)=\theta_0$，θ_0 为有限数，我们就得考虑下面的问题：

(i) 由 θ_0 的存在性是否能推知轨线的切线的极限的存在性？

换句话说，通过 O 并以 $\operatorname{tg}\theta_0$ 为斜率的直线是否是轨线切线的极限？

(ii) 我们如何才能确定 θ_0？

下面的引理 2 和引理 3 对这些问题作出了回答。

(b) **引理 2.** 设 $\gamma(t)$ 是系统 (2.3.1) 的趋于 O 的一条轨线，则有限极限 $\theta(+\infty)$ [或者 $\theta(-\infty)$] 的存在性等价于当 $t\to+\infty$ [或者当 $t\to-\infty$] 时轨线 $\gamma(t)$ 的切线的极限的存在性（在第四章§3.2 中，我们还将遇到比这里考虑的系统更为一般的系统，那里 $\theta(+\infty)$ 可以存在有限极限，但是切线可以不存在有限极限）。

为了证明这条引理，我们首先指出，切线极限的存在性等价于 $\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$，$\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}$ 有限极限的存在性。这也就是说 $\dot{y}/\dot{x}$ 存在有限极限或无限极限。

若 $\dot{y}/\dot{x}$ 的极限存在，则由 L'Hôpital 法则，y/x 的极限即 $\lim \operatorname{tg}\theta(t)$ 也存在，从而 $\theta(+\infty)$ 存在。现在假定 (2.3.1) 的趋于 O 的轨线其 $\theta(+\infty)=\theta_0$ 存在且有限。

如果对 θ_0，$X_m(\cos\theta, \sin\theta)$，$Y_m(\cos\theta, \sin\theta)$ 不同时为零，则当 $\theta\to\theta_0$ 时或者 X_m/Y_m 有有限极限，或者 Y_m/X_m 有有限极限。例如，在后一种情形，则由 (2.3.2) 我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{Y_m(\cos\theta(t), \sin\theta(t))}{X_m(\cos\theta(t), \sin\theta(t))}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{Y_m(\cos\theta(t), \sin\theta(t))+\rho^{-m}(t)\sum\limits_{i+k>m} b_{i,k}x^i(t)y^k(t)}{X_m(\cos\theta(t), \sin\theta(t))+\rho^{-m}(t)\sum\limits_{i+k>m} a_{i,k}x^i(t)y^k(t)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.^{*)}$$

---

*) 原书为 $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\dfrac{Y_m(\cos\theta, \sin\theta)}{X_m(\cos\theta, \sin\theta)}$

$$=\lim_{\theta\to\theta_0}\frac{Y_m(\cos\theta, \sin\theta)+\rho^{-m}\sum\limits_{i+k>m} b_{i,k}x^iy^k}{X_m(\cos\theta, \sin\theta)+\rho^{-m}\sum\limits_{i+k>m} a_{i,k}x^iy^k}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$ ——译者注

另一方面,若

$$X_m(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0) = Y_m(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0) = 0,$$

则

$$X_m(\cos\theta,\ \sin\theta) = (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^p A_{m-p}(\cos\theta,\ \sin\theta),$$

$$Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta) = (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^q B_{m-q}(\cos\theta,\ \sin\theta)^{*)},$$

这里 p, q 是整数,

$$p \leqslant m,\ q \leqslant m,\ A_{m-p}(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0) \neq 0,$$

$$B_{m-q}(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0) \neq 0.$$

例如,若 $p \leqslant q$, 则上面的关系式成立;反之,若 $q < p$, 那我们就考虑 $\lim X_m/Y_m$.

(c) 若轨线 $\gamma(t)$ 趋于 O,且同时有 $\theta(+\infty) = \theta_0$, θ_0 为有限数,则有

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}} = \cos\theta_0,\ \lim_{t\to+\infty} \dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}} = \sin\theta_0, \quad (2.3.8)$$

又由 (2.3.2),沿着 $\gamma(t)$ 我们有

$$\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}} \left[Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta) + \rho^{-m} \sum_{i+k>m} b_{i,k} x^i y^k\right]$$

$$- \dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}} \left[X_m(\cos\theta,\ \sin\theta) + \rho^{-m} \sum_{i+k>m} a_{i,k} x^i y^k\right] = 0,$$

当 $t \to +\infty$ 时得

引理 3. 如果我们取

$$N(\theta) = \cos\theta Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta) - \sin\theta X_m(\cos\theta,\ \sin\theta), \quad (2.3.9)$$

则对系统 (2.3.1) 的每条趋于 O 的轨线,若同时有 $\theta(+\infty) = \theta_0$, 或 $\theta(-\infty) = \theta_0$($\theta_0$ 为有限数),那么 θ_0 一定是方程

$$N(\theta) = 0 \quad (2.3.10)$$

的根

---

*) 原书这两式为

$$X_m(\cos\theta,\ \sin\theta) = (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)A_{m-p}(\cos\theta,\ \sin\theta),$$

$$Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta) = (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)B_{m-q}(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

——译者注

6. 方程 $N(\theta)=0$. 临界点

(a) 对系统 (2.3.1) 的研究，主要困难之一是确定是否存在趋于 O 的轨线，若有的话我们要问 O 是否是焦点?

对于齐次系统来说，我们知道这个问题可由检查方程 $N(\theta)=0$ 有无实根而立刻得到解决. 事实上，如果这方程有实根，则对其中的每一个根相应地至少有一对趋于 O 的轨线(不变射线);反之，O 只可能是中心或焦点，并且我们已经知道如何去区分这两种情况.

但是另一方面，对系统 (2.3.1) 来说，方程 $N(\theta)=0$ 并不给我们提供多少资料，因为由方程 $N(\theta)=0$ 的一个实根 θ_0 的存在性并非总能够推得同时有 $\theta(+\infty)=\theta_0$ 或者 $\theta(-\infty)=\theta_0$ 的趋于 O 的轨线的存在性.

这可以从§ 3.2 的例 2,3,6,7 得知，在例 2，3 中，尽管 $N(\theta)\equiv 0$，但并不存在沿 x 轴方向趋于 O 的轨线 (例 3 中不存在沿着 y 轴方向趋于 O 的轨线). 在例 6，7 中我们有 $N(\theta)=-\cos\theta\sin\theta$，但是，我们看到这两个例子中，或者不存在趋于 O 的轨线 (例 6)，或者趋于 O 的轨线并无确定的切线 (例 7).

(b) 为了确定是否存在沿确定的方向有趋于 O 的轨线，就必须代替 $N(\theta)$ 而研究 $N(x, y)$ 的性态. 对这种情况的彻底研究，读者可参看 H. Dulac 的文章 [1].

尽管如此，至少有两种情况我们可以由 $N(\theta)$ 得到所要求的回答，即 $N(\theta)$ 无实根的情形和恒等于零的情形，对第一种情形，我们将在§ 8 中看到，这时或者不存在趋于 O 的轨线，或者 O 是一个焦点;对第二种情形，O 称为**临界点**(参看 H. Dulac [1] 第 133 页)，临界点包括星形结点和前面例 2，例 3 中所指的那种奇点.

(c) 现在设 $N(\theta)\equiv 0$. 我们已经注意到 (§ 2.2(c)) 这时有

$$X_m(x, y)=xA_{m-1}(x, y),\quad Y_m(x, y)=yA_{m-1}(x, y),\qquad (2.3.11)$$

其中 $A_{m-1}(x, y)$ 是不恒等于零的齐次多项式. 因为否则，X_m，Y_m 都恒等于零，这与§ 3.1 中的假设相矛盾，因此方程

$$A_{m-1}(1, v) = 0 \tag{2.3.12}$$

至多有 $m-1$ 个实根.

Briot-Bouquet 的经典论文 [1] 可以作为研究非线性微分方程解析理论的出发点.

我们用 Briot-Bouquet [1] 引用的变换

$$u = x, \quad v = y/x \tag{2.3.13}$$

将 x, y 平面变到 u, v 平面，这是一个二次变换，它将 O 的邻域变成沿直线 $u=0$ 的邻域. 由 (2.3.13)，我们在 x, y 平面上的以 O 为中心的直线束与 $u=0$ 上的点之间建立了一个一一对应(这是一个射影性质).

由 (2.3.11) 和 (2.3.13)，系统 (2.3.1) 的解变为系统

$$\dot{u} = u^m \left[A_{m-1}(1, v) + \sum_{i+k>m} a_{i,k} u^{i+k-m} v^k\right],$$

$$\dot{v} = u^m \left[\sum_{i+k>m} b_{i,k} u^{i+k-m-1} v^k - v \sum_{i+k>m} a_{i,k} u^{i+k-m-1} v^k\right]$$

的解，(2.3.1) 的轨线变成上面系统的轨线. 因此，当 $u \neq 0$ 时它们又变成系统

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_{m-1}(1, v) + \sum_{i+k>m} a_{i,k} u^{i+k-m} v^k, \\ \dot{v} &= \sum_{i+k>m} b_{i,k} u^{i+k-m-1} v^k - v \sum_{i+k>m} a_{i,k} u^{i+k-m-1} v^k \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

的轨线(第一章§ 5.2(e)).

现在假设$(0, \bar{v})$是直线 $u=0$ 上的一点，在 $(u, \bar{v}) = (0, \bar{v})$ 处，(2.3.14)的右端不等于零. 于是 (2.3.14) 的通过这一点的轨线只有一条. 由于 $\dot{u} \neq 0$，故这条轨线与直线 $u=0$ 相交. 如果我们由 (2.3.13) 回到原先的系统 (2.3.1)，则存在一条当 $t \to +\infty$ (或者 $t \to -\infty$)时趋于 O 且成立着 $y(t)/x(t) \to \bar{v}$ 的轨线 $x(t)$, $y(t)$，其中 $x(t) > 0$；对 $x(t) < 0$，我们也有使同样关系式成立的第二条轨线.

由于在点$(0, \bar{v})$处，(2.3.14) 的右端仅当 $\bar{v}$ 是 (2.3.12) 的根时才可能等于零，亦即至多只有有限个 $\bar{v}$ 值使得 (2.3.14) 的右端等于零．从而我们有下面的定理．

定理 9. 若 O 是系统 (2.3.1) 的临界点，即 $N(\theta)$ (由(2.3.9)定义)恒等于零，则对每一条从 O 出发的射线，系统 (2.3.1) 相应地有且仅有一条轨线趋于 O，其(定向)切线趋于这条射线，至多有有限个对应于 (2.3.12) 的根的那些射线是例外．

我们指出，若 $m=1$，则多项式 $A_{m-1}(x, y)$ 退化为一常数，故每一射线只对应于一条轨线，无一例外．

(d) 现在我们假设 $\bar{v}$ 是方程 (2.3.12) 的一个根，则在点 $(0, \bar{v})$ 处系统 (2.3.14) 的第一个方程的右端等于零．

系统 (2.3.14) 的第二个方程的右端在$(0, \bar{v})$处有可能不等于零，从而 (2.3.14) 只有一条轨线通过 $(0, \bar{v})$．由于 $\dot{u}=0$，轨线切于 $u=0$．若这切点是轨线的拐点，如前，我们就有两条 (2.3.1) 的趋于 O 的轨线，一条保持 $x>0$，另一条保持 $x<0$，沿着这些轨线 y/x 和 $\dot{y}/\dot{x}$ 都趋于 $\bar{v}$．反之，(2.3.14) 的轨线就要停留在例如半平面 $u>0$ 中的 $(0, \bar{v})$ 的邻域内，(2.3.1) 就只有一条趋于 O 的轨线(保持 $x>0$)，使得 y/x 和 $\dot{y}/\dot{x}$ 都趋于 $\bar{v}$．

(e) 最后，若 $\bar{v}$ 是 (2.3.12) 的一个根，并且 (2.3.14) 中的两个方程的右端在点 $(0, \bar{v})$ 处都等于零，则 $(0, \bar{v})$ 是系统 (2.3.14) 的一个奇点．以 $v-\bar{v}$ 代替 v，就得到系统

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= U_{m'}(u, v) + \sum_{i+k>m'} c_{i,k} u^i v^k, \\
\dot{v} &= V_{m'}(u, v) + \sum_{i+k>m'} d_{i,k} u^i v^k,
\end{aligned}
\tag{2.3.15}
$$

这是与 (2.3.1) 相同类型的系统，只不过这里的 $U_{m'}$, $V_{m'}$ 是 m' 次齐次多项式，m' 至多等于 $m-1$．

现在让我们考虑对应于这个系统的 $N(\theta)$．如果 $N(\theta)$ 不恒等于零，这就必须考虑新系统的奇点的特性(参看下一节)．如果 $N(\theta)$ 恒等于零，我们就重复上面的步骤．如果再出现 $N(\theta)$ 恒

等于零，则这种步骤经有限次后即可停止，这是因为每作一步(2.3.15)中的$U_{m'}$，$V_{m'}$的次数至少降低一次.

也应该指出，由方程(2.3.13)我们并不能断定是否存在沿着两条射线 $x=0,\ y>0$；$x=0,\ y<0$ 之一而趋于O的轨线，这两条射线依次对应于点$u=0,\ v=+\infty$和$u=0,\ v=-\infty$. 在这种情况下，我们应以变换 $u=y,\ v=x/y$ 来代替(2.3.13).

7. 对 $Z(x,y)$ 的研究，$Z(x,y)$ 定号的情形

对Z的性态的研究在许多场合能够解决趋于O的轨线的存在性问题. 在§3.8中我们将研究 Z-分支（即 $Z(x,y)=0$ 的实分支）的情形；这里我们考虑Z在圆域 $C(O,r)$ 内是定号的情形，亦即r充分小，使得 $C(O,r)$ 内无Z-分支. 可设 $Z(x,y)<0$，否则将t改为$-t$.

这一节的论证对于Z变为零但不变号，即存在偶重的Z-分支的情形也是成立的.

设P是圆周 $C(O,r)$上任一点，由于 $\rho\dot{\rho}=Z$，正半轨 $\gamma_P^+(t)$（第一章 §5.2）必须进入 $C(O,r)$，因此 $\rho(t)$ 是t的单调减函数. 又因 $\gamma_P^+(t)$ 不会离开 $C(O,r)$，故 $\rho(+\infty)$ 存在，且 $0\leqslant\rho(+\infty)<r$，由引理1得知$\theta(+\infty)$也存在，有限或无限.

但是，如果 $\theta(+\infty)$ 为有限数，则 $\rho(+\infty)$ 就不可能 >0，因为否则，异于O的点 $(\rho(+\infty),\theta(+\infty))$ 就会是奇点（第一章§5.3(b)），而这与O是孤立奇点的假设相矛盾. $\rho(+\infty)>0$，$\theta(+\infty)$为无穷的情形也是不可能的，因为γ_P^+不可能在圆周 $\rho=\rho(+\infty)$ 以外绕此圆无限多次而渐近趋于它，否则从圆 $\rho=\rho(+\infty)$ 上任一点出发的负半轨在此圆外必与γ_P^+相交，这与解的唯一性相矛盾，从而 $\rho(+\infty)=0$.

由于P是圆周$\rho=r$上任意一点，而对任一圆 $\rho=\bar{r}$，$\bar{r}<r$ 也可以重复上面的论证，故若在 $C(O,r)$ 内 $Z(x,y)<0$（O除外），则**一切轨线**当 $t\to+\infty$ 时**都趋于** O ($\rho(+\infty)=0$)，因而O称为**稳定点**.

反之，若 $Z(x,y)>0$，则当 $t\to-\infty$ 时一切轨线趋于 O $(\rho(-\infty)=0)$，于是 O 称为不稳定点．稳定点与不稳定点的例子我们已在§1，§2 和§3.2 中给出过（试比较这些定义与第五章§2.3 中吸引点的定义）．

我们指出，如果对一条轨线 γ，$\theta(+\infty)$ 为有限数 [$\theta(-\infty)$ 为有限数]，则对一切其它轨线当 $t\to+\infty$ [$t\to-\infty$] 时亦有同样的结论．事实上，若有轨线其 $\theta(+\infty)$ 为无穷 [$\theta(-\infty)$ 为无穷]，则它必与 γ 相交，因此，若在 $C(O,r)$ 内 $Z(x,y)<O$ [或者 $Z(x,y)>0$]，则对一切轨线，$\theta(+\infty)$ [或者 $\theta(-\infty)$] 或者为有限，或者为无穷，这后一种情形，O 称为焦点（§3.5(a)）．

8. Z-扇形域的分类

(a) 当 $Z(x,y)$ 在 $C(O,r)$ 内变号时，为方便起见，我们就在不同的 Z-扇形域内考察轨线的性态．把每个扇形域内所有的情况合并起来，常常可以确定在整个 $C(O,r)$ 内轨线的性态．

按照§3.7 所做的，若 OAB 是由 $C(O,r)$ 的一段弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所围的一个 Z-扇形域*)，且在其内部 $Z(x,y)<0$（若有必要可改 t 为 $-t$，因此，这假设总是成立的）．则我们可以断言，通过 $\overset{\frown}{AB}$ 上任一点的正半轨 γ_P^+ 都进入扇形域 OAB．通过无切弧 $\overset{\frown}{OA}$（§3.3(b)）上一点 P 的轨线 γ_P 与 $\overset{\frown}{OA}$ 相交，并且若 $N(x,y)<0$，则 γ_P^+ 在 $\overset{\frown}{OA}$ 上进入 OAB，或者若 $N(x,y)>0$，γ_P^- 在此弧段上进入 OAB．

由此，我们可以给出如图 30(a)，(b)，(c)，(d) 所示的轨线的各种不同的性态．

我们将称图 30(a) 为情形 α；图 30(b) 为情形 β；图 30(c) 与

---

*) 精确地讲，是由 $C(O,r)$ 的一段弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和两条 Z-分支所围的区域．——译者注

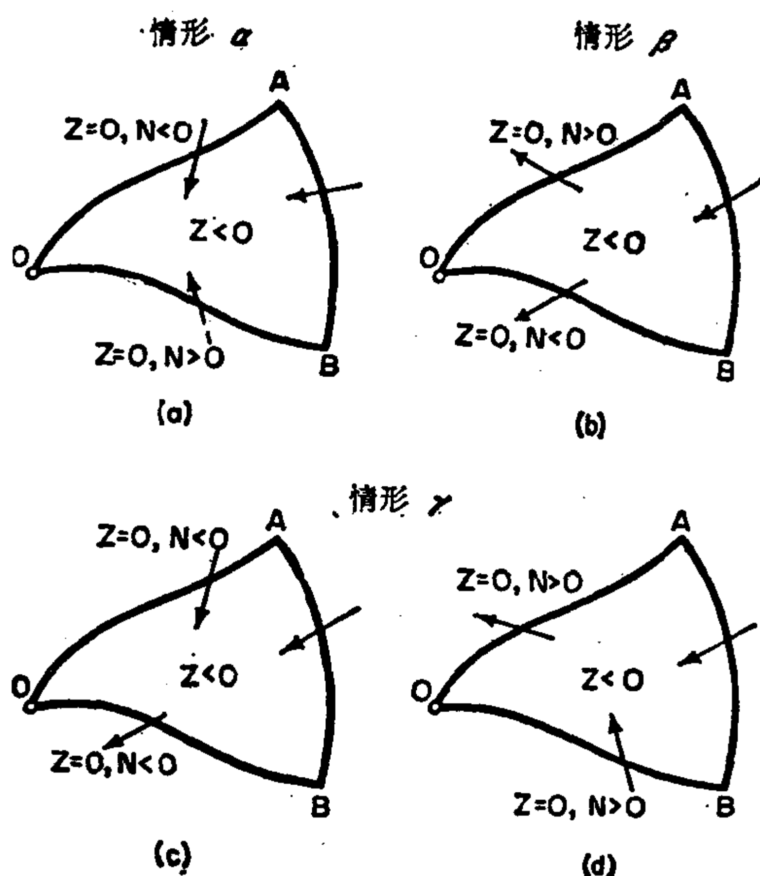


图 30

(d) 为情形 γ.

(b) 在情形 α, 通过 OAB 边界上任一异于 O 的点 P 的每一条轨线都进入 Z-扇形域且不可能再离开它；又 $\rho(t)$ 为单调函数，故 $\rho(+\infty)$ 存在，由引理 1，$\theta(+\infty)$ 也存在且必为有限，由此 $\rho(+\infty)=0$. 因为否则，在 OAB 内就会存在异于 O 的奇点(第一章§ 5.3(b)). 因而在情形 α，一切轨线都趋于 O，并且 $\theta(t)$ 必趋于一有限极限.

§ 2.6 的例子 (b) 中有两个 Z-扇形域，它们都是 α 情形 $[Z=y(x^2+y^2)]$，这两个扇形域中的所有轨线都以同一方向趋于 O. 另一方面，在§ 3.2 的例 2 中，我们也有两个属于 α 情形的 Z-扇形域 $[Z=y(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)]$，不过那里的轨线是沿着不同方向趋于 O 的.

(c) 在情形 β，通过 $\widehat{AB}$ 上一点 P 的轨线 γ_P^+ 就有两种可能

性：一种是经有限时间它与 $\widehat{OA}$ 或 $\widehat{OB}$ 相交而后就离开了 OAB；另一种是当 $t\to+\infty$ 时它仍停留在 OAB 中．在这后一种情形，根据与 (b) 一样的论证可知轨线趋于 O．容易看出，在情形 β，至少有一条轨线趋于 O，并且 $\theta(t)$ 必有有限极限．

事实上，若 γ_P^- 是从 $\widehat{OA}$ 上 P 点出发的一条负半轨，则当 $t\to-\infty$ 时它就不可能停留在 OAB 中，因为否则 $\rho(-\infty)>0$ 存在，由引理 1，$\theta(+\infty)$ 也有限，从而在 OAB 内有异于 O 的奇点．因此经有限时间它要离开 OAB，设与 $\widehat{AB}$ 相交于点 P'．令 Q 为 $\widehat{AB}$ 上位于 P 与 A 之间的一点，则 γ_Q^- 与 $\widehat{AB}$ 相交于 P' 与 A 之间的点 Q' 而后就离开了这扇形．类似地，若 P 属于 $\widehat{OB}$，则 γ_P^- 经有限时间与 $\widehat{AB}$ 相交于 P'' 而后就离开了扇形 OAB．假设 θ 沿着 $\widehat{AB}$ 逆时针增加，M' 是 P' 的下极限，M'' 为 P'' 的上极限，则有两种情况，如图 31(a)，(b) 所示．

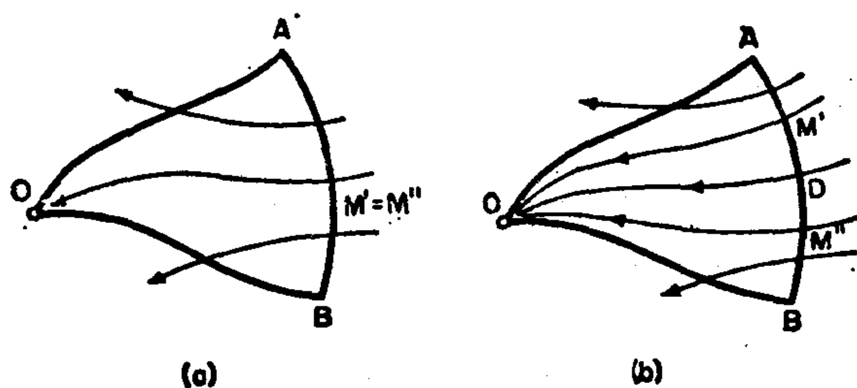


图 31

这两种可能性是：或者 $M'=M''$，这时 $\gamma_{M'}^+=\gamma_{M''}^+$ 而趋于 O；或者 $M'\neq M''$，这时对 $\widehat{AB}$ 上 M' 与 M'' 之间的任一点 D 都有 γ_D^+ 趋于 O，因为 γ_D^+ 必须停留在 OAB 内．

以上这两种情况实际上都可能出现．在§3.2的例 4 中有四个 Z-扇形域（$Z=x^2-y^4$），它们都是我们所考虑的 β 情形，每个扇形域中只有一条轨线趋于 O；§1 中的鞍点也是这种情形．另一

方面，在§3.2的例5中，有两个同为β情形的扇形域（$Z = x^2 + y^3$），其中之一其内部只有一条轨线趋于O，而另一个其内部则有无穷多条轨线趋于O，这无穷多条轨线中有两条是半轴$y = 0$，$x \gtrless 0$，而其余的轨线的切线都趋于y轴.

(d) 对情形(γ)，我们仅考虑图30(c)，30(d)与这种情形相对称.这里我们又有如图32(a)与32(b)所示的两种情况.

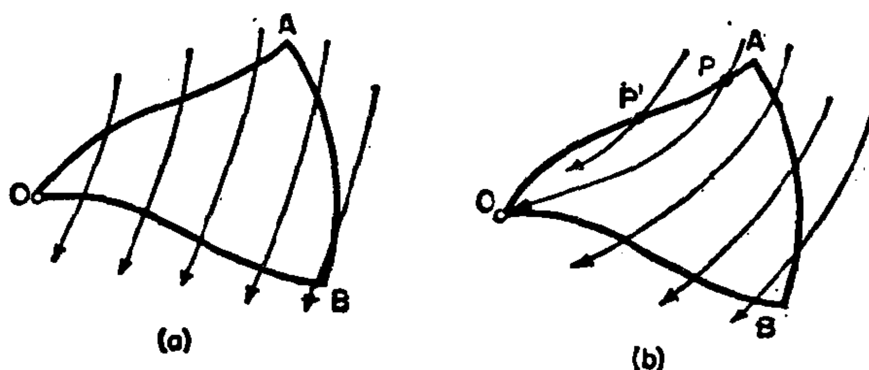


图 32

现在的这两种可能性是：或者每条轨线在OAB中只停留有限时间(情形γ')，或者轨线中有一条当$t \to +\infty$时一直停留在OAB之中，因而根据和上面相同的推证，它要趋于O（情形γ''）.对后一种情况，趋于O的轨线γ_P^+可能是从$\overset{\frown}{OA}$上一点P出发的，也可能是从$\overset{\frown}{AB}$上一点出发的. 对于前者，设P'是OP间的一点；对于后者，设P'是OA上一点或者甚至是$\overset{\frown}{AB}$上A与P之间的点，不管哪种情况，这时$\gamma_{P'}^{+}$*) 都趋于O.

§3.2中的例6和例7为情形γ'的例子，例3则为情形γ''的例子.

(e) 如果所有的Z-扇形域都是属于情形γ'（图32(a)），则或者存在趋于O的轨线，这时$\theta(+\infty)$(或者$\theta(-\infty)$)必为无穷，取适当的O邻域，可以证明所有的轨线都是如此（第五章§3.3），点O是焦点；或者没有轨线趋于O，可以证明这时点O是中心（见

*) 原书为γ_P.——译者注

Dulac [1] 第 179—180 页)，也就是说，O 是以任意小的直径的环的内点，并且存在圆 $C(O, r)$，其中一切点都属于这些环.

定理 10. 若系统 (2.3.1) 没有趋于 O 的轨线，则点 O 是中心.

下一节我们将就 $N(\theta) \neq 0$ 的情况来证明这个定理.

§4. 中 心 问 题

1. 中心问题

我们再来讨论§ 3.1 中考虑过的系统

$$\dot{x} = X_m(x, y) + f(x, y), \quad \dot{y} = Y_m(x, y) + g(x, y), \quad (2.4.1)$$

同前面一样，假设 $X_m(x, y)$, $Y_m(x, y)$ 为 x, y 的 $m \geqslant 1$ 次齐次多项式. 实系数的级数

$$f(x, y) = \sum_{i+k>m} a_{i,k} x^i y^k, \quad g(x, y) = \sum_{i+k>m} b_{i,k} x^i y^k \quad (2.4.2)$$

在以 O 为圆心、r 为半径的圆域 $C(O, r)$ 内绝对收敛.

我们要问，在什么条件下不存在趋于孤立奇点 O 的轨线 (由§ 3 中的分析指出，要使这种情况发生，$Z(x, y)$ 必须恒等于零，或者 $Z(x, y)$ 变号但一切 Z-扇形域都属于 γ' 情形(图 32(a))). 如我们在上节末尾所说，这等价于 O 是中心，亦即对充分小的 $r > 0$，通过圆 $C(O, r)$ 内的所有轨线都是围绕 O 点的环. 我们打算解决的这个问题，等价于对系统 (2.4.1) 寻求 O 是中心的条件——(中心问题).

这个问题是很难解决的，但是对于下面将要考虑的特殊的然而也是很重要的情况来说，已完全得到了解决. 我们还将提到与这个问题有关的其它问题 (本节所讨论的这个问题与所谓由一次近似决定稳定性的临界情形有关，这种临界情形将在第九章中给予说明).

2. $N(\theta) \neq 0$ 时的中心问题

(a) 设多项式 $xY_m(x, y) - yX_m(x, y)$ 无实线性因子. 如

果变换成极坐标 ρ, θ，并且采用 §3 中的记号，这就等价于假设方程 $N(\theta)=0$ 无实根，其中

$$N(\theta)=\cos\theta Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta)-\sin\theta X_m(\cos\theta,\ \sin\theta).\quad(2.4.3.1)$$

若令

$$Z(\theta)=\cos\theta X_m(\cos\theta,\ \sin\theta)+\sin\theta Y_m(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad(2.4.3.2)$$

则有(参看§ 3.1)

$$\dot\rho=\rho^m\{Z(\theta)+\rho P(\rho,\theta)\},\quad \rho\dot\theta=\rho^m\{N(\theta)+\rho Q(\rho,\theta)\}^{*)},\quad(2.4.4)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}P(\rho,\theta)&=\sum_{i+k>m}\rho^{i+k-m-1}[a_{i,k}\cos\theta+b_{i,k}\sin\theta]\cos^i\theta\sin^k\theta,\\ Q(\rho,\theta)&=\sum_{i+k>m}\rho^{i+k-m-1}[b_{i,k}\cos\theta-a_{i,k}\sin\theta]\cos^i\theta\sin^k\theta,\end{aligned}\right\}(2.4.5)$$

由此得知，若 ρ 充分小，则 $\dot\theta$ 保持与 $N(\theta)$ 同号，并且对充分小的 r，每一条轨线，当其仍属于 $C(O,\ r)$ 时，都可以表示为 $\rho=\rho(\theta)$ 的形式，其中 $\rho(\theta)$ 是方程

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\rho\frac{Z(\theta)+\rho P(\rho,\theta)}{N(\theta)+\rho Q(\rho,\theta)}\quad(2.4.6)$$

的解．由 §3 引理 3 知道，在 $N(\theta)\neq 0$ 的假设下，不可能有以给定的切线方向趋于 O 的轨线，因此这时的中心问题是要确定何时 O 为中心，何时 O 为焦点(§3.5)．

当 $P(\rho,\theta)$，$Q(\rho,\theta)$ 恒等于零时，这个问题我们已在 §2 中完全解决了(齐次系统)．因此我们现在必须处理 $P(\rho,\theta)$，$Q(\rho,\theta)$ 是由 (2.4.5) 所定义的在 $C(O,\ r)$ 内绝对收敛的幂级数的情形．

由假定，$N(\theta)\neq 0$，故可将函数 $1/[N(\theta)+\rho Q(\rho,\theta)]$ 展为 ρ 的幂级数，代入 (2.4.6) 得到

$$d\rho/d\theta=\rho V_1(\theta)+\rho^2V_2(\theta)+\cdots+\rho^nV_n(\theta)+\cdots,\quad(2.4.7)$$

其中 $V_n(\theta)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的有理函数．

---

*) 原书这两个式子为 $\rho\dot\rho=\rho^m\{Z(\theta)+\rho P(\rho,\theta)\}$，$\rho^2\dot\theta=\rho^m\{N(\theta)+\rho Q(\rho,\theta)\}$．——译者注

特别是，对 $V_1(\theta)$ 我们有

$$V_1(\theta) = Z(\theta)/N(\theta). \tag{2.4.8}$$

设 $\rho = \rho(\theta, \rho_0)$ 是方程(2.4.6)的满足初值条件

$$\rho(0, \theta) = \rho_0 \qquad (0 < \rho_0 < r) \tag{2.4.9}$$

的解.

由熟知的解关于初值解析的定理(见 G. Sansone [1] 第 127 页)，$\rho(\theta, \rho_0)$ 可展为参数 ρ_0 的全纯函数，故可令

$$\rho(\theta, \rho_0) = \rho_0 u_1(\theta) + \rho_0^2 u_2(\theta) + \cdots + \rho_0^\nu u_\nu(\theta) + \cdots \tag{2.4.10}$$

$$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \rho_0 \leqslant r).$$

由(2.4.9)即得

$$u_1(0) = 1, \ u_\nu(0) = 0, \ \nu = 2, 3, \cdots \tag{2.4.11}$$

级数(2.4.10)是在关于 ρ_0 和 θ 的二重级数中归并 ρ_0 的同次幂后而得到的，将(2.4.10)关于 θ 逐次求导并代入(2.4.7)，即得

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \rho_0^\nu du_\nu(\theta)/d\theta = \sum_{h=1}^{\infty} V_h(\theta) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \rho_0^k u_k(\theta)\right]^h,$$

使左右两端恒等，即得

$$\left.\begin{aligned} &du_1/d\theta = u_1 V_1(\theta), \\ &du_2/d\theta = u_2 V_1(\theta) + u_1^2 V_2(\theta), \\ &du_3/d\theta = u_3 V_1(\theta) + 2u_1 u_2 V_2(\theta) + u_1^3 V_3(\theta), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{2.4.12}$$

这是一组递推关系式，考虑到初值条件(2.4.11)，我们就可唯一确定 $u_\nu(\theta)$.

O 是中心的必要(且充分)条件是一切 $u_\nu(\theta)$ 是以 2π 为周期的周期函数. 假定与此相反，设头 $q-1$ 个 $u_\nu(\theta)$ 是周期函数，而 $u_q(\theta)$ 则不是，为确定起见，设 $u_q(2\pi) - u_q(0) = h > 0$，于是由(2.4.10)，我们有

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) = \rho_0^q\{h + \rho_0[u_{q+1}(2\pi) - u_{q+1}(0)] + \cdots\},$$

如果我们考虑 r 充分地小，使得对 $0 \leqslant \rho_0 \leqslant r$，上式右端括号中的级数为正，则有 $\rho(2\pi, \rho_0) > \rho(0, \rho_0)$，从而

$$\rho(0, \rho_0) < \rho(2\pi, \rho_0) < \rho(4\pi, \rho_0) < \cdots.$$

这就证明了 O 是焦点，也就证明了下面的定理(见 I. Bendixson [1] 与 M. Frommer [1]).

定理 11. 若 $N(\theta) \neq 0$（这里 $N(\theta)$ 由(2.4.3.1)定义)，则 O 是中心的充分必要条件为满足(2.4.12)与(2.4.11)的函数 $u_n(\theta)$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

(b) 我们指出，由(2.4.12)的第一个方程以及条件

$$u_1(0) = 1 = u_1(2\pi),$$

得知

$$\int_0^{2\pi} V_1(\theta)d\theta = 0,$$

或者由(2.4.8)有

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} d\theta = 0, \tag{2.4.13}$$

这个条件我们在§2.3中已经熟悉，它是 O 为齐次系统

$$\dot{x} = X_m(x, y), \quad \dot{y} = Y_m(x, y) \tag{2.4.1'}$$

的中心的充分必要条件. 于是我们有

定理 12. 若 $N(\theta) \neq 0$，O 是系统(2.4.1)的中心，则 O 也是简化系统(2.4.1')的中心. 等价地，若 O 是简化系统(2.4.1')的焦点，则 O 也是系统(2.4.1)的焦点.

我们将在第四章把这一结果推广到比(2.4.1)更为一般的系统中去.

3. $m = 1$ 的情形. Poincaré 方法

本段我们将论述 $m = 1$ 时的 Poincaré 方法(见 Poincaré [1])，这方法将给出 O 是中心的必要条件.

我们仍保留假设 $N(\theta) \neq 0$，点 O 也必须是简化系统(2.4.1')的中心(定理 12)，按§1所述，系统(2.4.1)经仿射变换后最后可化为

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \tag{2.4.14}$$

其中

$$
\begin{aligned}
X &= y + X_2 + \cdots + X_n + \cdots, \\
Y &= -x + Y_2 + \cdots + Y_n + \cdots,
\end{aligned}
\tag{2.4.15}
$$

X_n, Y_n 为 x, y 的 n 次齐次多项式.

和系统 (2.4.14) 一起,我们考虑线性齐次偏微分方程

$$
X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{2.4.16}
$$

可以直接验证,若 $\varphi(x, y) = c$ (c 为常数)是方程

$$
dx/X = dy/Y \tag{2.4.17}
$$

的通积分,则函数 $F[\varphi(x, y)]$ 是方程 (2.4.16) 的解,其中 F 表示任意可微函数. 反之,若 $F(x, y)$ 是 (2.4.16) 的解,则 $F(x, y) =$ 常数是方程 (2.4.17) 的解.

现在我们要问能否求得 (2.4.16) 的形如

$$
F = F_1 + F_2 + \cdots + F_N \quad (N \leqslant +\infty) \tag{2.4.18}
$$

的解,其中 $F_1, F_2, \cdots, F_N$ 依次是 x, y 的 $1, 2, \cdots, N$ 次齐次多项式. 将 (2.4.18) 代入 (2.4.16),即得

$$
F_1 \equiv 0, \quad F_2 = x^2 + y^2,
$$

于是

$$
F = x^2 + y^2 + \sum_{i \geqslant 3} F_i, \tag{2.4.19}
$$

而 (2.4.16) 可写为

$$
X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{k \geqslant 3}\left(y\frac{\partial F_k}{\partial x} - x\frac{\partial F_k}{\partial y} - H_k\right), \tag{2.4.20}
$$

其中

$$
-H_3 = 2xX_2 + 2yY_2, \tag{2.4.21}
$$

$$
\begin{aligned}
-H_k &= 2xX_{k-1} + 2yY_{k-1} \\
&+ \sum_{l=2}^{k-2}\left[X_l\frac{\partial F_{k-l+1}}{\partial x} + Y_l\frac{\partial F_{k-l+1}}{\partial y}\right] \quad (k = 4, 5, \cdots),
\end{aligned}
\tag{2.4.22}
$$

现在我们来研究方程

$$
y\frac{\partial F_k}{\partial x} - x\frac{\partial F_k}{\partial y} = H_k. \tag{2.4.23}
$$

我们指出，若换成极坐标（$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$），则有

$$\frac{\partial F_k(x,y)}{\partial\theta}=-\rho\frac{\partial F_k}{\partial x}\sin\theta+\rho\frac{\partial F_k}{\partial y}\cos\theta$$

$$=-\left[\frac{\partial F_k}{\partial x}y-\frac{\partial F_k}{\partial y}x\right].$$

因此，若借助于极坐标 ρ，θ，并令

$$F_k=\rho^k\varphi_k(\theta),\ H_k=\rho^k\psi_k(\theta), \tag{2.4.24}$$

$$\varphi_k(\theta)=\sum_{l=0}^{k}[A_l\cos l\theta+B_l\sin l\theta], \tag{2.4.24.1}$$

$$\psi_k(\theta)=\sum_{l=0}^{k}[C_l\cos l\theta+D_l\sin l\theta], \tag{2.4.24.2}$$

（A_l，B_l，C_l，D_l 为常数），则方程（2.4.23）变成 $-d\varphi_k/d\theta=\psi_k(\theta)$，或者

$$\sum_{l=1}^{k}l[A_l\sin l\theta-Bl\cos l\theta]=\sum_{l=0}^{k}[C_l\cos l\theta+D_l\sin l\theta],$$

因此我们必须有

$$C_0=0,\ A_l=D_l/l^{*)},\ B_l=-C_l/l\ (l=1,2,\cdots). \tag{2.4.25}$$

若 k 为奇数，则由于 $\psi_k(\theta)$ 仅包含有 θ 的奇倍数的正弦和余弦**)，故条件 $C_0=0$ 满足，由（2.4.25）可确定系数 A_l，B_l，从而也就可以确定 $\varphi_k(\theta)$ 与 F_k.

若 k 为偶数，而 $C_0\neq 0$，则 x，y 的 k 次齐次多项式 F_k 就不可能满足(2.4.23)，但是它们可以满足方程

$$y\frac{\partial F_k}{\partial x}-x\frac{\partial F_k}{\partial y}=H_k-C_0(x^2+y^2)^{k/2}, \tag{2.4.26}$$

并且 F_k 可以被确定到只差一个任意常数 A_0.

用刚才所述的方法可以计算 F_3，但如果 $C_0\neq 0$，则我们就不能由方程

---

*) 原书为 $A_l=-D_l/l$. ——译者注

**) 原书说 $\psi(\theta)$ 是 θ 的奇函数，显然不妥. ——译者注

$$y \frac{\partial F_4}{\partial x} - x \frac{\partial F_4}{\partial y} = H_4$$

来计算 F_4. 更一般地，我们假定 $F_{2i}(i > 1)$是对应于常数 $C_0 \neq 0$ 的第一个由 (2.4.26) 计算出的多项式，且 F_4, F_6, $\cdots$, F_{2i} 所依赖的常数可任意确定.

现在考虑函数

$$F = x^2 + y^2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_{2i}, \qquad (2.4.27)$$

并注意到由 (2.4.20), (2.4.24.1), (2.4.24.2) 和 (2.4.26)，我们有

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = - C_0(x^2 + y^2)^i + \Omega(x, y),$$

其中 $\Omega(x, y)$ 是各项次数都大于 $2i$ 的 x, y 的幂级数.

于是我们有 $F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 + \rho^3\alpha(\rho, \theta)$，其中 $\alpha(\rho, \theta)$ 对 $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0^*$ $(\rho_0^* > 0)$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 为 ρ, θ 的连续可微函数. 设 $|\alpha(\rho, \theta)| \leqslant M$. 现在我们取 ρ_0 使得 $0 < \rho_0 \leqslant \rho_0^*$ 且 $\rho_0 M < 1$，以保证在以 O 为圆心，ρ_0 为半径的圆 $\bar{\Gamma}$ 上有 $F(\rho_0\cos\theta, \rho_0\sin\theta) \geqslant d_0 > 0$.

因此有 $\partial F/\partial\rho = 2\rho + \rho^2\beta(\rho, \theta)$，如有必要，可取 ρ_0 充分地小，以使对 $0 < \rho \leqslant \rho_0$ 我们有 $\partial F/\partial\rho > 0$.

曲线 $F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = d$ $(0 < d < d_0)$ 含有在 $\bar{\Gamma}$ 内部的闭分支 Γ_d，它包含原点在其内部. 事实上，对给定的 θ，在 $\bar{\Gamma}$ 的射线 OA 上考虑变点，由于 $F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ 在 O 点等于零，且随着 ρ 的增加而增加，而在 A 点有大于 d_0 的值，故存在 ρ 的唯一值 $\bar{\rho}$，使得 $F(\bar{\rho}\cos\theta, \bar{\rho}\sin\theta) = d$.

与此同时，我们来考虑系统 (2.4.14), (2.4.15) 的通过 $\Gamma_{\bar{d}}$ 上一点的轨线 $x = x(t)$, $y = y(t)$，其中 $\bar{d} < d_0$. 若在多项式 (2.4.27) 中用这两个函数 $x(t)$, $y(t)$ 代入并求导数，则有

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y = - C_0(x^2 + y^2)^i + \cdots,$$

如果 $C_0 > 0$($C_0 < 0$)，则总可取 ρ_0 充分地小，使得有 $\dot{F} < 0$ ($\dot{F} > 0$). 因此 (2.4.14) 的所有从 $\Gamma_{\bar{d}}$ 上出发的轨线都将进入 $\Gamma_{\bar{d}}$

(如有必要可改变 t 的符号)，又因为它们必须与 $\Gamma_d(d<\bar{d})$ 都相交，故点 O 是系统 (2.4.14) 的焦点. 如果它们不与所有的 Γ_d 相交，则如我们在第四章中将要看到的，这时在 Γ_d 的内部至少存在一个环，而这是不可能的，因为这样的环必须保持在任一经过它上面一点的 Γ_d 之内.

由此，我们证明了下面的定理.

定理 13. O 是系统 (2.4.14)，(2.4.15) 的中心的必要条件是由 Poincaré 方法得到的常数 C_0 都应该等于零.

现在我们来证明这一条件也是充分的.

4. $m=1$ 的情形. 关于中心的 Poincaré 定理. E. Picard-J. Chazy 的证明

(a) 我们叙述的是 Poincaré 定理，而给出的证明是 Picard 与 J. Chazy 的(见 E. Picard [1], J. Chazy [1], M. Frommer [1]).

定理 14. 点 O 是系统 (2.4.14)，(2.4.15) 的中心的充分必要条件是由§4.3 所阐述的 Poincaré 方法得到的一切常数 C_0 都应该等于零.

如果将§4.2 中的方法应用到系统 (2.4.14)，(2.4.15) 上去，则方程 (2.4.7) 变为

$$d\rho/d\theta=\rho^2V_2(\theta)+\rho^3V_3(\theta)+\cdots, \tag{2.4.28}$$

其中 $V_2(\theta)$, $V_3(\theta)$, $\cdots$是 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的多项式，且有

$$\rho=\rho_0u_1(\theta)+\rho_0^2u_2(\theta)+\cdots,\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi), \tag{2.4.10}$$

$$u_1(0)=1;\quad u_\nu(0)=0;\quad \nu=2,3,\cdots, \tag{2.4.11}$$

由 (2.4.12) 的第一个方程得 $du_1/d\theta=0$，因此

$$u_1(\theta)=1. \tag{2.4.29}$$

现在 $du_2/d\theta=V_2(\theta)$，又因 $u_2(0)=0$，故

$$u_2(\theta)=\int_0^\theta V_2(\alpha)d\alpha,$$

$V_2(\theta)$ 是 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的多项式，在这种对于 $u_2(\theta)$ 的情形以及以后对于 $u_3(\theta)$, $u_4(\theta)$, $\cdots$的情形，经过积分就会得出可以表达为

$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的非负整数次幂的乘积项，从而也就会得到含 θ 的非负整数次幂的项. 这后一种项天文学称其为**常年项**.

凡是 $u_\nu(\theta)$ 为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的多项式时且仅在这时，$u_\nu(\theta)$ 才是以 2π 为周期的周期函数，这时 O 为中心.

假设我们就是在研究这样的多项式，于是由 (2.4.29)，方程 (2.4.10) 可以写为

$$\rho = \rho_0 + \rho_0^2 u_2(\theta) + \cdots \tag{2.4.10'}$$

求其逆，即得

$$\rho_0 = \rho + \rho^2 p_2(\theta) + \cdots + \rho^n p_n(\theta) + \cdots,$$

其中 $p_2(\theta), \cdots, p_n(\theta), \cdots$ 是 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的多项式. 因此，对充分小的 ρ, 方程

$$\rho_0^2 = \rho^2 + \rho^3 q_3(\theta) + \cdots + \rho^3 q_n(\theta) + \cdots \tag{2.4.30}$$

给出了 (2.4.28) 的一个周期解，其中 $q_n(\theta)$ 是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的多项式，ρ_0^2 是任意常数.

如果在 (2.4.30) 中，令

$$\begin{gathered} \rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \cos\theta = x(x^2 + y^2)^{-1/2}, \\ \sin\theta = y(x^2 + y^2)^{-1/2}, \end{gathered} \tag{2.4.31}$$

我们就得到了方程 (2.4.16) 的解. 注意，上面的代换使 (2.4.30) 右端的第一项变为 $x^2 + y^2$, 但是并不能断定其它各项也是 x, y 的多项式.

将 ρ 改为 $-\rho$, θ 改为 $\theta + \pi$*⁾, 则得级数

$$\rho^2 - \rho^3 q_3(\theta + \pi) + \cdots + (-1)^n \rho^n q_n(\theta + \pi) + \cdots. \tag{2.4.32}$$

若令此级数等于一常数，并作代换 (2.4.31)，我们就得到 (2.4.16) 的解. 由方程 (2.4.16) 的线性性质，用同样方法得到的级数

$$\begin{aligned} &\rho^2 + \rho^3[q_3(\theta) - q_3(\theta + \pi)]/2 + \cdots + \rho^n[q_n(\theta) \\ &\quad + (-1)^n q_n(\theta + \pi)]/2 + \cdots = \rho^2 \\ &\quad + \rho^3 E_3(\theta) + \cdots + \rho^n E_n(\theta) + \cdots \end{aligned}$$

---

*⁾ 原书为 $\theta + 2\pi$, 下同. ——译者注

也是方程 (2.4.16) 的解(其中的 $E_n(\theta)$ 分别随 n 是偶数或奇数而是 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的偶次或奇次多项式).

若记

$$F = \rho^2 + \rho^3 E_3(\theta) + \cdots + \rho^n E_n(\theta) + \cdots, \quad (2.4.33)$$

并且如果我们证明了 $E_n(\theta)$ 正好是 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的 n 次齐次多项式,则因为右端的级数在 O 的邻域内收敛,故利用代换(2.4.31), F 可以写为(2.4.19)的形式, 其中 F_i 是 x, y 的 i 次齐次多项式.

为此,注意到 (2.4.15),我们有 $X_i = \rho^i P_i(\theta)$, $Y_i = \rho^i Q_i(\theta)$, 其中 P_i 和 Q_i 是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的 i 次齐次多项式,因而方程(2.4.6)变为

$$d\rho/d\theta = -\rho^2 \sum_{i=2}^{\infty} \rho^{i-2}[Q_i(\theta)\sin\theta$$
$$+ P_i(\theta)\cos\theta] \Big/ \left\{1 + \sum_{i=2}^{\infty} \rho^{i-1}[P_i(\theta)\sin\theta - Q_i(\theta)\cos\theta]\right\},$$

又因为 (2.4.33), 我们有

$$\partial F/\partial\rho = 2\rho + \sum_{i=3}^{\infty} i\rho^{i-1}E_i(\theta), \quad \partial F/\partial\theta = \sum_{i=3}^{\infty} \rho^i E_i'(\theta),$$

如果考虑到

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial F}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta}$$

必须恒满足方程(2.4.16), 则有方程

$$\left.\begin{aligned}
&2[P_{i+1}(\theta)\cos\theta + Q_{i+1}(\theta)\sin\theta] \\
&\quad + 3E_3(\theta)[P_i(\theta)\cos\theta + Q_i(\theta)\sin\theta] \\
&\quad + E_3'(\theta)[Q_i(\theta)\cos\theta - P_i(\theta)\sin\theta] \\
&\quad + 4E_4(\theta)[P_{i-1}(\theta)\cos\theta + Q_{i-1}(\theta)\sin\theta] \\
&\quad + E_4'(\theta)[Q_{i-1}(\theta)\cos\theta - P_{i-1}(\theta)\sin\theta] \\
&\quad + \cdots(i+1)E_{i+1}(\theta)[P_2(\theta)\cos\theta + Q_2(\theta)\sin\theta] \\
&\quad + E_{i+1}'(\theta)[Q_2(\theta)\cos\theta - P_2(\theta)\sin\theta] = E_{i+2}', \\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}\right\} \quad (2.4.34)$$

对 $i=1$，我们有 $2[P_2(\theta)\cos\theta+Q_2(\theta)\sin\theta]=E_3'(\theta)$，故 $E_3(\theta)$ 原来是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的三次多项式.由归纳法，我们可以证明，由(2.4.34)得知 $E_{i+2}(\theta)$ 是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的 $i+2$ 次齐次多项式.因此，由(2.4.33)知道 F 为所要求的齐次多项式级数的展开.

假定我们已经证明了 $E_3,\cdots,E_{i+1}$ 分别是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的 $3,\cdots,i+1$ 次的齐次多项式，则我们就证明了 E_{i+2} 的次数等于 $i+2$. 事实上，方程(2.4.34)中的第一项是 $i+2$ 次齐次多项式，而左端的其余各项具有形式

$$hE_h(\theta)[P_{i-h+3}(\theta)\cos\theta+Q_{i-h+3}(\theta)\sin\theta] \\ +E_h'(\theta)[Q_{i-h+3}(\theta)\cos\theta-P_{i-h+3}(\theta)\sin\theta],$$

又因为

$$\frac{\partial E_h(x,y)}{\partial\theta}=-\left[\frac{\partial E_h}{\partial x}y-\frac{\partial E_h}{\partial y}x\right]$$

若令 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，则前面那个式子变为

$$hE_h(x,y)[P_{i-h+3}(x,y)x+Q_{i-h+3}(x,y)y] \\ -\left[\frac{\partial E_h}{\partial x}y-\frac{\partial E_h}{\partial y}x\right][Q_{i-h+3}(x,y)x-P_{i-h+3}(x,y)y],$$

或者

$$P_{i-h+3}(x,y)\left[xhE_h+y^2\frac{\partial E_h}{\partial x}-xy\frac{\partial E_h}{\partial y}\right] \\ +Q_{i-h+3}(x,y)\left[yhE_h-xy\frac{\partial E_h}{\partial x}+x^2\frac{\partial E_h}{\partial y}\right].$$

但由齐次函数的 Euler 定理，

$$x\partial E_h/\partial x+y\partial E_h/\partial y=hE_h\quad(h=3,4,\cdots,i+1),$$

故上面的表达式又变成

$$(x^2+y^2)\left[P_{i-h+3}\frac{\partial E_h}{\partial x}+Q_{i-h+3}\frac{\partial E_h}{\partial y}\right],$$

若在此式中将 x, y 换成 $\cos\theta$, $\sin\theta$，则得所求的 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的 $i+2$ 次齐次多项式，从而完成了定理的证明.

(b) 由此证明也可得知，若 O 是系统(2.4.14)，(2.4.15)的中心，则轨线(环)具有形式 $F(x,y)=$ 常数. 其中 F 是 O 的邻域内

的全纯函数. 若这个系统的右端 X, Y 是全纯函数，但并不是(2.4.15)的类型，那我们就不能断定这些环可表为 $F=$ 常数的形式,其中 F 为全纯函数. 例如,对于系统

$$\dot{x}=y[(2x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2],$$
$$\dot{y}=-x[(2x^2+y^2)+2(x^2+y^2)^2],$$

环族方程为 $(2x^2+y^2)\exp(-(x^2+y^2)^{-1})=$ 常数.

5. $m=1$ 的情形.周期的计算

方程(2.4.10′)给出了系统(2.4.14),(2.4.15)的通过点 $\theta=0$, $\rho=\rho_0\,(\rho(0,\theta_0)=\rho_0)$ 的解的极坐标方程.

假若我们希望求出对应于这个环的任一周期解 $x(t)$, $y(t)$ 的周期，则只须注意到，由于 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 由系统(2.4.14), (2.4.15), 我们有

$$\dot{\theta}[\cos\theta d\rho/d\theta-\rho\sin\theta]=X=\rho\sin\theta+\cdots,$$
$$\dot{\theta}[\sin\theta d\rho/d\theta+\rho\cos\theta]=Y=-\rho\cos\theta+\cdots,$$

将上面两式两边平方并考虑到(2.4.28), 即得

$$\dot{\theta}^2\left[1+\rho^2\left(\sum_{\nu=2}^{\infty}V_\nu(\theta)\rho^{\nu-2}\right)^2\right]=1+\rho\sum_{k=0}^{\infty}q_k^*(\theta)\rho^k,$$

故

$$dt=\left(1+\rho^2\sum_{k=0}^{\infty}q_k^*(\theta)\rho^k\right)^{1/2}d\theta, \qquad (2.4.35)$$

其中 $q_k^*(\theta)$, $q_k(\theta)$ 为 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的多项式.

利用(2.4.35)和(2.4.10′),我们就能由 ρ_0 来计算 $x(t)$,$y(t)$ 的周期.

6. 关于中心的 Poincaré 充分条件. 应用于月球运动的 Delaunay 方程

(a) **定理 15.** 假设系统

$$\dot{x}=X(x,y), \quad \dot{y}=Y(x,y) \qquad (2.4.36)$$

中的函数 $X(x,y)$, $Y(x,y)$ 在 O 的邻域内满足 O 是中心或是焦

点的条件(见 § 4.1)，又若下面的方程

$$X(x, -y) = -X(x, y), \quad Y(x, -y) = Y(x, y) \qquad (2.4.37)$$

成立，则 O 是中心.

取系统 (2.4.36) 的从点 $(x_0, 0)$: $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = 0$ 出发的一条轨线. 由 (2.4.37)，这条轨线关于 x 轴对称，并且有 $x(t) = x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$. 从而，若在时刻 t_0, $y(t_0) = 0$，则 $x(t_0) = x(-t_0)$, $y(t_0) = y(-t_0) = 0$，故此轨线为一环，由于 x_0 是任意的，所以 O 是中心.

(b) Poincaré 将这条定理应用到月球运行理论中的 Delaunay 方程(见 E. Tisserand [1])

$$\left.\begin{aligned} \dot{e} &= M(1 + M_1e^2 + M_2e^4)\sin\theta \\ \dot{\theta} &= N(1 + N_1e^2 + N_2e^4 + N_3e^6) \\ &\quad + e^{-1}M(1 + P_1e^2 + P_2e^4)\cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.38)$$

其中 $x = e\cos\theta$, $y = e\sin\theta$, $M_1, M_2, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2$ 是常数，$N \neq 0$，M 是 x 与 y 的偶函数且 $M = O(x^2 + y^2)$.

把 (2.4.38) 变换到关于 x, y 的对应系统 (2.4.36)，则有

$$\begin{aligned} X &= -Ny(1 + N_1e^2 + N_2e^4 + N_3e^6) \\ &\quad + Mxy(M_1 - P_1 + (M_2 - P_2)e^2); \\ Y &= Nx(1 + N_1e^2 + N_2e^4 + N_3e^6) \\ &\quad + M + Mx^2(P_1 + P_2e^2) + My^2(M_1 + M_2e^2), \end{aligned}$$

因此 X, Y 满足 (2.4.37). 又由于轨线的微分方程是

$$dy/dx = (Nx + O(x^2 + y^2))/(-Ny + O(x^2 + y^2)), \quad N \neq 0.$$

故点 O 是中心或焦点，但由定理 15，O 是中心.

7. 有关中心问题的文献

(A) 形如 (2.4.14), (2.4.15) 的系统可简写为

$$\dot{x} = -y + P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y),$$

这种类型系统的中心问题有很广泛的文献.

情形 (i): P 与 Q 为二次齐次多项式.

H. Dulac

Détérmination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre, *Bull. Sci. Math.* (2), **32** (1908), 230—252,

W. KAPTEYN

(*a*) Over de middelpunten de integralkrommer van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en de eerste graad, *Koninkl. Nederl. Ak. Versl.*, **19** (1911), 1446—1457;

(*b*) Nieuw onderzoek omtrent de middelpunten de integraalen van diffentiaalvergelijkingen de eerste orde en den eersten graad, *ibid.* **20**(1912), 1354—1365; **21** (1912), 27—33;.

M. FROMMER

Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, *Math. Annalen*, **109** (1934), 395—424 (411—414).

N. BAUTIN

Du nombre de cycles limites naissant en cas de variation des coéfficients d'un état d'équilibre du type foyer ou center, *C. R. (Dokl.) Ac. Sci. U. R. S. S.*, (*N. S.*), **24** (1939), 669—672.

N. A. SAHARNIKOV

On Frommer's conditions for the existence of a center, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **12** (1948), 669—670 (Russian).

K. S. SIBIRSKII

On the conditions for the center and the focus, *Uchenyye Zapiski Kishinvsk. Univ.*, **11** (1954), 115—117 (Russian).

L. N. BELYUSTINA

On the conditions for the existence of the center, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **18** (1954), 511 (Russian).

情形(ii)：P与Q为三次齐次多项式

S. WIGERT

Sur les points singuliers des équations différentielles, *Ofversigt Vet. Ak. Forh.*, **56** (1899), 697—716; **57** (1900), 47—56.

N. A. SAKHARNIKOV

Solution of the problem of the center and the focus for one case, *Prikl. Mat. i Mekh.*, *14* (1950), 651—658 (Russian).

N. A. LUKASIEWICZ

Phase portrait for the system $dx/dt = y + bx^3 + (c-\beta)x^2y + (3d-\gamma)xy^2 + fy^3$, $dy/dt = -x - ax^3 - (3b+\alpha)x^2y - (c+\beta)xy^2 - dx^3$, having a singular point of center type, *Dokl. Ak. Nauk B. S. S. R.*, **5** (1961), 3—5(Russian).

情形(iii)：P与Q为n次齐次多项式

M. I. AL'MUHAMEDOV

On conditions for the existence of stable and unstable centers, *Dokl. Ak. Nauk S. S. S. R.*, **67** (1949), 961—964 (Russian); *Amer. Math. Soc. Tran*

slation No. 34 (1950).

K. S. SIBIRSKII and B. A. SHCHERBAKOV

On stable centers, *Uchenyye Zapiski Kishinevsk. Univ.*, **39** (1959), 219—224 (Russian).

情形(iv)：P与Q为全纯函数

J. CHAZY

Sur la théorie des centres, *C. R. Acad. Sci Paris*, **221** (1945), 3—10.

N. A. SAKHARNIKOV

On the conditions for the existence of a center or a focus, *Prikl. Mat. i Mekh.* **14** (1950), 513—526.

N. L. RABINOVITCH

Sur les courbes définies par les équations différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 671—673.

I. I. SHIROV

On sufficient conditions for a centre, *Trudy Uzb. Univ.*, 1956, 65, 45—59 (Russian).

K. S. SIBIRSKII

(*a*) On the problem of center and focus, *Uchenyye Zapiski Kishinevsk. Univ.*, **24** (1956), 105—114 (Russian).

(*b*) Method of symmetry for establishing the conditions for a centre, *ibid.*, **9** (1957), 3—10 (Russian).

K. S. SIBIRSKII and I. I. PLESHKAN

Symmetry conditions in the vector field of a certain differential equation, *ibid.*, **29** (1957), 11—14 (Russian).

I. I. SHIROV

On a variant in Al'muhamedov's method, *Trudy Uzb. Univ.*, 1958, 78, 53—57 (Russian).

情形(v)：$P\equiv 0$，Q为特殊形式

I. S. KUKLES

(*a*) Sur les centres et les foyers, *C. R. (Dokl.) Ac. Sci. U. R. S. S. (N. S.)*, **19** (1938), 459—464;

(*b*) On the necessary and sufficient conditions for the existence of a center, *Dokl. Ak. Nauk S. S. S. R.*, **42** (1944), 160—163 (Russian).

(*c*) On some cases of distinguishing between a focus and a center, *ibid.*, 208—211 (Russian).

(*d*) On two fundamental groups of singular points, *ibid.*, 253—255 (Russian).

T SAITO

On center-type singular points, *Kodai Math. Seminar Reports*, **7** (1955), 89—96. 中心问题也可用 N. Bautin 和 N. Otrokov 的工作来处理，这将在第五章讨论。

(B) 形如系统

$$\dot{x} = y + P(x,y), \qquad \dot{y} = Q(x,y)$$

的中心问题研究得较少．其中 P, Q 为全纯函数，且在 O 具至少二阶零点．这类系统不满足本段所作的假设，因为 $N(\theta) \neq 0$ 并不成立．我们反推举三篇文章：

A. LYAPUNOV

Study of a particular case of the problem of the stability of motion, *Mat. Sbornik*, **17** (1893), 252—333 (Russian).

G. VRANCEANU

Sopra le soluzioni periodiche a periodi grendissimi della Meccanica, *Rend. Ac. Naz. Lincei*, (6), 7 (1928), 630—633.

A. F. ANDREYEV

Solution of the problem of the centre and focus in one case, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **17** (1953), 333—338 (Russian).

最后一文考虑 P, Q 是三次齐次多项式的情形．

§5. 无穷远奇点

1. Poincaré 球面．无穷远奇点

(a) 在讨论齐次系统时，我们已经有机会对某些特殊情形考虑过轨线在无穷远处的性态(§ 2.5)．

为了系统地研究右端为 x, y 的实系数多项式的系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \tag{2.5.1}$$

的这种奇点的性态，为方便起见，象 Poincaré 那样把 x, y 平面上

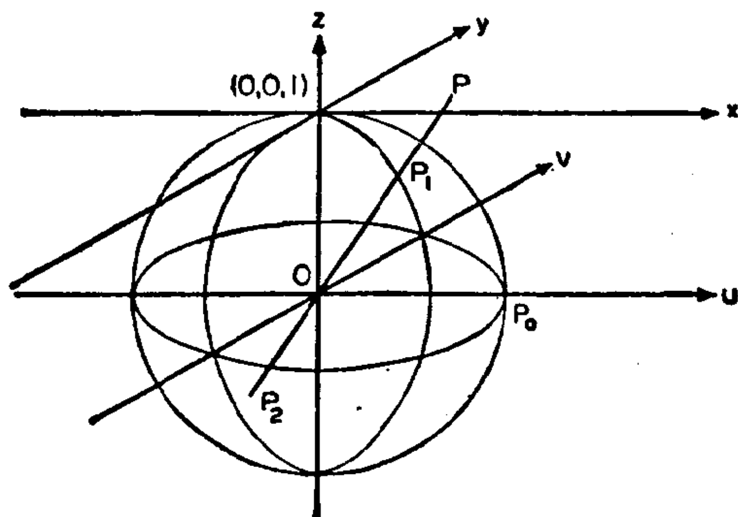


图 33

的问题放到球面上来考虑(见 Poincaré [1] 第5页).

为此，考虑直角坐标系 u, v, z，使 x, y 平面为这个坐标系中的平面 $z=1$，u, v 轴平行于 x, y 轴，x, y 轴的原点假定在点 $(0,0,1)$ 处(图33).

在 u, v, z 空间中，取中心在坐标原点，半径为1的球面 Σ

$$u^2+v^2+z^2=1. \tag{2.5.2}$$

它与平面 $z=0$ 的交线为大圆，称为赤道. 赤道将球面 Σ 分成上下两个半球面 Σ_1, Σ_2，它们依次对应于 $z\geqslant 0$ 和 $z\leqslant 0$.

若 $P=(x, y, 1)$ 是 x, y 平面上的有限点，

$$P_1=(u_1, v_1, z_1), \quad P_2=(u_2, v_2, z_2)$$

分别是射线 OP 与 Σ_1 和 Σ_2 的交点，则 $u_i/x=v_i/y=z_i\ (i=1, 2)$. 事实上，由(2.5.2)有 $u_i^2+v_i^2+z_i^2=1$，若令 $\rho=(x^2+y^2+1)^{1/2}\ (\rho>0)$，则 $u_1=x/\rho$, $v_1=y/\rho$, $z_1=1/\rho$; $u_2=-x/\rho$, $v_2=-y/\rho$, $z_2=-1/\rho$，因此，$x=u_i/z_i$, $y=v_i/z_i(i=1, 2)$.

我们依次称 P_1, P_2 为 P 在 Σ_1 和 Σ_2 上的象. 这个变换可表示为

$$x=u/z, \quad y=v/z; \quad u^2+v^2+z^2=1. \tag{2.5.3}$$

由此表达式知道，x, y 平面内任一有限远曲线 γ 都有两条象曲线 γ_1 和 γ_2，它们关于 Σ 的中心对称，与赤道都不相交；x, y 平面上的无穷远点的象在赤道上，反之，赤道上的点对应于 x, y 平面上的无穷远点. x, y 平面上的直线对应于 Σ_1 和 Σ_2 上的两个半圆周，半圆周的端点都在赤道上，x, y 平面上的平行直线族对应于 Σ_1 和 Σ_2 上的半圆族.

(b) 现在假设系统(2.5.1)中的 $X(x, y)$, $Y(x, y)$ 分别是 x, y 的 p 次和 q 次实系数多项式，设它们无公共实因子，n 为 p 与 q 的较大者.

利用(2.5.3)，我们有

$$X(u/z, v/z)=P(u, v, z)/z^p;$$
$$Y(u/z, v/z)=Q(u, v, z)/z^q, \tag{2.5.4}$$

其中 $P(u, v, z)$, $Q(u, v, z)$ 依次是 u, v, z 的 p 次和 q 次的齐

次多项式.

由(2.5.1),我们有

$$-Y(x,y)dx+X(x,y)dy=0.$$

由(2.5.3), $dx=(zdu-udz)z^{-2}$, $dy=(zdv-vdz)z^{-2}$, 考虑到(2.5.4),得

$$-z^{n-p+1}Q(u,v,z)du+z^{n-q+1}P(u,v,z)dv$$
$$+[uz^{n-p}Q(u,v,z)-vz^{n-q}P(u,v,z)]dz=0. \quad (2.5.5)$$

记

(i) 对 $p<q=n$

$$A=-z^{q-p+1}Q(u,v,z),\quad B=zP(u,v,z),$$
$$C=uz^{q-p}Q(u,v,z)-vP(u,v,z); \quad (2.5.6.1)$$

(ii) 对 $q<p=n$

$$A=-zQ(u,v,z),\quad B=z^{p-q+1}P(u,v,z),$$
$$C=uQ(u,v,z)-vz^{p-q}P(u,v,z); \quad (2.5.6.2)$$

(iii) 对 $p=q=n$ 且 $uQ(u,v,z)-vP(u,v,z)$ 不为 z 所整除

$$A=-zQ(u,v,z),\quad B=zP(u,v,z),$$
$$C=uQ(u,v,z)-vP(u,v,z); \quad (2.5.6.3)$$

(iv) 对 $p=q=n$ 且 $uQ(u,v,z)-vP(u,v,z)$ 能被 z 整除

$$A=-Q(u,v,z),\quad B=P(u,v,z),$$
$$C=z^{-1}[uQ(u,v,z)-vP(u,v,z)]. \quad (2.5.6.4)$$

与(2.5.5)一起的,还应有方程

$$udu+vdv+zdz=0. \quad (2.5.6)$$

由(2.5.5)和(2.5.6)所构成的方程组有解 $z=0$, $u^2+v^2=1$.

在情形(i),(ii),(iii),方程

$$A(u,v,z)du+B(u,v,z)dv+C(u,v,z)dz=0 \quad (2.5.7)$$

与(2.5.5)相同,而在情形(iv),就还得乘上 z 才相同.

若在某些点处,矩阵

$$\begin{pmatrix} A(u, v, z) & B(u, v, z) & C(u, v, z) \\ u & v & z \end{pmatrix} \tag{2.5.8}$$

的秩等于 2，从而在这些点的邻域内该矩阵之秩也等于 2. 由 (2.5.6) 和 (2.5.7) 得到

$$du:dv:dz = \begin{vmatrix} B & C \\ v & z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C & A \\ z & u \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ u & v \end{vmatrix},$$

若引入参数 τ，则上式也可写为

$$\begin{cases} du/d\tau = B(u, v, z)z - C(u, v, z)v, \\ dv/d\tau = C(u, v, z)u - A(u, v, z)z, \\ dz/d\tau = A(u, v, z)v - B(u, v, z)u. \end{cases} \tag{2.5.9}$$

这个系统的轨线盖住了整个 u, v, z 空间. 由(2.5.6)知道，这些轨线的每一条整个地位于与 Σ 同心的球面上. 由 (2.5.3) 知道，系统 (2.5.1) 的每一条轨线在 Σ 上的象是系统 (2.5.9) 的关于 (0, 0, 0) 对称而与赤道无交点的两条轨线弧.

我们称使 A, B, C 同时为零的点 (u, v, z) 为系统(2.5.5), (2.5.6)的奇点. 在这些奇点中，使 $z \neq 0$ 的点都是系统 (2.5.1) 的奇点的象，使 $z = 0$ 的点，亦即在赤道上的奇点称为系统(2.5.1)的无穷远奇点的象.

在情形 (i)，下面的点是赤道上的奇点：$u = 1, v = 0, z = 0$ 以及满足条件 $P(u, v, 0) = 0$, $z = 0$ 的点$(u, v, 0)$, $(u^2 + v^2 = 1)$. 在情形 (ii)，由对称性，奇点为点 $u = 0, v = 1, z = 0$ 以及满足 $Q(u, v, 0) = 0$ 的点 $(u, v, 0)$, $(u^2 + v^2 = 1)$. 在情形 (iii)，满足 $uQ(u, v, 0) - vP(u, v, 0) = 0$, $(u^2 + v^2 = 1)$, $z = 0$ 的点为奇点. 最后，在情形 (iv)，奇点满足 $P(u, v, 0) = 0$, $Q(u, v, 0) = 0$, $z^{-1}[uQ(u, v, z) - vP(u, v, z)]_{z=0} = 0$, $u^2 + v^2 = 1$.

如果在赤道上的点 $(u_0, v_0, 0)$, $(u_0^2 + v_0^2 = 1)$ 不是系统 (2.5.5), (2.5.6)的奇点，则这系统经过这点的解只能是 $z = 0$. 事实上，对 (i), (ii), (iii), (iv) 的每一种情形，矩阵 (2.5.8) 在点 $(u, v, 0)$ 处的秩都等于 2，因此 (2.5.5), (2.5.6) 可化为系统

(2.5.9)，而对后者唯一性定理成立.

(c) 如果赤道上的奇点不完全充满赤道，则它们只能有有限个，我们称它们为**孤立奇点**. 设 P_0 是赤道上的弧立奇点，则系统(2.5.9)的两条轨线弧在 P_0 相交，它们正好就是赤道上的两条弧段. 由上面指出的唯一性定理知道，(2.5.9)的在 P_0 点的邻域内的轨线决不可能有焦点和中心的形状，但是可以有结点型（单切结点，双切结点或星形结点）或鞍点型，或其它类型.

下一段我们将给出上面各种可能类型的几个例子.

(d) 为了看清楚轨线在赤道上的孤立奇点 P_0 的邻域内的性态，宜将系统(2.5.9)的轨线从球面 Σ 的中心投影到 Σ 在 P_0 点的切平面 π 上去，然后再分析在 π 上的这些投影在 P_0 的邻域内的性态. 如有必要，绕 z 轴旋转坐标系，因此我们可以假设 P_0 与(1, 0, 0)或(0, 1, 0)重合.

先设 $P_0=(1,0,0)$，并假设 P_0 是 π 平面上新直角坐标系 η,ζ 的原点，η,ζ 轴分别与 v, z 轴平行且方向也分别与 v,z 轴的方向相同. 于是我们有

$$\eta=v/u,\quad \zeta=z/u,\quad (u^2=(1+\eta^2+\zeta^2)^{-1}),\quad (2.5.10.1)$$

由于 $Au+Bv+Cz=0$，得

$$d\eta/d\tau=u^{-2}C(u,v,z),\quad d\zeta/d\tau=-u^{-2}B(u,v,z),\ (2.5.11.1)$$

因此，为了要研究系统(2.5.9)在点(1, 0, 0)的邻域内轨线的性态(最终是为了分析系统(2.5.1)在 x 轴上无穷远点附近轨线的性态)，只须研究系统(2.5.11.1)在原点邻域内轨线的性态就够了.

类似地，若 $P_0=(0,1,0)$，并且假定在切平面 π 上，直角坐标系 ξ,ζ 的坐标原点在 P_0，ξ,ζ 轴分别平行于 u, z 轴，且与 u, z 轴的方向相同. 则有

$$\xi=u/v,\quad \zeta=z/v,\quad (v^2=(1+\xi^2+\zeta^2)^{-1}),\quad (2.5.10.2)$$

这时，我们只须研究系统

$$d\xi/d\tau=-v^{-2}C(u,v,z),\quad d\zeta/d\tau=v^{-2}A(u,v,z)\quad (2.5.11.2)$$

在 ξ,ζ 平面上的原点邻域内的轨线的性态就行了.

2. 例子

(a) 对于系统(见 Poincaré[1]第 68 页)

$$\dot{x}=1-x^2-y^2,\quad \dot{y}=xy-1. \tag{2.5.12}$$

应用§ 5.1 中的记号,我们有 ($p=q=n=2$)

$$A=-z(uv-z^2),\quad B=z(z^2-u^2-v^2),$$
$$C=2u^2v+v^3-(u+v)z^2.$$

若 $z\neq 0$, 则奇点应满足 $uv=z^2$, $u^2+z^2=v^2$, 从而 $u^2-uv+v^2=0$, 在实数域内这方程只有唯一解 $u=v=0$, 从而 $z=0$. 但我们已假定 $z\neq 0$, 故我们立刻知道,系统(2.5.12)没有有限远奇点.

另一方面,若 $z=0$,则应有 $v(2u^2+v^2)=0$[情形(2.5.6.3)], 于是 $v=0$, $u=\pm 1$. 因此,系统(2.5.12)的无穷远奇点在球面 Σ 上的象是两个对径点 (1, 0, 0), (−1, 0, 0), 故 (2.5.12) 只有一个沿 x 轴方向的无穷远奇点. 由 § 5.1 (d) 引入的系统 (2.5.11.1) 这时变成

$$d\eta/d\tau=[2\eta+\eta^3-(1+\eta)\zeta^2](1+\eta^2+\zeta^2)^{-1/2},$$
$$d\zeta/d\tau=[\zeta+\eta^2\zeta-\zeta^3](1+\eta^2+\zeta^2)^{-1/2}$$

或

$$d\eta/d\tau=2\eta+\eta^3-(1+\eta)\zeta^2,\quad d\zeta/d\tau=\zeta+\eta^2\zeta-\zeta^3 \tag{2.5.12'}$$

(见第一章§ 5.2(c)).

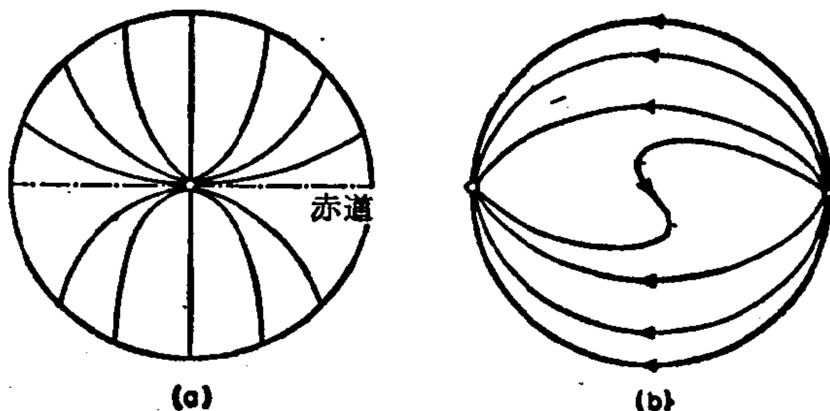


图 34

因为点 $\eta=0$，$\zeta=0$ 为简化系统 $d\eta/d\tau=2\eta$，$d\zeta/d\tau=\zeta$ 的双切结点，其不变射线为 η 轴和 ζ 轴，故系统(2.5.12′)也有双切结点(第五章§ 2.4)，亦即(2.5.12)在 x 轴上的无穷远奇点是双切结点. 系统(2.5.12)的轨线在球面 Σ 上的象的形状如图 34(a) 与 34(b) 所示，其中第一个是沿着 u 轴上的无穷远奇点来看的透视图，第二个是从 z 轴上无穷远点来看的平面图.

(b) 对于系统(见 Poincaré [1] 第 66 页)

$$\dot{x}=x^2-y^2-1,\quad \dot{y}=5(xy-1), \tag{2.5.13}$$

用通常的记号，我们有($p=q=n=2$)

$$A=-5z(uv-z^2),\quad B=z(u^2+v^2-z^2),$$
$$C=v(4u^2-v^2)+z^2(v-5u).$$

由于在实数域内方程组

$$uv=z^2,\quad u^2+v^2=z^2$$

有唯一解 $u=v=z=0$，(2.5.13) 的奇点对应于

$$z=0,\quad v(4u^2-v^2)=0,$$

因此 $v=0$，或 $v^2=4u^2$，$(5u^2=1)$，因而系统(2.5.13)有六个无穷远奇点:

$$P_1=(1,0,0),\quad P_1'=(-1,0,0),$$
$$P_2=(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5},\ 0),\ P_2'=(-1/\sqrt{5},\ -2/\sqrt{5},\ 0)$$
$$P_3=(1/\sqrt{5},\ -2/\sqrt{5},\ 0),\ P_3'=(-1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5},\ 0).$$

对这些奇点，只须确定 P_1, P_2, P_3. 如上段(a)，对 P_1 我们得到系统

$$\begin{aligned} d\eta/d\tau &= 4\eta-5\zeta^2-\eta^3+\eta\zeta^2, \\ d\zeta/d\tau &= -\zeta-\zeta\eta^2+\zeta^3, \end{aligned} \tag{2.5.13.1}$$

$\eta=\zeta=0$ 为对应简化系统

$$d\eta/d\tau=4\eta,\quad d\zeta/d\tau=-\zeta$$

的鞍点，故它也是系统(2.5.13.1)的鞍点(第五章§ 2.5).

至于 P_2，如第一节(d)中开始所说，绕 z 轴旋转一角度 α，使

$$\cos\alpha=1/\sqrt{5},\quad \sin\alpha=2/\sqrt{5},$$

并投影到 Σ 在 P_2 点的切平面上，除因子 $(1+\eta^2+\zeta^2)/\sqrt{5}$ 以外得到系统

$$d\eta/d\tau = -8\eta + 2\eta^2 - 3\zeta^2 + 11\eta\zeta^2 + 3\eta^3,$$
$$d\zeta/d\tau = -5\zeta + 6\eta\zeta + 3\eta^2\zeta + 11\zeta^3.$$

点 $\eta = \zeta = 0$ 为其对应简化系统

$$d\eta/d\tau = -8\eta, \quad d\zeta/d\tau = -5\zeta$$

的双切结点．因而 P_2 也有双切结点的形状（第五章§ 2.4）．

最后，对 P_3 类似地进行讨论，我们得到系统

$$d\eta/d\tau = -8\eta - 2\eta^2 - 7\zeta^2 - 9\eta\zeta^2 + 3\eta^3,$$
$$d\zeta/d\tau = -5\zeta + 6\eta\zeta + 3\eta^2\zeta - 9\zeta^3,$$

因此 P_3 也象双切结点样子．

总之，系统 (2.5.13) 没有有限远奇点，有三个无穷远奇点：沿 x 轴的无穷远奇点，它是鞍点；沿 $y-2x=0$ 的无穷远奇点，它是双切结点；以及沿 $y+2x=0$ 的无穷远奇点，它也是双切结点．半球面 $\Sigma_1(z\geqslant 0)$ 上轨线的形状如图 35 所示（见 S. Lefschetz[1]，中译本第 207—210 页）．

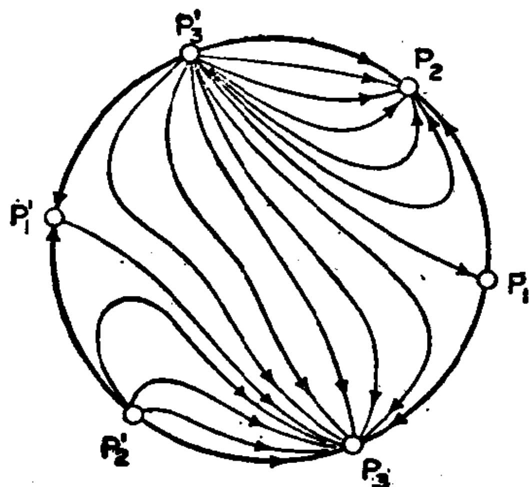


图 35

3. 齐次系统的无穷远奇点

(a) 现在将§ 5.1 的结果应用到当 $X(x,y)$，$Y(x,y)$ 是 $n\geqslant 1$ (n 为整数)次齐次多项式的情形．利用通常的记号，

$$p = q = n,\ P(u,v,z) = X(u,v),\ Q(u,v,z) = Y(u,v),$$
$$A(u,v,z) = -zY(u,v),\ B(u,v,z) = zX(u,v),$$
$$C(u,v,z) = uY(u,v) - vX(u,v).$$

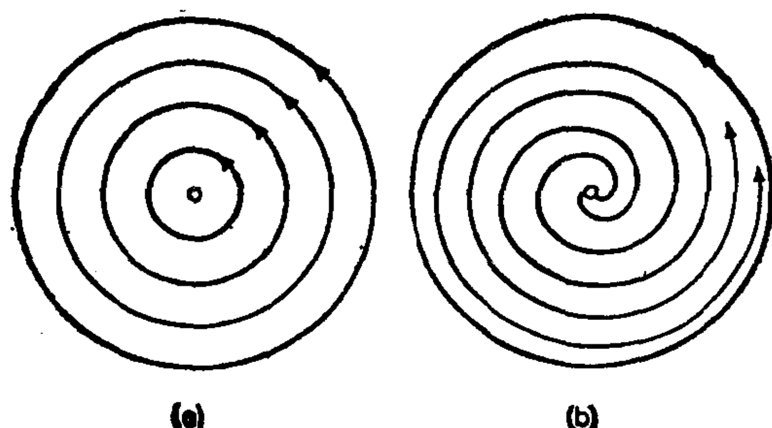
这时系统 (2.5.1) 的无穷远奇点对应于

$$z = 0, \quad uY(u,v) - vX(u,v) = 0,$$

因此，它们是而且只是不变射线上的无穷远奇点（我们将要指出，

即使 X, Y 不是多项式，而仅是满足§ 2.1 中所假设的更为一般的齐次函数，上述结论也是正确的）.

特别是，若 O 是系统（2.5.1）的中心或焦点 $[uY(u,v)-vX(u,v)\neq 0$，对 $u^2+v^2>0]$，则它没有无穷远奇点，这时轨线在球面（半球面 Σ_1）上的形状如图 36(a)，(b) 所示（箭头所指方向可能相反）.



(a) (b)

图 36

若 O 是(2.5.1)的星形结点 $[uY(u,v)-vX(u,v)\equiv 0]$，则所有的无穷远点都是（2.5.1）的奇点，其形状如图 37 所示(箭头方向可能相反).

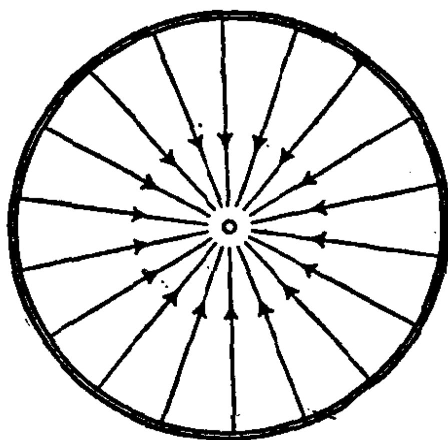


图 37

现在，若 $\theta=\theta_0$ 是孤立不变射线的极角，由§ 2.5 立刻得知，若此射线本身属于第一类正规角域，则这条射线上的无穷远点是鞍点．另一方面，若这条射线属于第三类正规角域，则这射线的一侧呈结点形状，另一侧呈鞍点形状（鞍-结点)；若这条不变射线属于第二类正规角域，又满足§ 2.5(c) 中的条件，则这个无穷远点可能是双切结点，也可能是星形结点.

(b) 对于线性系统，当 O 是单切结点，双切结点或鞍点时，其

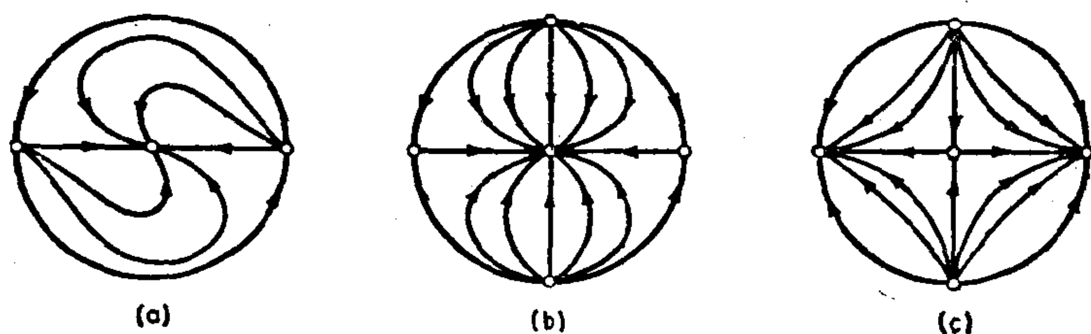


图 38

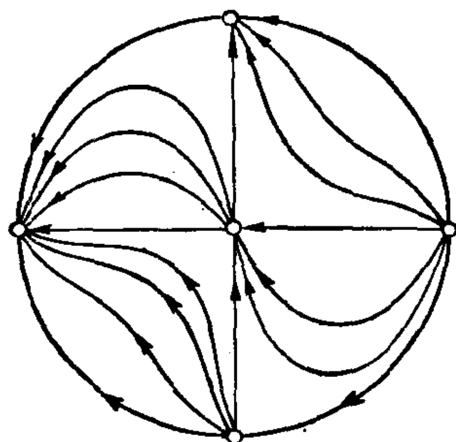
球面上图形依次如图 38(a), (b), (c) 所示.

(c) 作为最后一个例子,考虑系统 (§ 2.6(d))

$$\dot{x}=xy-x^2,\quad \dot{y}=y^2. \tag{2.5.14}$$

此时

$$n=p=q=2,\quad A(u,v,z)=-zv^2,$$
$$B(u,v,z)=(uv-u^2)z,\quad C(u,v,z)=u^2v.$$


图 39

对应于系统 (2.5.9) 在赤道上的点是 (1, 0, 0), (0, 1, 0). 而且，由于这两点分别是属于第二类正规角域(在§ 2.5(c)的条件下)和第三类正规角域中的不变射线上的无穷远点,故由(a)与(2.5.14)得知 x 轴上的无穷远点为星形结点， y 轴上的无穷远点为鞍-结点. 球面上的图形如图 39 所示.

(d) Poincaré 球面对研究无穷远点的更进一步应用见第六章 § 3.8.

补　　充

1. Kestin-Zaremba 方程

在研究二维自治系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y)$$

的轨线在无穷远处的性态时，有时作变换（反圆变换）

$$x = \xi(\xi^2 + \eta^2)^{-1}, \quad y = \eta(\xi^2 + \eta^2)^{-1}$$

将是有用的，这个变换将 x, y 平面上的无穷远点变为 ξ, η 平面上的原点。

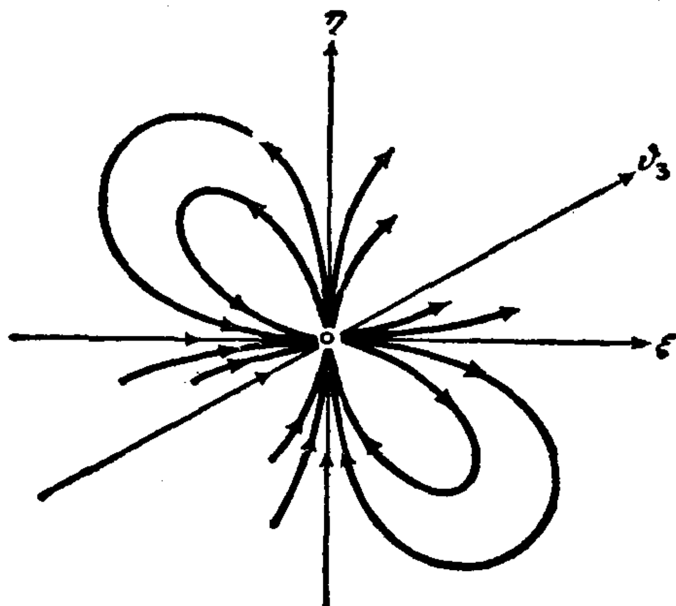


图 40

这样的变换曾由 J. Kestin-S. K. Zaremba 用来讨论出现在绝热流的研究中的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y(my - G^2x)}{1 - py + pG^2x^2} \quad (m, p, q, G \text{ 为正常数}) \qquad (1)$$

（见 Geometrical methods in the analysis of ordinary differential equations, *Appl. Sci. Res.*, *Sec.* B. 3, 149—189(1953)）. 变换后的方程为

$$\begin{aligned} d\eta[X_4(\xi, \eta) &- p\eta(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 + \eta^2) \\ &+ (\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 + \eta^2)^2] = d\xi[Y_4(\xi, \eta) \\ &- 2p\xi\eta^2(\xi^2 + \eta^2) + 2\xi\eta(\xi^2 + \eta^2)^2], \end{aligned} \qquad (2)$$

其中

$$X_4(\xi, \eta) = qG^2\xi^2(\xi^2 - \eta^2) + 4\xi\eta^2(m\eta - G^2\xi),$$
$$Y_4(\xi, \eta) = 2qG^2\xi^3\eta + 2\eta(\eta^2 - \xi^2)(m\eta - G^2\xi).$$

从(2)或者倒不如说从简化方程

$$X_4(\xi, \eta)d\eta - Y_4(\xi, \eta)d\xi = 0$$

的轨线的性态就有可能推得(1)在无穷远处的轨线的某些结论.

如果我们限于只考虑以O为顶点,半直线

$$\xi = 0, \ \eta = 0, \ \theta = \theta_3, \ \theta = \theta_3 + \alpha \ \ (0 < \theta_3 < \alpha/2)$$

为边的小扇形域,则这样做是可行的. 这里

$$\theta_3 = \arc\tan[(q+2)G^2/(2m)]$$

(见图40).

2. 三阶常系数线性齐次系统

我们考虑线性齐次系统

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} x_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

其中 $a_{i,k}$ 为实数. 若 $\det(a_{i,k}) \neq 0$, 则原点为这系统的唯一奇点, 以 ρ_i 记这系统的特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

的根,借助于仿射变换可将该系统化为标准形状

$$\dot{x} = \rho_1 x, \quad \dot{y} = \rho_2 y, \quad \dot{z} = \rho_3 z.$$

因此

$$x = c_1 e^{\rho_1 t}, \quad y = c_2 e^{\rho_2 t}, \quad z = c_3 e^{\rho_3 t},$$

c_1, c_2, c_3 为任意常数. 于是轨线的性态可以分为五种情况来研究:

(i) ρ_1, ρ_2, ρ_3 为具同一符号的实数;

(ii) ρ_1, ρ_2, ρ_3 为实数,其中有两个具有同一符号;

(iii) 两个复根 $\rho_1 = r + is$, $\rho_2 = r - is$, $r \neq 0$, 一个实根, 其符号与 r 相同;

(iv) 两个是与(iii)相同的共轭复根, 一个实根的符号与 r 相反;

(v) 两个纯虚根.

H. Poincaré (Oeuvres, t. I. 169, 178) 依次称这五种情况为结

点，鞍点，焦点，鞍-焦点，中心(参看第八章)。

3. Jacobi 椭圆函数

考虑系统

(1) $\dot{x}=yz,\ \dot{y}=-zx,\ \dot{z}=-k^2xy,\ 0<k<1.$ x, y, z 轴上每一点都是这系统的奇点，这系统还有两个首次积分：

(2) $x^2+y^2=$ 常数；

(3) $k^2x^2+y^2=$ 常数.

因此这系统的轨线是圆柱面(2)与椭圆柱面(3)的交线，它们都是第一类的四次椭圆. 大家知道，系统(1)的具初值 $x(0)=0$, $y(0)=1$, $z(0)=1$ 的解完全刻划了 Jacobi 椭圆函数

$$x=\operatorname{sn} t, y=\operatorname{cn} t, z=\operatorname{dn} t,\ t=\int_0^{\operatorname{am} t}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

4. 三维空间中另一个非线系统 (E. Kasner, *Trans. Amer. Math. Soc.* 27, 155—162, (1925), L. Markus, *Contrib. to the theory of nonlinear oscillations*, Vol. 5 (1960), 185—213)。

直线

(1) $x=y=z$

上的点都是系统

(2) $\dot{x}=yz-x^2,\ \dot{y}=zx-y^2,\ \dot{z}=xy-x^2$

的奇点，这系统有首次积分

(3) $xy+yz+zx=c$ (c 为常数).

当 $c=0$ 时，方程(3)表示以(1)为轴的圆锥面，它的母线

$$x=\frac{\lambda}{t-t_0},\quad y=\frac{\mu}{t-t_0},\quad z=\frac{\nu}{t-t_0}$$

$$\lambda+\mu+\nu=1,\quad \lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda=0$$

为系统(1)的解.

当 $c>0$ 时，方程(3)表示单叶旋转双曲面；$c<0$ 时它表示绕直线(1)的双叶旋转双曲面. 通过这些双曲面上的点的所有轨线都与直线(1)有正的距离。

参 考 文 献

Bendixson, I.

[1] Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, **24**, 1—88 (1901), (59—61).

Bochner, S. and Martin, W. T.

[1] *Several complex variables* (Princeton 1948)

Briot, Ch. and Bouquet, J. C.

[1] Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles, *Jour. École Imp. Polyt.*, **21** (1856), 133—197.

Chazy, J.

[1] Sur les solutions périodiques d'un système différentiel au voisinage d'une position d'équilibre, *Jour. de Math. pures et appl.*, (9), **15**, 411—421 (1936), (418—419).

Dulac, H.

[1] Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. de France*, **51**, 45—188, (1923).

Forster, H.

[1] Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, *Math. Zeitsch.*, **43** (1938), 271—320.

Frommer, M.

[1] Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitstellen, *Math. Annalen*, **109**, 395—424 (1934), (411—414).

Lefschetz, S.

[1] *Lectures on differential equations*, Princeton, 1948.

[2] 微分方程几何理论(中译本),上海科技出版社,1965.

[3] Notes on differential equations, *Contrib. to the theory of nonlinear oscill.*, vol. 2, Princeton, 1952, pp. 61—73 (61—67).

Lyagina, L. S.

[1] The integral curves of the equation $y' = (ax^2 + bxy + cy^2)/(dx^2 + exy + fy^2)$, *Uspekhi Mat. Nauk*, VI, **2** (42), 171—183 (1951) (Russian).

Von Mises, R.

[1] Über den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung *Compositio Math.*, **6** (1939), 203—220.

Picard, E.

[1] *Traité d'Analyse*, t. III (3me éd., 1928), 221—223.

Poincaré, H.

[1] Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Jour. de Math. pures et appl.*, (3) **7** (1881), 375—422.

[2] *Oeuvres*, T. I. 12.

Sansone, G

[1] *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 1° (Bologna, 1941) 127.

Silov, G. E.

[1] Integral curves of first order homogeneous differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, V, **5** (39), 193—203, (1950)(Russian).

Tisserand, E.

[1] *Traité de Mécanique Céleste*, t. III (Paris, 1894), p.216.

第三章 Briot-Bouquet 奇点

考虑下列方程

$$dy/dx = Y(x, y)/X(x, y), \tag{3.0}$$

其中 $Y(x, y)$, $X(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域内是两个复变量 x, y 的全纯函数，在点 $x = x_0$, $y = y_0$ 有

$$X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0,$$

即 (x_0, y_0) 是 (3.0) 的奇点.

确切地说，首先是 Briot-Bouquet[1] 在复域内研究了方程(3.0)的奇点邻域内解的解析性态（我们将在§ 1.1 中说明）.

在§ 2 和§ 3 中，我们将给出关于复变量实值解的性态的 I. Bendixson 定理和 A. Wintner 定理.

有关这方面内容的系统论述和广泛的文献，建议读者参看 H. Dulac [1] 和 W. J. Trjitzinsky [1].

§ 1. 解析情形的 Briot-Bouquet 定理

1. 引言

(a) 考虑方程

$$dy/dx = Y(x, y)/X(x, y), \tag{3.1.1}$$

其中 $X(x, y)$, $Y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域内是两个复变量 x, y 的全纯函数.

若 $X(x_0, y_0) \neq 0$，由 Cauchy 定理（见 Sansone [1] 第三章 § 1.3, Hukuhara, Kimura, Matuda [1]），存在满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的唯一解 $y = y(x)$，它在 x_0 的某邻域内全纯. 但是，若 $X(x_0, y_0) = 0$，即若 $Y(x, y)/X(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有奇性，则此定理就不能应用. 我们先考虑情形

$$X(x_0, y_0) = 0, \quad Y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{3.1.2}$$

在本章的后面再考虑另一情形 $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$.

代替 (3.1.1)，考虑方程

$$dx/dy = X(x, y)/Y(x, y). \tag{3.1.3}$$

由于函数 $X(x, y)/Y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域内全纯，故 (3.1.3) 有满足条件 $x(y_0) = x_0$ 且在 y_0 的某邻域内为全纯的唯一解 $x = x(y)$，因此该解可表为

$$x - x_0 = a_1(y - y_0) + a_2(y - y_0)^2 + \cdots$$
$$(a_1, a_2, \cdots, \text{为常数}). \tag{3.1.4}$$

由 (3.1.3) 和 (3.1.2) 的第一个方程得知

$$0 = (dx/dy)_{y=y_0} = a_1.$$

现在假定 $x - x_0 \not\equiv 0$，a_m 为 (3.1.4) 右端的级数中第一个不等于零的系数，于是我们有

$$x - x_0 = a_m(y - y_0)^m + a_{m+1}(y - y_0)^{m+1} + \cdots \quad (a_m \neq 0),$$

由此，

$$y - y_0 = b_1[\omega^k(x - x_0)^{1/m}] + b_2[\omega^k(x - x_0)^{1/m}]^2 + \cdots$$
$$\omega = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m) \quad (k = 0, 1, \cdots, m - 1).$$

(见 G. Sansone 与 J. Gerretsen [1] 第 160 页).

因而，点 (x_0, y_0) 是解 $y = y(x)$ 的一个代数临界点. $y - y_0$ 的根是 $x - x_0$ 的同一个解析函数的 m 个分支. 我们可以证明，除了这 m 个分支以外，不再存在当 x 沿着某条路径趋于 x_0 时趋于 y_0 的解 y (见 L. Koenigoberger [1]).

(b) 如果 (3.1.4) 中的 $x - x_0$ 恒等于零，则对一切 y，$X(x_0, y) = 0$，尽管这时 (3.1.1) 不存在满足 $y(x_0) = y_0$ 的形如 $y = y(x)$ 的解，但方程 (3.1.3) 仍有解 $x = x_0$. 例如 $dy/dx = 1/x$ 有解 $y(x) = c + \log x$ (c 为常数)，这些解在 $x = 0$ 处变为无穷. 每个解 $y(x)$ 有无穷多个确定值，它们彼此相差 $2\pi i$ 的整数倍，因此原点是 $y(x)$ 的无穷级的临界点.

作为另一个例子，考虑方程 $dy/dx = \lambda x^{-\alpha}y^{-\beta}$，$\alpha$，$\beta$ 为正整数，$\alpha > 1$，λ 为非零常数. 分离变量再积分之，得

$$y^{\beta+1} = c - \lambda(\beta+1)(\alpha-1)^{-1}x^{1-\alpha},$$

c 为常数，这方程没有当 $x \to 0$ 时趋于有限极限的解.

关于方程 $dy/dx = Y(x, y)x^{-\alpha}y^{-\beta}$ 的研究，其中 α, β 为实数，$\alpha \geqslant 1$，$\beta \geqslant -1$，$Y(0, 0) = \lambda \neq 0$，$Y(x, y)$ 在原点邻域内全纯，可以参看 M. Hukhara [1].

(c) 最后，若 $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$，如有必要，我们就将方程 (3.1.3) 写成 $X(x, y)dy = Y(x, y)dx$ 的形状，而称满足此方程的函数 $y = y(x)$ 或者 $x = x(y)$ 为这方程的解. 因此，对应于(b)中考虑过的第一个例子中的方程 $xdy = dx$ 有解 $x = 0$.

2. p 不为正整数时的 Briot-Bouquet 方程. 全纯解的研究

(a) Ch. Briot 与 J. C. Bouquet 在他们的经典论文(见 Briot-Bouquet [1]) 中，研究了方程

$$xdy/dx = qx + py + \varphi(x, y), \tag{3.1.5}$$

其中 p，q 为实或复的常数，$\varphi(x, y)$ 在区域

$$D: \ |x| < R, \quad |y| < R'$$

内全纯(x, y 为复变量)，这就是说，对$(x, y) \in D$ 有

$$\varphi(x, y) = \sum_{i+k \geqslant 2} A_{i,k}x^i y^k \tag{3.1.6}$$

($A_{i,k}$ 为实或复的常数).

我们来确定方程 (3.1.5) 是否有满足条件 $y(0) = 0$ 的全纯解 $y(x)$，这就是说是否有形如

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \tag{3.1.7}$$

的解，其级数有非零的收敛半径.

若 $\varphi(x, y)$ 恒等于零，即这时方程为 $xdy/dx = qx + py$，这个问题是容易解决的，因为若 $p \neq 1$，则此方程的解为 $y = qx/(1-p) + cx^p$，c 为任意常数，$c = 0$ 时这解是全纯的. 若 p 不是正整数，则只有一个在 $x = 0$ 处等于零的全纯解，即对应于

$c=0$ 的解. $p=0$ 的情况类似. 另一方面,若 p 是正整数($p\neq 1$),则所有的解都全纯,且在 $x=0$ 处等于零. 若 $p=1$,则该方程的解为 $y=qx\log x+cx$, c 为常数. 因此,若 $q\neq 0$,则没有在 $x=0$ 处等于零的全纯解; 若 $q=0$,则一切解都是全纯的,当 $x=0$ 时它们都等于零.

现在,如果 $\varphi(x,y)$ 不恒等于零,将 (3.1.7) 代入 (3.1.5),得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n = qx+\sum_{n=1}^{\infty} pc_nx^n+\sum_{i+k\geqslant 2} A_{i,k}x^i\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n\right)^k,$$

比较这方程的两端,我们可得

$$(1-p)c_1=q, \tag{3.1.8.1}$$

$$(2-p)c_2=A_{2,0}+A_{1,1}c_1+A_{0,2}c_1^2, \tag{3.1.8.2}$$

一般地有

$$(n-p)c_n=P_n(A_{i,k},\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n-1}),\ (2\leqslant i+k\leqslant n), \tag{3.1.8.n}$$

其中 P_n 是 $\varphi(x,y)$ 的系数 $A_{i,k}$ 和 y 的系数 $c_1, c_2,\cdots, c_{n-1}$ 的正整数系数多项式.

如果我们假定 p 不是正整数,则公式 (3.1.8) 足以唯一地确定常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$. 于是,为了证明 (3.1.5) 有在 $x=0$ 处等于零的唯一的全纯解,我们来证明,对于由 (3.1.8) 所确定的常数值 c_n,级数 (3.1.7) 有非零的收敛半径.

为此,我们用 Cauchy 的优函数法(参看 Sansone [1] 第三章 § 1.3). 设 $Qx+\Phi(x,y)$ 是区域

$$D':\ |x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad (a<R,\ b<R')$$

中 $qx+\varphi(x,y)$ 的优函数,即

$$\Phi(x,y)=\sum_{i+k\geqslant 2} A'_{i,k}x^iy^k,$$

其中 $A'_{i,k}$ 与 Q 为实数,且 $|q|\leqslant Q$, $|A_{i,k}|\leqslant A'_{i,k}$.

现在令 $M=\max|qx+\varphi(x,y)|$,对 $|x|=a$, $|y|=b$. 于是我们可取

$$Qx+\Phi(x,y)=M(1-x/a)^{-1}(1-y/b)^{-1}-M-My/b.$$

再令 B 是满足[*]

$$1/|n-p| \leqslant B^{-1} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{3.1.9}$$

的正常数，于是方程

$$B^{-1}Y = M(1-x/a)^{-1}(1-Y/b)^{-1} - M - MY/b \tag{3.1.10}$$

有根

$$Y = b\,\frac{B^{-1}b(1-x/a)-(1-x/a)^{1/2}[B^{-2}b^2-x(B^{-1}b+2M)^2/a]^{1/2}}{2(1-x/a)(M+B^{-1}b)}. \tag{3.1.11}$$

当 $|x| < aB^{-2}b^2/(B^{-1}b+2M)^2 = a^*$ 时函数 $Y(x)$ 全纯，且在 $x=0$ 处等于零. 现在如果设

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n,$$

我们来确定 C_n，使得 (3.1.10) 对 $|x| < a^*$ 恒满足，则得知常数 $C_1, C_2, \cdots$ 满足关系式

$$B^{-1}C_1 = M/a,\ B^{-1}C_2 = M/a^2 + MC_1/(ab) + MC_1^2/b^2, \cdots.$$

由于 (3.1.8)，我们有 $|c_n| \leqslant C_n$，因此级数(3.1.7)有非零的收敛半径. 从而，我们有:

定理 1. 若关于 $\varphi(x,y)$ 的假设都满足，且 p 不是正整数，则 (3.1.5) 在 $x=0$ 的邻域内有唯一的满足初值条件 $y(0)=0$ 的全纯解.

我们指出，如果在 (3.1.5) 中 $q=0$，p 为实数，$0<p<1$，又若例如有 $\varphi(x,y)=A_{2,0}x^2+A_{1,1}xy$，$A_{2,0}$，$A_{1,1}$ 为实数，则 §3 中的 A. Wintner 的第一定理的所有条件都得到满足，因此这方程有形如 $y=cx^p+o(x^p)$ 的解，c 为任意常数. 但是这些解中只有对应于 $c=0$ 的那个解才是全纯的.

3. p 为正整数的情形. 全纯解的存在性

(a) 首先假定 $p=1$，于是

---

[*] 这里以及下面几行中的 B^{-1}，B^{-2} 原文都为 B，B^2.——译者注

$$xdy/dx = qx + y + \varphi(x, y), \tag{3.1.12}$$

设对 $|x| < R$, $|y| < R'$ 通常的假设 (3.1.6) 成立. 于是由 (3.1.8.1) 得 $q = 0$, 故有

定理 2. 若 $q \neq 0$, 则方程 (3.1.12) 没有在 $x = 0$ 处等于零的全纯解 $y(x)$.

现在令 $p = 1$, $q = 0$, 于是方程 (3.1.5) 成为

$$xdy/dx = y + \varphi(x, y). \tag{3.1.13}$$

假设由级数 (3.1.7) 给出的解 $y(x)$ 其系数 c_n 由方程(3.1.8)所确定. 由 (3.1.8.1), c_1 可任意取值. 对每一固定的 c_1, 令

$$M = \max|\varphi(x, y)|, \text{ 对 } |x| = a < R, \quad |y| = b < R'.$$

如有必要就调整M值使得$|c_1| < M/a$. 于是,由不等式 $1/(n-1) \leqslant 1 (n = 2, 3, \cdots)$以及§ 1.2 中对 $B = 1$ 的情形关于方程(3.1.10)的推理,得知对于级数

$$c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n,$$

相应地有另一个具非零收敛半径的幂级数

$$C_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} C_n x^n, \quad |c_n| < C_n.$$

因此,级数

$$c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

也有非零收敛半径,从而我们有:

定理 3. 方程 (3.1.13) 有无穷多个形如

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

的全纯解,其中 c_1 为任意常数.

(b) 现在假定方程 (3.1.5) 中的 p 是大于 1 的正整数. 作变量代换 $y = qx/(1-p) + xz$, 其中 z 为新因变量. 于是此方程变为 $x^2 dz/dx = (p-1)xz + \varphi(x, [q/(1-p) + z]x)$, 或者除以 x 得 $xdz/dx = q_1 x + (p-1)z + \varphi^*(x, y)$. 由此, 我们得到

一个形式与(3.1.5)相同的方程，只是将原来的系数 p 换成 $p-1$.

由于按假定 p 是正整数，因此经有限次代换后，我们就可以得到 (a) 中所考虑过的方程，从而有：

定理 4. 若 p 为正整数，则方程 (3.1.5) 或者没有当 $x=0$ 时为零的任何全纯解，或者有无穷多个这类解.

4. $p=0$ 时方程的解

(a) 现在我们进一步来考查 $p=0$ 时的方程(3.1.5)，即方程

$$xdy/dx=qx+\varphi(x,y), \tag{3.1.14}$$

其中假定 $\varphi(x,y)$ 满足§ 1.1 中所述的假设(见 E. Picard [1]).

设 $y=y_0(x)$ 是当 $x=0$ 时为零的全纯解(定理 1)，我们来求一切其它的解.

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=2}^{\infty}h_nx^n$$

的情形是容易处理的，这时方程的通积分为

$$y=c+qx+\sum_{n=2}^{\infty}h_nx^n/n \qquad (c \text{ 为常数}).$$

如果我们令

$$y=y_0+z, \tag{3.3.15}$$

则有

$$x\frac{dz}{dx}=z\left(\frac{1}{1!}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=y_0}+\frac{z}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\bigg|_{y=y_0}+\cdots\right),$$

假定这个方程右端的括号中有不含 x 的项，则有

$$xdz/dx=z(Az^m+Bx+\cdots),$$

其中 Az^m $(m\geqslant 1,\ A\neq 0)$ 表示 z 的最低次项，于是我们有

$$\frac{dx}{dz}=\frac{x}{z(Az^m+Bx+\cdots)},$$

若作变换

$$x=\lambda z^{m+1}, \tag{3.1.16}$$

则得

$$(m+1)\lambda z^m + z^{m+1}\frac{d\lambda}{dz} = \frac{\lambda z^{m+1}}{z(Az^m + B\lambda z^{m+1} + \cdots)},$$

由此得

$$z^{m+1}d\lambda/dz = \lambda\phi(\lambda, z), \tag{3.1.17}$$

其中 $\phi(\lambda, z)$ 是原点邻域内的全纯函数,且 $\phi(0, 0) = 1/A \neq 0$.

(3.1.17) 也可写为

$$z^{m+1}d\lambda/dz = \lambda\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \lambda f(\lambda, z)\right], \tag{3.1.18}$$

其中的级数有非零的收敛半径. 我们有 $a_0 \neq 0$, 且 $f(\lambda, z)$ 在 $\lambda = 0$, $z = 0$ 的邻域内是 λ, z 的全纯函数.

如果我们令

$$\lambda = we^{-\varphi(z)}z^{a_m} \quad (m \geqslant 1), \tag{3.1.19.1}$$

其中

$$\varphi(z) = a_0 z^{-m}/m + a_1 z^{-m+1}/(m-1) + \cdots + a_m, \tag{3.1.19.2}$$

则得

$$z^{m+1}w^{-1}dw/dz = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^k + we^{-\varphi(z)}z^{a_m}f(we^{-\varphi(z)}z^{a_m}, z),$$

或者

$$dw/dz = w\left[\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^{k-m-1} + we^{-\varphi(z)}z^{a_m-m-1}f(we^{-\varphi(z)}z^{a_m}, z)\right]. \tag{3.1.20}$$

现在命 z 沿着某条路径趋于零,使得 $e^{-\varphi(z)}z^{a_m}$ 趋于零,并且取 (3.1.20) 的解 $w(z)$, 使得当 z 按刚才所规定的方式趋于零时, $w(z)$ 趋于任意固定的常数 w_0. 于是由 (3.1.16), (3.1.19) 得知,当 z 绕原点无限多次而趋于零时,相应的值 $x = wz^{a_m+m-1}e^{-\varphi(z)}$ 趋于零. 最后,由 (3.1.15) 我们得到:

定理 5. 在原有关于 $\varphi(x, y)$ 的假设下, (3.1.14) 存在满足条件 $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$ 的无穷多个解 $y(x)$, 但其中只有一个解 (亦即定理 1 中所指的那个解) 是全纯的.

(b) 这一节的结果应该与第五章§ 4 相对照.

§ 2. 在解析情形下,把具有一个孤立奇点的微分方程化为标准型 关于第二类简化方程的轨线性态的 Bendixson 定理

1. 第一类和第二类简化型式[1)]

(a) 与通常一样,我们假定 $x=0$, $y=0$ 是方程

$$dy/dx = Y(x, y)/X(x, y) \tag{3.2.1}$$

的孤立奇点, X 与 Y 为在该点邻域内的复变量的全纯函数.设

$$X = A'y^{\alpha'}x^{\beta'} + \cdots, \quad Y = Ay^{\alpha}x^{\beta} + \cdots,$$

其中 X 与 Y 表达式中的第一项或这两项之一表示 x 的最低次项.

现在我们要来断定(3.2.1)是否有关于 x 为 μ 次幂的解 $y(x)$, 即是否有形如

$$y(x) = v(x)x^{\mu} \quad (\mu > 0) \tag{3.2.2.1}$$

的解,其中

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = v_0 \quad (v_0 \neq 0). \tag{3.2.2.2}$$

为此,我们作变换 $x=\tau^p$, $y=v\tau^q$ (p, q 为互质的整数),通过这种变换和线性变换总可将方程 (3.2.1) 化为另一种形式

$$\tau^{\lambda}dv/d\tau = \alpha\tau + \beta v + \Sigma_2, \tag{3.2.2.3}$$

其中 Σ_2 表示关于 τ 和 v 的次数 $\geqslant 2$ 的各项之和, λ 表示正整数(比较下面的方程 (3.2.13.1), (3.2.13.2), (3.2.14)).

关于 $\lambda=1$ 的方程 (3.2.2.3) 在上一节已经讨论过了. $\lambda=2$, $\Sigma_2=0$ 的情形将在§ 2.1 末尾讨论; 在实数域内 $\lambda>1$ 的情形,将根据 I. Bendixson 的论述在§ 2.2 中加以讨论.

(b) 将 (3.2.2.1) 代入 (3.2.1), 得

$$(A'v^{\alpha'}x^{\mu\alpha'+\beta'} + \cdots)(\mu v x^{\mu-1} + x^{\mu}dv/dx) = Av^{\alpha}x^{\mu\alpha+\beta} + \cdots. \tag{3.2.3}$$

---

1) 见 Ch. Briot-J. C. Bouquet[1], A. R. Forsyth[1] 第五章第 83—140 页; H. Dulac[2] 第 107—177 页; E. Lahaye[1].

现在我们希望确定 μ，使得 (3.2.3) 式关于 x 最低次幂中至少有两项含有公因子 x^m. 正如 (d) 中我们将看到的，这正是为了得到所希望的简化型式的出发点.

若上述问题中的两项分别出现在 (3.2.3) 左右两端，则所要求的 μ 由下列方程所确定：

$$\mu\alpha' + \beta' + \mu - 1 = \mu\alpha + \beta = m. \tag{3.2.4.1}$$

反之，若问题中的两项都出现在左端，或者都出现在右端，则 μ 分别由下列方程所确定：

$$\mu\alpha' + \beta' + \mu - 1 = \mu\alpha'_1 + \beta'_1 + \mu - 1 = m, \tag{3.2.4.2}$$

$$\mu\alpha + \beta = \mu\alpha_1 + \beta_1 = m. \tag{3.2.4.3}$$

因此，所求之 μ 为下列三式之一：

$$\mu = (\beta + 1 - \beta')/(\alpha' + 1 - \alpha), \tag{3.2.5.1}$$

$$\mu = (\beta'_1 - \beta')/[(\alpha' + 1) - (\alpha'_1 + 1)], \tag{3.2.5.2}$$

$$\mu = [(\beta_1 + 1) - (\beta + 1)]/(\alpha - \alpha_1). \tag{3.2.5.3}$$

方程 (3.2.5.1) 中要求 $\alpha' + 1 - \alpha \neq 0$. 在上述任何情况下，$\mu$ 显然都是有理数.

(c) 为了作出最低次项的集合，Ch. Briot 与 J. C. Bouquet 利用了 Puiseux [1] 研究代数方程 $f(w, z) = 0$ 的方法.

取平面直角坐标系 ξ, η，并考虑以坐标 $(\alpha, \beta + 1)$, $\cdots$, $(\alpha' + 1, \beta')$, $\cdots$所构成的点集 G，其中各点的坐标分别对应于 Y 和 X 中各项的指数. 注意到 (3.2.5)，得知 (3.2.3) 中关于变量 x 为同次幂的项，对应着 G 中在同一直线上的点，反之亦然. 事实上，由 (3.2.5)，连接两个这种点的线段的斜率为 $-\mu$. 若通过 G 中的点 $(\alpha'' + 1, \beta'')$ 或点 $(\alpha'', \beta'' + 1)$，作一斜率为 $-\mu$ 的直线，则这直线方程分别为 $\eta - \beta'' = -\mu(\xi - \alpha'' - 1)$，或者 $\eta - \beta'' - 1 = -\mu(\xi - \alpha'')$，它们与 η 轴的交点的纵坐标分别为 $\beta'' + \mu(\alpha'' + 1)$ 或者 $\beta'' + \mu\alpha'' + 1$，其值比 (3.2.3) 中对应项的次数多 1. 由此可知，对应于斜率为 $-\mu$ 的平行线上的点的各项的幂次随着这些直线与原点的距离的增大而增加. 因此，通过 G 中与最低次幂相对应的那些点的直线，位于 G 中其它所有的点与原点

之间.

有了这些解释，我们将η轴平移到通过G中最靠近原先的η轴的点的直线上去，若这种点只有一个，我们就把它记作A_1；反之，若这种点多于一个，则把其中纵坐标最小者记为A_1.

接着我们将此直线绕A_1按逆钟向旋转，直至它通过G中另外的点，如果这种另外的点只有一个，我们就把它记作A_2，否则就将其中横坐标最大者*)记作A_2.

若这条直线的斜率$-\mu$不是负数，则我们就不能作变换(3.2.2.1)，即旋转中止(译者注)；反之，若$-\mu<0$，则可将直线A_1A_2绕A_2按逆钟向旋转直至碰到G中的第三点A_3，若G中在这直线上的点多于一个，则取其横坐标最大者为A_3.

如果这条直线的斜率为非负数，则这种步骤在A_2处停止，否则，这种步骤可继续进行下去而得到一个多边形$A_1, A_2, \cdots, A_{h+1}$，使得诸直线$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_hA_{h+1}$的同侧(即不包含0的一侧)都有$G$中的点，且都具负斜率.

以$-\mu_1, -\mu_2, \cdots, -\mu_h$记这些直线段的斜率，每个变换

$$y=v(x)x^{\mu_l} \quad (l=1, 2, \cdots, h)$$

都是所求的变换之一.

以$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_hA_{h+1}$为边的多边形可加上两条射线而使其完整，这两条射线分别从A_1和A_{h+1}出发同正η轴和正ξ轴同向平行.

我们用下面的例子来加以具体说明：若取方程

$$(y^2x^7-3x^9y+2y^{15}-x^{15})dy$$
$$-(x^3y^6-x^2y^8+2x^6y^7-4x^{16}y^5)dx=0,$$

则有有序数对(α', β')：(2, 7), (1, 9), (15, 0), (0, 15)和有序数对(α, β)：(6, 3), (8, 2), (7, 6), (5, 16). 对应的多边形的顶点为：η_∞, $A_1=(1, 15)$, $A_2=(2, 9)$, $A_3=(3, 7)$, $A_4=(6, 4)$, $A_5=(8, 3)$, $A_6=(16, 0)$, ξ_∞, 又边A_1A_2, A_2A_3,

---

*) 原书这里及以下两处均为横坐标最小者.——译者注

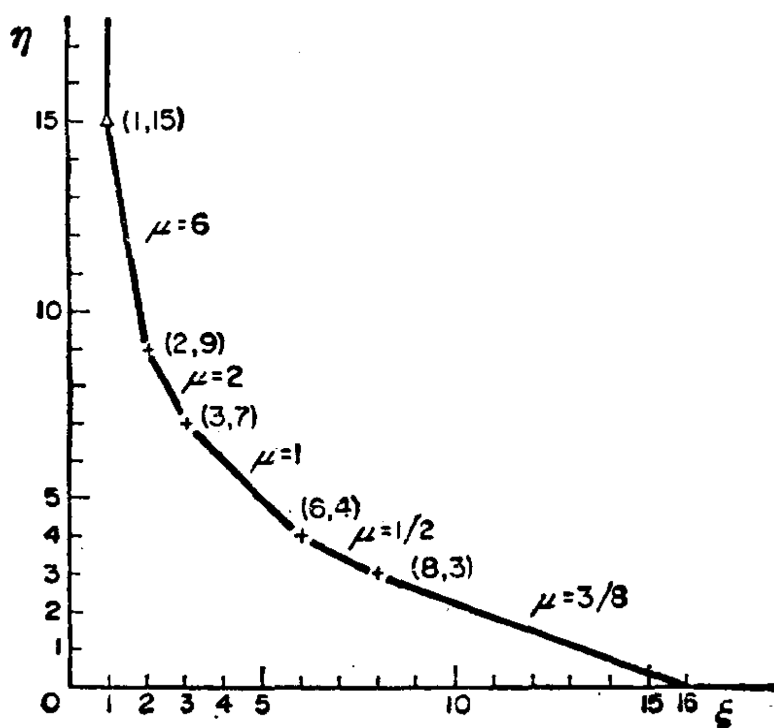


图 41

A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 的斜率分别为 -6, -2, -1, $-1/2$, $-3/8$ (图 41).

(d) 设 $-\mu$ 是 (c) 中所构造的多边形的一条边的斜率，令 $\mu = p/q$，其中 p, q 为互质的正整数. 在 (3.2.1) 中令

$$x = \tau^q, \quad y = v\tau^p \quad (p/q = \mu), \tag{3.2.6}$$

即得

$$(A'v^{\alpha'}\tau^{\alpha'p+\beta'q} + \cdots)(p\tau^{p-1}v + \tau^p dv/d\tau) \\ - (Av^{\alpha}\tau^{p\alpha+q\beta} + \cdots)q\tau^{q-1} = 0. \tag{3.2.7}$$

例如，若 (3.2.4.1) 成立，这个多边形的一条边以点 $(\alpha' + 1, \beta')$ 为一个顶点，另一个顶点在 $(\alpha, \beta + 1)$，于是由 (3.2.4.1) 有

$$p\alpha' + q\beta' + (p - q) = p\alpha + q\beta,$$

从而

$$p\alpha' + q\beta' + (p - 1) = p\alpha + q\beta + (q - 1);$$

若以 $\tau^{p\alpha+q\beta+q-1}$ 除 (3.2.7)，我们就得到下面形式的方程：

$$(V_0 + V_1\tau + \cdots)(pv + \tau dv/d\tau) = q(U_0 + U_1\tau + \cdots), \tag{3.2.8}$$

其中 $U_0, U_1, \cdots, V_0, V_1, \cdots$ 为 v 的多项式.

因而，(3.2.8) 可写为

$$(V_0+V_1\tau+\cdots)\tau dv/d\tau=F(v)+(qU_1-pvV_1)\tau+\cdots,\tag{3.2.9}$$

其中

$$F(v)=qU_0-pvV_0.\tag{3.2.10}$$

现在假定方程

$$F(v_0)=qU_0-pv_0V_0=0\tag{3.2.11}$$

有一个异于零的根 $v=v_0$，作变换

$$v=v_0+u.\tag{3.2.12}$$

由于 $F(v)=uF'(v_0)+u^2F''(v_0)/2!+\cdots$，如果我们假定 $F'(v_0)\neq 0$，$V_0|_{v=v_0}\neq 0$，(3.2.9) 就变成

$$\tau du/d\tau=\alpha\tau+\beta u+\Sigma_2,\tag{3.2.13.1}$$

其中 Σ_2 是 τ，u 的二次与高次项之和.

反之，若 $F'(v_0)=0$，又假定 $V_0|_{v=v_0}\neq 0$，则方程 (3.2.8) 变成

$$\tau du/d\tau=\alpha\tau+\Sigma_2,\tag{3.2.13.2}$$

(3.2.13.1)，(3.2.13.2) 构成了所谓**第一类简化型式**.

前面所提的问题是求方程 (3.2.1) 满足 (3.2.2.1) 和 (3.2.2.2) 的解. 借助于 (3.2.6) 和 (3.2.12)，这个问题就化为求简化方程 (3.2.13) 的满足条件 $\lim\limits_{\tau\to 0}u(\tau)=0$ 的解，而这一问题我们已在前面§ 1 中讨论过了.

总之，如果我们假定 $V_0|_{v=v_0}\neq 0$，则变换 (3.2.6)，(3.2.12) 将 (3.2.1) 化为简化型式 (3.2.13.1)，(3.2.13.2).

(e) 最后，假定

$$F'(v_0)\neq 0^{*)},\quad V_0|_{v=v_0}=0.$$

仍作变换 (3.2.12)，得

$$\tau du/d\tau^{**)}=(e'\tau+f'u+\cdots)/(e\tau+fu+\cdots).$$

若 $f'\neq 0$，借助于变换 $u=(-e'/f'+u_1)\tau$ 将变量 u 换成 u_1，我

*) 原书为 $F'(v_0)=0$.——译者注

**) 原文为 $du/d\tau$.——译者注

们得

$$\tau^2 du_1/d\tau = (f'\tau u_1 + \cdots)/[(ef' - fe')\tau/f' + \cdots],$$

若 $ef' - fe' \neq 0$，这方程就化为 $\tau^2 du_1/d\tau = \alpha_1\tau + \beta_1 u_1 + \Sigma_2$，此即所谓第二类简化型式，其中 Σ_2 为 τ, u_1 的高次项.

另一方面，若 $ef' - fe' = 0$，则用迭代法可得第二类简化方程

$$\tau^{m+1} du_m/d\tau = \alpha_m\tau + \beta_m u_m + \Sigma_2. \tag{3.2.14}$$

I. Bendixson 证明了方程 (3.2.1) 只可能化成 (3.2.13.1), (3.2.13.2) 和 (3.2.14) 这三种形式（见 I. Bendixson [1] 和 [2] 中第五章第 1—88 页).

(f) 显然原点是原方程 (3.2.14) 的奇点. 在保留解析性的假设下，我们将在下面§ 2.2 中在实数域内研究此方程. 作为§ 2.1 的结束，我们研究这类方程的一个特殊情形：

$$\tau^2 du/d\tau = \alpha\tau + \beta u, \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}, \ \beta \neq 0). \tag{3.2.15}$$

解此方程，即得

$$u = e^{-\beta/\tau}\left[\alpha\int \tau^{-1} e^{\beta/\tau} d\tau + c\right],$$

其中 c 为任意常数.

若 $\alpha = 0$ $(\beta \neq 0)$，则这方程的解为 $ce^{-\beta/\tau}$，原点是其本性奇点；若 $\alpha \neq 0$，则有

$$u = e^{-\beta/\tau}\{\alpha[\log\tau - \beta/(1!\tau) - \beta^2/(2!2\tau^2) - \cdots] + c\},$$

原点为其本性奇点和对数性奇点的叠加.

因此，方程 (3.2.15) 在 $\tau = 0$ 的邻域内没有全纯解. 这也可用下面方法加以说明，假设

$$u = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots + c_n\tau^n + \cdots,$$

且此级数有非零的收敛半径，则下面的恒等式成立：

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\tau^{n+1} = \beta c_0 + (\beta c_1 + \alpha)\tau + \beta\sum_{n=2}^{\infty} c_n\tau^n,$$

因此，

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -\alpha/\beta, \quad nc_n = \beta c_{n+1},$$

故

$$c_n = c_1(n-1)!/\beta^{n-1},$$

但是级数

$$c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\tau^n\beta^{1-n}$$

仅在 $\tau = 0$ 收敛.

2. I. Bendixson 关于第二类简化方程的轨线性态的结果

我们回到实数情形下的方程(3.2.14),以确定它是否存在趋于奇点(0, 0)的轨线,我们采用 I. Bendixson 的论述(见 I. Bendixson [1] 第 45—49 页,也可参看 E. Picard [1]). 因此可设

$$x^m dy = (ay + bx + P(x, y))dx, \qquad (3.2.16)$$

m 为 $\geqslant 2$ 的整数, a, b 为实常数, $a \neq 0$, $P(x, y)$ 在矩形域 $|x| \leqslant \alpha$, $|y| \leqslant \beta$ 内为实值连续函数, $P(0, 0) = 0$, 且

$$|P(x, y_2) - P(x, y_1)| = o(|y_2 - y_1|) \qquad (3.2.17)$$

在 $|x| \leqslant \alpha$ 内关于 x 一致成立.

此方程有解 $x = 0$, $y = 0$ 和半 y 轴 $x = 0$, $y > 0$; $x = 0$, $y < 0$; 现在我们来探讨原点附近其它解的性质.

如果我们假定在矩形区域 $|x| \leqslant \alpha$, $|y| \leqslant \beta$ 内 $P(x, y)$ 关于 x 和 y 有连续一阶偏导数,且 $P(x, y) = o((x^2 + y^2)^{1/2})$, 则这段的结果是第五章的一个特殊情形.

我们将按照 I. Bendixson [1] 而分为四种情况: (a) $a > 0$, m 为偶数; (b) $a < 0$, m 为偶数; (c) $a > 0$, m 为奇数; (d) $a < 0$, m 为奇数.

(a) 设 $a > 0$, m 为偶数.

由(3.2.17),我们有 $|P(0, y)| = o(|y|)$, 故可确定正数 δ_1, 使得有

$$a\delta_1 + P(0, \delta_1) > 0, \quad -a\delta_1 + P(0, -\delta_1) < 0, \qquad (3.2.18)$$

因此可取 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{aligned} &a\delta_1 + bx + P(x, \delta_1) > 0, \\ &-a\delta_1 + bx + P(x, -\delta_1) < 0, \quad 对\ |x| \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \qquad (3.2.19)$$

考察以 $x=0$, $x=\varepsilon$, $y=-\delta_1$, $y=\delta_1$ 为边的矩形（图42(a)）. 如果有轨线从边 $y=\delta_1$ 上的点 (x, δ_1), $x>0$ 离开这矩形，由(3.2.19)，在这点处有 $dy/dx>0$，从而当 x 减少时这轨线进入这区域. 类似地，若轨线从点 $(x_1, -\delta_1)$, $x_1>0$ 离开，则在此点有 $dy/dx<0$，从而当 x 减少时轨线进入区域 R.

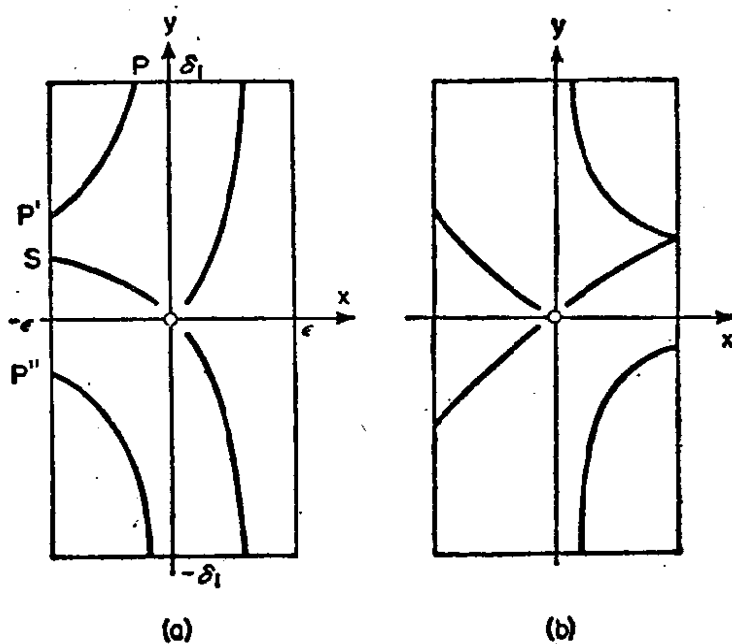


图 42

由(3.2.17)，唯一性定理得到保证. 故这些曲线既不与正 y 轴相交，也不与负 y 轴相交. 又因为通过 R 内的点的轨线可以向左延拓，因此所有通过 R 内的点的轨线都要趋于原点.

现在让我们来考虑以 $x=-\varepsilon$, $x=0$, $y=-\delta_1$, $y=\delta_1$ 为边的矩形 R_1. 设 $P=(x, \delta_1)$, $x<0$ 为 R_1 的边 $y=\delta_1$ 上的点，在该点有 $dy/dx>0$；从 P 点进入 R_1 的轨线可向左方延拓直到与边 $x=-\varepsilon$ 相交于一点 P' 为止. 对于从 R_1 的边 $y=-\delta_1$ 上的点进入 R_1 的轨线也有同样结论. 由此得知，若 P 在 R_1 的边 $y=\delta_1$ 上朝点 $(0, \delta_1)$ 连续移动，则 P' 的纵坐标（位于 $-\delta_1$ 与 δ_1 之间）具有下确界 s, $-\delta_1<s<\delta_1$.

容易看出，从 $S=(-\varepsilon, s)$ 出发的轨线趋于原点. 事实上，由唯一性定理它不可能与 y 轴相交，也不可能与 R_1 的上方的一条

边相交，因为否则，由解的连续性 s 就不可能是下确界了．同样的论述对下方的一条边也成立．

因此，我们求得了定义在 $[-\varepsilon, 0]$ 上且满足条件

$$\lim_{x\to-0} y_1(x) = 0$$

的轨线 $y = y_1(x)$．

我们希望证明，具备上述性质的轨线只有一条，也就是说，假定 $y = y_2(x)$ 是定义在 $[-\varepsilon, 0)$ 上且满足

$$\lim_{x\to-0} y_2(x) = 0$$

的另一条轨线，则有 $y_2(x) \equiv y_1(x)$．事实上，我们有

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = (y_1 - y_2)\frac{a}{x^m}\left[1 + \frac{P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))}{a(y_2 - y_1)}\right],$$

又由于(3.2.17)，可缩小 δ_1 和 ε，使得

$$\left|\frac{P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))}{a(y_2 - y_1)}\right| < \frac{1}{2},$$

于是有 $d\log|y_1 - y_2|/dx > ax^{-m}/2$，从 $-\varepsilon$ 到 x 积分之，即得

$$|y_2(x) - y_1(x)|/|y_2(-\varepsilon) - y_1(-\varepsilon)|$$
$$\geqslant \exp\left(\frac{a}{2(m-1)}[|x|^{1-m} - \varepsilon^{1-m}]\right),$$

而这是矛盾的，因为当 $x \to -0$ 时上式右端趋于 $+\infty$．

总之，原点既有结点性质，又有鞍点性质，这样的点称为**鞍-结点**（Poincaré 称为余结点（Col-noeud），见第五章）．

(b) 若 $a < 0$，m 为偶数，改 x 为 $-\xi$，就有与上相同的结论．

(c) 设 $a > 0$，m 为奇数．

(a) 中对 $a > 0$，m 为偶数的情形所得到的结果在 R 中仍然有效，所以从 R 中出发的一切轨线都趋于原点．再注意到变量代换 $x = -\xi$ 把(3.2.16)变成 $\xi^m dy/d\xi = ay - b\xi + P(-\xi, y)$，因而从 R_1 中出发的轨线当 $x \to -0$ 时也趋于原点，因此在所考虑的情况下所有的轨线都趋于原点（图 43）．

(d) 最后，设 $a < 0$，m 为奇数．

当 $x>0$ 时，(b) 中所得的结果均成立，当 $x<0$ 时 (a) 中所得的结果均成立(只需改 y 为 $-\eta$)，因而原点是鞍点(见第四章§4.3)，它的两条分界线是半轴 $y>0$ 和 $y<0$ (图 44).

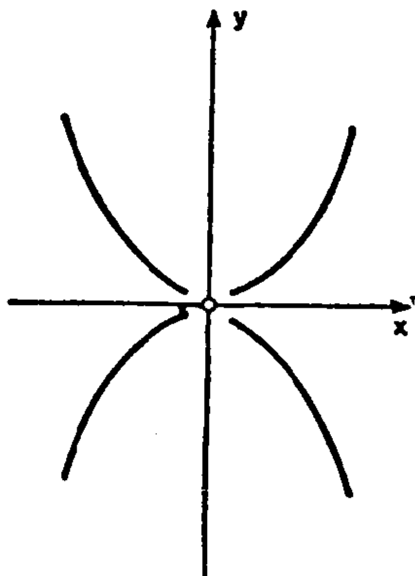


图 43

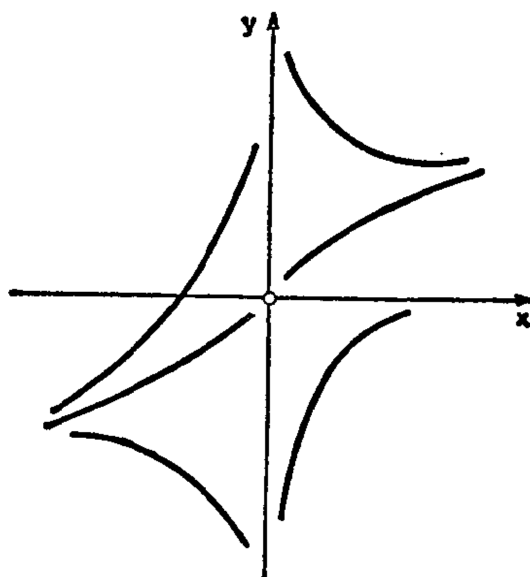


图 44

§3. 在实数域内 Briot-Bouquet 方程的结点情形. Wintner 定理

1. A. Wintner 引理

这一节我们在实数域内，对 $\varphi(x, y)$ 作很一般的假设下给出方程

$$xdy/dx = py + \varphi(x, y) \quad (p>0);$$
$$xdy/dx = x + y + \varphi(x, y)$$

的解的性质的两条 A. Wintner 定理(见 A. Wintner [1]). 如果 $\varphi(x, y)$ 是全纯函数，则这方程显然就是我们在 §1 中所讨论过的 Briot-Bouquet 型方程.

在讲后面要用到的引理之前，我们指出，如果引理中的条件 (3.3.1) 由更直接的条件 $\Phi(u, 0)=0$ 所代替，则这条引理的第一部分可由第一章 §1.2(c) 得出. 引理本身可推广到含有 n 个方程的方程组中去(见第九章§4).

引理 设实函数 $\Phi(u, v)$ 在半平面

$$S: u_0 < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty$$

上连续,且对某值 $u^0 > u_0$ 满足条件

$$\int_{u^0}^{+\infty} |\Phi(u, 0)| du < +\infty^{*)}, \quad (u^0 > u_0) \tag{3.3.1}$$

设另外还存在函数 $\lambda(u) \geqslant 0$, 使得对 $u \geqslant u^0$ 以及任意v_1, v_2满足

$$|\Phi(u, v_2) - \Phi(u, v_1)| \leqslant \lambda(u) |v_2 - v_1|, \tag{3.3.2}$$

$$\int_{u^0}^{+\infty} \lambda(u) du < +\infty. \tag{3.3.3}$$

在这些假设下,对任一给定的实数 v^0, 方程

$$dv/du = \Phi(u, v) \tag{3.3.4}$$

在区间 $[u^0, +\infty)$ 内由初值条件

$$v(u^0) = v^0 \tag{3.3.5}$$

所确定的解 $v = v(u)$ 有且只有一个,对这个解,极限

$$\lim_{u\to+\infty} v(u) = v(+\infty) = c \tag{3.3.6}$$

存在且有限.

反之,对给定的常数 c, 在区间 $[u^0, +\infty)$ 内方程 (3.3.4) 存在满足条件 $v(+\infty) = c$ 的唯一解.

其次,由条件 $v(+\infty) = c$ 所确定的 (3.3.4) 的解 $v = v(u)$ 关于 c 连续.

(3.3.4) 的解的唯一性由假设 (3.3.2) 和条件 (3.3.3) 所保证(第一章定理 8). 因此只需证明解在 $[u^0, +\infty)$ 内存在,并且满足条件 (3.3.6).

为此,假设这个解对

$$u^0 \leqslant u < u^+ < +\infty$$

有定义.

因为,

---

*) 这里以及后面的积分下限原书都为 u_0. ——译者注

$$v(u)=v^0+\int_{u^0}^{u}\Phi(\xi,v(\xi))d\xi$$
$$=v^0+\int_{u^0}^{u}\Phi(\xi,0)d\xi+\int_{u^0}^{u}\{\Phi(\xi,v(\xi))-\Phi(\xi,0)\}d\xi, \tag{3.3.7}$$

由 (3.3.2) 得知

$$|v(u)|\leqslant|v^0|+\int_{u^0}^{u}|\Phi(\xi,0)|d\xi+\int_{u^0}^{u}\lambda(\xi)|v(\xi)|d\xi,$$

再由 Gronwall 引理(第一章§ 2.1)得

$$|v(u)|\leqslant(|v^0|+A)e^B=M_0, \tag{3.3.8}$$

其中 A,B 分别指 (3.3.1) 和 (3.3.3) 这两个积分．由此我们看到，$v(u)$可延拓到 u^+ 以外，从而 $u^+=+\infty$，因而对 $u^0\leqslant u<+\infty$ (3.3.8)成立．

其次，对于给定的 $\sigma>0$，由 (3.3.1)，(3.3.3) 得知存在 $\bar{u}\geqslant u^0$，使得对于满足 $\bar{u}\leqslant u'<u''$ 的任何一对值 u',u''，都有

$$\int_{u'}^{u''}|\Phi(\xi,0)|d\xi<\sigma,\quad \int_{u'}^{u''}\lambda(\xi)d\xi<\sigma.$$

因此，由 (3.3.7) 和 (3.3.8) 得知 $|v(u')-v(u'')|\leqslant\sigma(1+M_0)$．最后，由 Cauchy 定理就得到 (3.3.6)．

反之，我们来证明，对于给定的常数 c，满足 (3.3.6) 的解只有一个．事实上，设 q 是小于 1 的正数，取 $\bar{u}$ 使得

$$\int_{\bar{u}}^{+\infty}\lambda(u)du<q<1,$$

再在区间 $(\bar{u},+\infty)$ 内考虑积分方程

$$v(u)=v(+\infty)-\int_{u}^{+\infty}\Phi(u,v(u))du, \tag{3.3.9}$$

并用逐次逼近法来解此方程：令

$$v_0(u)=c, \tag{3.3.10.0}$$

$$v_n(u)=v(+\infty)-\int_{u}^{+\infty}\Phi(u,v_{n-1}(u))du$$
$$(n=1,2,\cdots). \tag{3.3.10.n}$$

显然

$$v_1(u)-v_0(u)=-\int_u^{+\infty}\Phi(\xi,v_0)d\xi$$

$$=-\int_u^{+\infty}\Phi(\xi,0)d\xi+\int_u^{+\infty}[\Phi(\xi,0)-\Phi(\xi,v_0)]d\xi,$$

$$|v_1(u)-v_0(u)|\leqslant\int_{\bar u}^{+\infty}|\Phi(\xi,0)|d\xi+|c|\int_{\bar u}^{+\infty}\lambda(\xi)d\xi=C.$$

类似地，

$$|v_2(u)-v_1(u)|=\left|\int_u^{+\infty}(\Phi(\xi,v_0)-\Phi(\xi,v_1))\,d\xi\right|\leqslant C\int_{\bar u}^{+\infty}\lambda(\xi)d\xi=Cq.$$

由归纳法得

$$|v_n(u)-v_{n-1}(u)|\leqslant Cq^{n-1}\quad(n=2,3,\cdots).$$

因此，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n(u)$ 存在，且这个极限的收敛性对$(u,+\infty)$中的 u 一致地成立．其次，因为

$$\left|\int_u^{+\infty}\Phi(\xi,v_{n-1}(\xi))d\xi-\int_u^{+\infty}\Phi(\xi,v(\xi))d\xi\right|$$

$$\leqslant\max_{(\bar u,+\infty)}|v_{n-1}(u)-v(u)|\int_{\bar u}^{+\infty}\lambda(u)du,$$

故对(3.3.10.n)可在积分号下取极限，从而立刻求得(3.3.9)．

注意到所找到的解可以由 $\bar u$ 向左延拓到 u^0，便完成了这个引理的证明．

剩下的要证明 $v(u)$ 关于 $v(+\infty)$ 的连续依赖性，这意思是说，如果 $v_1(u)$ 和 $v_2(u)$ 是(3.3.4)对应于常数 $v_1(+\infty)$，$v_2(+\infty)$ 的两个不同的解，则差 $r(u)=|v_1(u)-v_2(u)|$ 当 $r(+\infty)$ 趋于零时一致地趋于零．下面这个证明是 C. L. Siegel 给出的(见 A. Wintner [2] 第131—132页)．

由唯一性定理得知 $r(u)\neq0$，因此

$$\left|\frac{d\log r(u)}{du}\right|=\left|\frac{[v_1(u)-v_2(u)]'}{v_1(u)-v_2(u)}\right|$$

$$=\left|\frac{v_1'(u)-v_2'(u)}{v_1(u)-v_2(u)}\right|=\left|\frac{\Phi(u,v_1(u))-\Phi(u,v_2(u))}{v_1(u)-v_2(u)}\right|,$$

再由 (3.3.2) 得 $-\lambda(u) \leqslant d\log r(u)/du \leqslant \lambda(u)$. 现在令

$$\int_{u^0}^{+\infty} \lambda(u)du = B,$$

则对于 $u \geqslant u^0$, 我们有

$$-B \leqslant \log(r(+\infty)/r(u)) \leqslant B,$$

$$0 < e^{-B}r(u) < r(+\infty) < e^{B}r(u).$$

因此,当 $r(+\infty)$ 趋于零时, $r(u)$ 也一致地趋于零,引理得证.

2. A. Wintner 第一定理

定理 6. (A. Wintner 第一定理) 设函数 $\varphi(x, y)$ 在矩形 R: $0 < x < a$, $-b < y < b$ 内连续,且存在常数 $p > 0$, 使得

$$\int_{+0} x^{-1-p}|\varphi(x, 0)|dx < +\infty^{1)}. \tag{3.3.11}$$

其次,假定对每一 $x \in (0, a)$ 有

$$|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| \leqslant \mu(x)|y_1 - y_2|, \tag{3.3.12}$$

其中

$$\int_{+0} \frac{\mu(x)}{x} dx < +\infty. \tag{3.3.13}$$

在这些假设下,可确定两个常数 $a_1, b_1, 0 < a_1 < a, 0 < b_1 < b$, 使得如果 $y = y(x)$ 是方程

$$xdy/dx = py + \varphi(x, y) \tag{3.3.14}$$

从矩形 R: $0 < x \leqslant a_1$, $-b_1 \leqslant y \leqslant b_1$ 中任一点 (x_0, y_0) 出发的解,则此解在 $(0, x_0]$ 内存在且当 $x \to 0^+$ 时 $\lim y(x) = 0$.

此外,存在常数 c, 使得当 $x \to 0^+$ 时

$$y(x) = cx^p + o(x^p). \tag{3.3.15}$$

反之,对任一固定的常数 c, 方程 (3.3.14) 有满足条件 (3.3.15) 的解.

设 $\bar{a}, \bar{b}$ 为两个正数, 使得 $0 < \bar{a} < a$, $0 < \bar{b} < b$. 定义函

---

1) 公式 (3.3.11) 中的符号 $\int_{+0} \cdots dx < +\infty$ 表示对固定的 a_1, $0 < a_1 < a$, 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时 $\int_{\varepsilon}^{a_1} \cdots dx$ 的极限存在且有限.

数 $\bar{\varphi}(x, y)$ 如下:

$$\bar{\varphi}(x, y)=\varphi(x, y), \text{ 对 } 0<x\leqslant\bar{a}, |y|\leqslant\bar{b}, \tag{3.3.16.1}$$

$$\bar{\varphi}(x, y)=\varphi(x, \bar{b}), \text{ 对 } 0<x\leqslant\bar{a}, \ y>\bar{b}, \tag{3.3.16.2}$$

$$\bar{\varphi}(x, y)=\varphi(x, -\bar{b}), \text{ 对 } 0<x\leqslant\bar{a}, \ y<-b. \tag{3.3.16.3}$$

则 $\bar{\varphi}(x, y)$ 在带域 $\bar{S}$: $0<x\leqslant\bar{a}, -\infty<y<+\infty$ 内满足条件 (3.3.11) 与 (3.3.12).

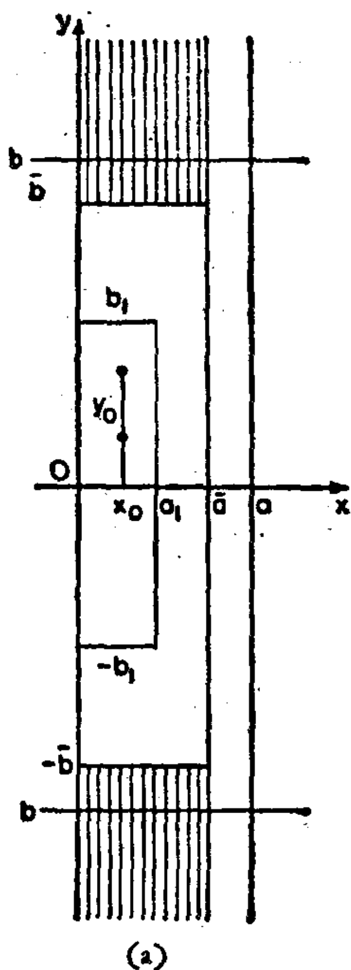
对方程

$$xdy/dx=py+\bar{\varphi}(x, y) \tag{3.3.17}$$

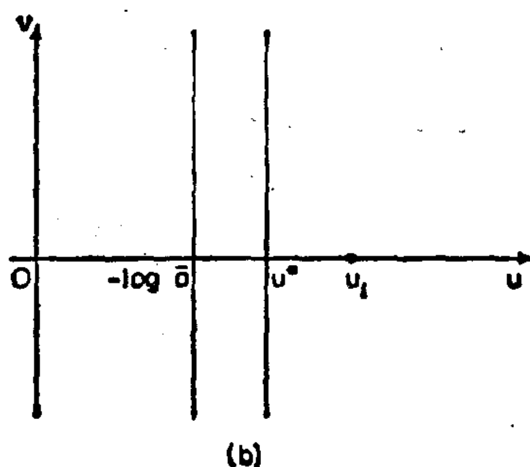
作变量代换

$$x=e^{-u}, \quad y=ve^{-pu}. \tag{3.3.18}$$

这变换将带域 $\bar{S}$ 映上到平面 T: $u\geqslant-\log a, -\infty<v<+\infty$ (见图 45(a) 与 (b)),而方程 (3.3.17) 变成



(a)



(b)

图 45

$$dv/du = \Phi(u, v), \tag{3.3.19}$$

其中 $\Phi(u, v) = -e^{pu}\bar{\varphi}(e^{-u}, ve^{-pu})$.

由于(3.3.11)和(3.3.12)，这两个条件对 $\bar{\varphi}(x, y)$ 也满足，因而 $\Phi(u, v)$ 满足§ 3.1 的引理中所述的所有条件.又由(3.3.18)，条件 $\lim\limits_{u\to+\infty} v(u) = c$ 变成

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y}{x^p} = c,$$

由此得知,从带域 $\bar{S}$ 中的点 (x_0, y_0) 出发的方程(3.3.17)的每一个解 $y(x)$ 都满足(3.3.15).

要完成本定理的证明，现在只需证明，如果点 (x_0, y_0) 属于适当的矩形 R_1: $a < x_0 \leqslant a_1$, $|y_0| \leqslant b_1$，则 $|y(x)| < \bar{b}$. 因为一旦如此,由(3.3.16.1)得知(3.3.17)中的 $\bar{\varphi}(x, y)$ 可用 $\varphi(x, y)$ 代替,因此，$y(x)$ 是(3.3.14)的通过 (x_0, y_0) 的解.

给定 $\sigma > 0$，可确定 u^*, 使得对于 $u > \bar{u} > u^*$，我们有

$$|v(u)| \leqslant |v(\bar{u})| + \sigma. \tag{3.3.20}$$

再对 b_1, $0 < b_1 < \bar{b}$，取 $u_1 > u^*$，使得

$$\sigma < (\bar{b} - b_1)e^{pu_1}. \tag{3.3.21}$$

令 $a_1 = e^{-u_1}$，考虑(3.3.17)的通过矩形 R_1: $a < x \leqslant a_1$, $|y| \leqslant b_1$ 中任一点 (x_0, y_0) 的解 $y = y(x)$. 由变换(3.3.18)，点 (x_0, y_0) 对应于半平面 T 中的点 (u_0, v_0)，并且有

$$u_0 = -\log x_0 \geqslant -\log a_1 = u_1 > u^*, \tag{3.3.22}$$

$$|v(u_0)| = |y_0| e^{pu_0} \leqslant b_1 e^{pu_0}. \tag{3.3.23}$$

由(3.3.20),取 $\bar{u} = u_0$，并利用(3.3.22)，(3.3.23)，我们有

$$\begin{aligned} |v(u)| &\leqslant |v(u_0)| + \sigma \leqslant b_1 e^{pu_0} + (\bar{b} - b_1)e^{pu_1} \\ &\leqslant be^{pu_0} + (\bar{b} - b_0)e^{pu_0} = \bar{b}e^{pu_0} \leqslant \bar{b}e^{pu}, \end{aligned}$$

因此对 $0 < x < x_0$ 有 $|y(x_0)| = |v(u)|e^{-pu} < \bar{b}$.

3. A. Wintner 第二定理

(a) **定理 7.** (A. Wintner 第二定理) 设函数 $\varphi(x, y)$ 在给定的矩形 R: $0 < x < a$, $-b < y < b$ 内连续,且满足

$$\int_{+0} x^{-2}|\varphi(x, x\log x)|dx < +\infty. \qquad (3.3.24)$$

又假定对一切 $x \in (0, a)$ 有

$$|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| \leqslant \mu(x)|y_1 - y_2|, \qquad (3.3.25)$$

其中

$$\int_{+0} \frac{\mu(x)}{x} dx < +\infty. \qquad (3.3.26)$$

在这些假设下,存在正数 a_1, b_1, $0 < a_1 < a$, $0 < b_1 < b$, 使得如果 $y(x)$ 是方程

$$xdy/dx = x + y + \varphi(x, y) \qquad (3.3.27)$$

从 R_1: $0 < x \leqslant a_1$, $-b_1 \leqslant y \leqslant b_1$ 中任一点 (x_0, y_0) 出发的解,则这解在 $(0, x_0]$ 内存在,且当 $x \to +0$ 时它趋于零.

此外,存在常数 c, 使得当 $x \to +0$ 时有

$$y(x) = x\log x + cx + o(x), \qquad (3.3.28)$$

反之,对任一固定的 c, (3.3.27) 存在满足 (3.3.28) 的解.

这定理的证明类似于§ 3.2 中的推理,不过变换

$$x = e^{-u}, \quad y = (v - u)e^{-u}$$

将 (3.3.27) 变成了方程 $dv/du = \Phi(u, v)$,

其中

$$\Phi(u, v) = -e^{-u}\varphi(e^{-u}, (v - u)e^{-u}),$$

且 $\Phi(u, v)$ 具备§ 3.1 中引理所述的性质.

(b) § 3.2 和§ 3.3 (a) 中所证明的 A. Wintner 的两条定理的重要性在于这样的事实,它们是用积分来给出一些充分条件的 [(3.3.11), (3.3.12), (3.3.13), (3.3.24), (3.3.25), (3.3.26)], 这些条件对方程右端所加的限制较宽,却保证了系统

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y, \quad \dot{y} = \gamma x + \delta y + \varphi(x, y)$$

的轨线当 $x > 0$ 时与简化系统 $\dot{x} = \alpha x + \beta y$, $\dot{y} = \gamma x + \delta y$ 的轨线在下面两种情况下具有相同的性态:

$$\alpha = 1, \ \beta = 0, \ \gamma = 0, \ \delta = p > 0; \qquad (3.3.29)$$

$$\alpha = 1, \ \beta = 0, \ \gamma = 1, \ \delta = 1. \qquad (3.3.30)$$

这两种情形都对应于结点情形(前者当 $p\neq 1$ 时对应双切结点，$p=1$ 时对应星形结点，后者对应于单切结点)。

这部分内容在第五章§1还要加以讨论。

补　　充

1. 给定方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b_1x+b_2y+\Sigma_2'}{a_1x+a_2y+\Sigma_2},\tag{1}$$

其中 a_1, a_2, b_1, b_2 为实或复的常数，$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，Σ_2, Σ_2' 为通常意义下的高阶项。容易求得这方程在原点 $x=y=0$ 附近存在满足 $y(0)=0$ 的全纯解 $y=y(x)$ 的充分条件。

事实上，变换 $y=xv$ 将(1)变成

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{b_1+(b_2-a_1)v-a_2v^2+x\varphi(x,v)}{a_1+a_2v+x\psi(x,v)},\tag{2}$$

其中 $\varphi(x,v)$，$\psi(x,y)$ 在 $x=v=0$ 附近为全纯函数。

若 $v(x)$ 是(2)满足 $v_0=v(0)$ 的任一全纯解，则 $u=v-v_0$ 是方程

$$x\frac{du}{dx}=\frac{b_1+(b_2-a_1)v_0-a_2v_0^2+\varphi_1(x,v)}{a_1+a_2v_0+\psi_1(x,u)}\tag{3}$$

的满足 $u(0)=0$ 的全纯解，这里 $\varphi_1(0,0)=\psi_1(0,0)$，且 φ_1，ψ_1 在 $x=u=0$ 附近为全纯。

如果可以选取 $v(0)=v_0$，使得

$$\begin{cases}b_1+(b_2-a_1)v_0-a_2v_0^2=0,\\ a_1+a_2v_0\neq 0,\end{cases}$$

则(3)就变成了 Briot-Bouquet 型方程，它的全纯解问题我们已经在§1.2中研究过了。

2. 我们已经指出，当 X，Y 为解析时，I. Bendixson[2] 证明了经有限次(非线性)变换后，可将方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\tag{1}$$

化为标准型

$$x^{\sigma+1}\frac{dy}{dx}=\alpha x+\beta y+\Sigma_2.$$

用有限个形如 $x=u$, $y=x^{b/a}(\rho+v)$ 的变换将 (1) 化为有限个标准型的方法是由 E. Lahaye [1] 得到的，其中 a, b 为整数，ρ 是某个代数方程的根.

M. Urabe [1] 用 Puiseux 的方法 (§ 1.2(c))，将方程 (1) 的一个特殊情形化成了标准型. 这里

$$\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}=x^s y^r\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}e^{\varphi(x,y)},$$

其中 r, s 为整数($\gtrless 0$ 或$=0$)，Q, P 为多项式，φ 在原点附近为全纯函数.

M. Hukuhara 考虑了另一类特殊情形:

$$\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)x^{\sigma+1}},$$

其中 $\sigma\geqslant 0$ 为整数，

$$P(x,y)=b_1(x)+b_2(x)y+\cdots+b_{x-1}(x)y^{r-2},$$

与

$$Q(x,y)=a_0(x)+a_1(x)y+\cdots+a_r(x)y^r$$

无公因子(见 H. Hukuhara, Kimura, Matuda [1] 第二章).

若 $a_0(x),\cdots,a_r(x),b_1(x),b_2(x),\cdots,b_{r-1}(x)$ 在 $x=0$ 附近是 x 的某有理次幂 $x^{p/q}$ 的全纯函数(p, q 为整数，$p/q>0$)(为简单起见，称这种情况为在 $x=0$ 附近"正则")，则可以证明，经过有限次下列变换 $y=z+$常数，$y=x^\rho z$, $y=1/z$ 可把原方程化为下面六种标准型:

(a) $x\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, $f(0,0)=0$,

(b) $x^\sigma\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, $\sigma>0$, $f(0,0)=0$, $f'_y(0,0)\neq 0$,

(c) $x^{\sigma+1}y^r\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, $\sigma\geqslant 0$, $r>0$, $f(0,0)\neq 0$, 其中

$f(x, y)$ 在 $x = y = 0$ 附近关于 y 为全纯，关于 x 为“正则”，或者

(d) $x \dfrac{dy}{dx} = y\varphi(x, y, x^\rho/y)$,

(e) $xy^k \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, y, x^\rho/y)$, $k \geqslant 0$, $\varphi(0, 0, 0) \neq 0$,

(f) $x^{\sigma+1} \dfrac{dy}{dx} = y^k\varphi(x, y, x^\rho/y)$, $\sigma > 0$, $k \leqslant 1 + \sigma/\rho$,

$\varphi(0, 0, 0) \neq 0$,

其中 $\varphi(x, y, z)$ 在 $x = y = z = 0$ 附近关于 x, y 为全纯，关于 z 为“正则”。

3. 在已经引用过的文献 Hukuhara, Kimura, Matuda[1] 的第三章中，对方程 (a), (b), (c)（见上面的说明）作了详细的研究。

此研究分为三步：形式积分；证明形式级数的收敛性或渐近性；通过对级数的检验来推导解的性态。

作为例子，考虑方程

$$x^\sigma \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \sigma > 0, \quad f(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) \neq 0,$$

如果

$$f(x, y) = \lambda y + a_{1,0}x + \sum_{j+k \geqslant 2}^{n} a_{j,k}x^j y^k,$$

我们可用变换

$$y = \Sigma p_{j,k}x^j\eta^k, \quad p_{0,0} = 0, \quad p_{0,1} = 1.$$

于是变换后的方程具形状

$$x^{\sigma+1} \frac{d\eta}{dx} \eta' = \eta \sum_{j=0}^{\sigma} \alpha_j x^j,$$

这方程有通解

$$\eta = Cx^\sigma e^{\Lambda(x)},$$

其中 C 为任意常数，

$$\Lambda(x) = \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{\alpha_j}{j-\sigma} x^{j-\sigma}.$$

(M. Hukuhara, Kimura, Matuda[1] 第 58—59 页例 3).

4. 关于方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

在解析情形下，于孤立奇点邻域内轨线性态的进一步研究可参看 A. F. Andreyev[2], A. N. Berlinkii[1], [2]; I. B. Khaimov[2], I. S. Kukles[1], [2], I. S. Kukles-D. M. Grus[1], [2], S. Lefschetz[1], [4], H. Shintani[1].

特殊情形是:

1) $X=y+\Sigma_2$, $Y=\Sigma_2'$.

见 A. F. Andreyev [1], S. Barocio [1], N. A. Gubar [1], I. B. Khaimov[1], S. Lefschetz[1], [2], [3].

2) $X=x+\Sigma_2$, $Y=\Sigma_2'$.

见 N. A. Gubar[1].

5. 方程组

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{1}$$

在孤立奇点 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 的邻域内的解的解析表达式曾被 E. Picard [1] 研究过,其中

$X_j=a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n+\Sigma_2^{(j)}Q(x_1,\cdots,x_n)$, $(j=1,\cdots,n)$

借助于线性变换

$$y_k=\sum_1^n {}_j\alpha_{kj}x_j,\quad Y_k=\sum_2 {}_j^{(k)}\alpha_{kj}X_j \tag{2}$$

我们有

$$Y_k=\sum_1^n {}_j\alpha_{kj}(a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n)+\Sigma_2^{(k)}(x_1,\cdots,x_n),$$

如果对每个 k, α 满足方程组

$$\sum_1^n {}_j\alpha_{kj}a_{jr}=\lambda_k\alpha_{kr},\ (r=1,\cdots,n) \tag{3}$$

则 Y_k 的一次项可化为 $\lambda_k y_k$.

为了对固定的 k，方程组 (3) 有非平凡解，λ_k 必须是

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根. 若这方程组有 n 个相异的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，由初等代数知道，这时有 n 个解 $(\alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kn})$ $(k=1, \cdots, n)$ 满足

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1n} \\ \cdots \\ \alpha_{n1} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

因而 (2) 可逆. 因此，如果我们以 dt/t 记 (1) 中的 dx_1/X_i，则我们有 n 维 Briot-Bouquet 型系统

$$t\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k + \Sigma_2^{(k)}(y_1, \cdots, y_n) \ (k=1, \cdots, n). \qquad (4)$$

如同 $n=1$ 的情形，在关于 λ_k 的某些假设下，可以证明系统 (4) 有解 $(y_1, \cdots, y_n)$，它在 $t=0$ 附近可表示 $t^{\lambda_1}, \cdots, t^{\lambda_n}$ 的幂级数.

有关系统

$$x^{\sigma+1}\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \cdots, y_n)$$

的最近研究可参看 M. Iwano [1]，也可参看 A. A. Shestakov[1]，其中 f_i 在 $x=y_1=\cdots=y_n=0$ 的附近是其变量的全纯函数.

参 考 文 献

ANDREYEV, A. F.

[1] Investigations of the behavior of the integral curves of two differential equations in the neighborhood of a singular point, *Vestnik Leningr. Univ.* **10** (1955), 43–65 (Russian), *Am. Math. Soc. Translations*, (2) **8** (1958), 183–207.

[2] On integral curves with zero or infinite order of curvature, *Dokl. Ak. Nauk. B.S.S.R.*, **3** (1959), 186–189 (Russian).

BAROCIO, S.

[1] On certain critical points of a differential system in the plane, *Contrib. to the theory of nonl. oscill.*, vol. 3 (1956), 127–135.

BENDIXSON, I.

[1] Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.* **24** (1901), 1–88; (Ch. V).

[2] Sur les points singuliers des équations différentielles, *Ofv. Vet. Ad. Stockholm*, *55* (1898), 59–85; 139–151; 171–188; 635–658.

BERLINSKII, A. N.

[1] On the coexistence of singular points of different types, *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved., Matematika*, 1960, **5** (18), 27–32 (Russian).

[2] On the behavior of the integral curves of a differential equation, *ibid.*, **2** (15), 3–18 (Russian).

BRIOT, CH.–BOUQUET, J. C.

[1] Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles, *Journ. Ec. Imp. Polyt.*, **21** (1856), 133–197.

DULAC, H.

[1] Points singuliers des équations différentielles; *Mem. des Sci. Math.* **61** (1934).

[2] *Curvas definidas por una ecuacion diferencial de primer orden y de primer grado*, Junta para ampl. de estud. y invest. cient. (Madrid, 1933), 1–180 (107–177).

FORSYTH, A. R.

[1] *Theory of differential equations*, II, (Cambridge, 1900), Ch. V, 83–140.

GUBAR, N. A.

[1] Characterization of compound singular points of two differential equations by means of rough singular points of closely related systems, *Mat. Sbornik* **40** (82) (1956), 23–56 (Russian).

HUKUHARA, M.

[1] Sur la généralisation des théorèmes de M. T. Malmquist, *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **6** (1949), 77–84.

HUKUHARA, M., KIMURA, T. and MATUDA, T.

[1] *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*. Publ. of the Math. Soc. of Japan, **7** (1961).

IWANO, M.

[1] Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier. (I), *Ann. d. Mat. pura ed appl.*, (4) **44** (1957), 261–292; (II), *ibid.*, (4) **47** (1959), 91150.

KHAIMOV, I. B.

[1] Study of equations whose right side contains a linear term, *Uch. Zap. Stalinabadsk, pedag. Inst.*, **2** (1952) (Russian).

[2] Application of Briot–Bouquet equation to the study of the general case, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. Ak. Nauk UzSSR*, 1957, 21, 113–122 (Russian).

KOENIGSBERGER, L.

[1] *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln* (Leipzig, 1889), p. 350.

KUKLES, I. S.

[1] On Frommer's method, *Izv. Ak. Nauk UzSSR, Ser. Fiz. Mat.*, **4** (1957), 85–95 (Russian).

[2] On Frommer's method for the study of singular points, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **117** (1957), 367–370 (Russian).

KUKLES, I. S. and GRUS, D. M.

[1] On trajectories tending to the origin with a zero or infinite order of curvature, *Izv. Ak. Nauk UzSSR, Ser. Fiz. Mat.*, 1958, 1, 15–27 (Russian).

[2] On the number of operations required by Frommer's method, *ibid.*, 29–45 (Russian).

LAHAYE, E.

[1] Les développements des intégrales des equations $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ dans le domaine des valeur qu'annulent simultanément, P et Q, *Acad Roy. Belgique, A. Sci., Mém*, **20** (1945), fasc. 5, 1–121.

LEFSCHETZ, S.

[1] On a theorem of Bendixson, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, (2) **1** (1956), 13–27.

[2] *On the critical point of a class of differential equations. Cont. to the theory of nonl. oscill.* vol. 4 (Princeton, 1958), 19–28.

[3] *Differential equations; Geometric theory* (New York, 1957), 230–239.

[4] The ambiguous case in planar differential systems. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, (2) **2** (1957), 63–74.

PICARD, E.

[1] *Traité d'Analyse*, T. 3, 3ème ed., (Paris, 1928), Ch. 1.

PUISEUX, V.

[1] Recherches sur les fonctions algébriques, *Journ. de Math. pures et appl.*, **15** (1850), 365–480 (p. 389).

SANSONE, G.

[1] *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 1°, 2° ed (Bologna, 1948), Ch. II § 1, n. 3.

SANSONE, G. and GERRETSEN, J.

[1] *Lectures on the theory of functions of a complex variable* (Groningen, 1960), p. 16L

SHESTAKOV, A. A.

[1] On the asymptotic behavior of the solutions of n-dimensional systems of ordinary differential equations with a singular point of higher order, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **131** (1960), 1038–1041, (Russian).

SHINTANI, H.

[1] On the behavior of paths of the analytic two-dimensional autonomous system in a neighborhood of an isolated critical point. (I), *Journ. Sci. Hiroshima Univ., Series A*, **23** (1959), 171–194; (II) *ibid.* **24** (1960), 173–187.

TRJITZINSKY, W. J.

[1] Analytic theory of nonlinear singular differential equations, *Mém. des Sci. Math.*, **90** (1938).

URABE, M.

[1] Reduced forms of ordinary differential equations in the vicinity of the singularity of the second order, *Journ. Sci. Hiroshima Univ., Series A*, **14** (1949–50), 26–37.

WINTNER, A.

[1] Asymptotic integration constants in the singularity of Briot–Bouquet, *Am. Jour. Math.* **68** (1946) 293–300.

[2] Asymptotic equilibria, *ibid.* **68** (1946), 125–132, (131–132).

第四章　平面自治系统

在前面各章中，我们曾对 $X(x, y)$，$Y(x, y)$ 作了各种不同假设，而后得到了一些用以说明系统

$$\dot{x}=X(x, y),\ \dot{y}=Y(x, y)$$

的轨线性状的例子． 现在我们将从本质上是几何学的观点着眼，对上述系统就其相平面作一般性的研究，而仅设 X，Y 在整个 x，y 平面上（除去§6和§7以外，那里 x，y 将取为柱面上和环面上的点的坐标）是实的连续函数，且保证解的唯一性，以及在每一个有限时间区间内解对初值的连续依赖性． 例如，当 X，Y 满足 Lipschitz 条件时，这种情况即可实现（第一章定理 6）．

有时候为了方便起见，仅假定 X，Y 在 x，y 平面内的有界开连通集内有定义，而不要求它们在全平面内有定义．这时，对于此种集合的边界点邻域内轨线性状的研究需要给予详细分析，有关这方面内容的研究例如可参看 T. Ura[1]．

§1. 极　限　集

1. 轨线 γ 的极限集 $A(\gamma)$，$\Omega(\gamma)$．一般性质

(a) 首先，依据 G. D. Birkhoff [1]，我们给出下面定义．

定义． 一个给定系统

$$\dot{x}=X(x, y),\ \dot{y}=Y(x, y) \tag{4.1.1}$$

的相平面上一点 Q 称为已知轨线 $\gamma=\gamma_p(t)$ 的 ω-极限点 [α-极限点]，如果至少存在一个趋于 $+\infty$[$-\infty$] 的序列

$$t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots[t_1>t_2>\cdots>t_n]$$

使得

$$\lim_{n\to\infty} d(\gamma_p(t_n), Q)=0, \tag{4.1.2}$$

其中符号 $d(A, B)$ 表示点 A, B 之间的欧几里德距离.

轨线 γ 的所有 ω-极限点 [α-极限点] 的集合称为 γ 的 *ω-极限集* [*α-极限集*]，记作 $\Omega(\gamma)$ [$A(\gamma)$].

由于这些定义的对称性（当以 $-t$ 代替 t 时，即可由其中一个定义得到另一个），为了简单起见，我们常考虑 ω-极限点及其点集 $\Omega(\gamma)$.

(b) 若 $\Omega(\gamma)$ 为非空集，则由于 $\Omega(\gamma)$ 的每一点都是 γ 的聚点，因此 $\Omega(\gamma)$ 包含在集合 γ（轨线 γ 的所有点构成的集合）的闭包 $\bar{\gamma}$ 之中，用符号表示为

$$\Omega(\gamma) \subseteq \bar{\gamma} \ [A(\gamma) \subseteq \bar{\gamma}]. \tag{4.1.3}$$

即使 $\Omega(\gamma)$ 是空集，这个关系式仍然成立.

(c) 由这个定义即可得知，若 P 是已给集合 $\Omega(\gamma)$ 的一个聚点，则 P 属于 $\Omega(\gamma)$[1]. 亦即，每一个 $\Omega(\gamma)$ 都包含它自己的聚点. 因此，每一个 $\Omega(\gamma)$ 都是闭集. 此外，我们还可以证明：

引理 1. *若 γ 包含一条有界半轨 γ_P^+，则 $\Omega(\gamma)$ 非空，且为有界的闭连通集*[2].

设 $\{t_n\} \to +\infty$ 为一递增序列，由 Bolzano-Weierstrass 定理，可知 $\gamma_P^+(t_n)$ 至少有一个聚点 Q：因为从 $\{t_n\}$ 中可选取一子序列使 (4.1.2) 成立，故 $\Omega(\gamma)$ 非空. 此外，$\Omega(\gamma)$ 显然是有界的.

我们用反证法证明 $\Omega(\gamma)$ 又为连通集. 假定存在两个有界闭集 A, B，使得 $A \cup B = \Omega(\gamma)$，且满足 $d(A, B) = d > 0$. 由于 $A \subset \Omega(\gamma)$，$B \subset \Omega(\gamma)$，故必存在两个序列 $\{t_n'\}, \{t_n''\} \to +\infty$，使得若 $P_n' = \gamma_P(t_n')$，$P_n'' = \gamma_P(t_n'')$，则

$$d(P_n', A) = \inf\{d(P_n', Q) : Q \in A\} < d/3, \ d(P_n'', B) < d/3.$$

不妨设 $0 < t_1' < t_1'' < t_2' < t_2'' < \cdots < t_n' < t_n'' < t_{n+1}' < \cdots$.

以 C_A 记平面上与 A 的距离小于 $d/3$ 的点集，γ 的弧段

1) 事实上，对给定的正整数 n，至少存在一点 $Q \in \Omega(\gamma)$，它与 P 的距离小于 $1/2n$，也至少存在一个值 $t' > n$，使得当 $t' > n$ 时有 $d(\gamma(t'), P) < 1/n$. 设 t_n 为使上述关系成立的 $t' > n$ 的 t' 的下确界，则序列 $\{t_n\}$ 满足极限点定义的条件，从而 $P \in \Omega(\gamma)$.

2) 闭的连通集是指它不能分解为两个不相交的非空闭集 A, B 之并.

$\widehat{P_1'P_1''}$, $\cdots$, $\widehat{P_n'P_n''}$, $\cdots$的每一个的第一个端点在集合 C_A 内，第二个端点在 C_B 内. 由于集合 $\bar{C}_A$, $\bar{C}_B$(C_A, C_B 的闭包)无公共点，故对每一个正整数 n，存在 $\bar{t}_n$，$t_n' \leqslant \bar{t}_n \leqslant t_n''$，使得 $\bar{P}_n = \gamma_P(\bar{t}_n)$ 既不属于 $\bar{C}_A$，也不属于 $\bar{C}_B$，从而 $d(\bar{P}_n, \Omega(\gamma)) > d/3$.

由于点集 $\bar{P}_n$ 属于 γ_P^+，由假设它是有界的，再由 Bolzano-Weierstrass 定理，点集 $\bar{P}_n$ 至少存在一个聚点 Q. 显然 $d(Q, \Omega(\gamma)) \geqslant d/3$，而这与 $\bar{t}_n \to +\infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} d(\bar{P}_n, Q) = 0$ 这一事实矛盾，故必有 $Q \in \Omega(\gamma)$.

(d) 集合 $\Omega(\gamma)$ 的另一个重要性质由下面引理给出.

引理 2. 若 P 属于已给集合 $\Omega(\gamma)$，Γ 是过 P 点的轨线，则

$$\Gamma \subseteq \Omega(\gamma). \tag{4.1.4}$$

事实上，设 $\Gamma = \Gamma(t)$ 是经过 $P(\Gamma(0) = P)$ 点的一条轨线，由定义存在序列 $\{t_n\} \to +\infty$，使得 $d(\gamma(t_n), P)$ 趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} d(\gamma(t_n), \Gamma(0)) = 0. \tag{4.1.5}$$

设 Q 为 Γ 上任一点，令 $\Gamma(\bar{t}) = Q$. 作变换 $\tau = t + \bar{t}$，(4.1.5) 可写为

$$\lim_{n\to\infty} d(\gamma(t_n + \bar{t}), \Gamma(\bar{t})) = \lim_{n\to\infty} d(\gamma(t_n + \bar{t}), Q) = 0.$$

现在序列 $\{t_n + \bar{t}\}$ 与 $\{t_n\}$ 一样$\to +\infty$，因此 $Q \in \Omega(\gamma)$，又因 Q 为 Γ 上任意一点，引理得证.

(e) 引理 2 说明了，每个集合 $\Omega(\gamma)$ [$A(\gamma)$] 至少包含一整条轨线. 因此我们可以作下面的定义.

定义. 每条至少属于一个极限集 $\Omega(\gamma)$ [或 $A(\gamma)$] 的轨线，称为 ω-极限[α-极限]轨线.

本节的目的就是分析轨线极限集的结构，以便确定它是否能包含几条轨线，在什么情况下它能包含几条轨线，这种极限轨线的类型，它们之间的关系，以及它们与那些以它们为极限集的轨线之间的关系.

(f) 最后，我们可以阐述以下引理.

引理 3. 若 Γ 是属于某 $\Omega(\gamma)$ 的一条 ω-极限轨线，则集合

$\Omega(\Gamma)$，$A(\Gamma)$ 是 $\Omega(\gamma)$ 的一部分.

事实上，或者 $\Omega(\Gamma)$ $[A(\Gamma)]$*) 是空集，或者由 (b)，$\Omega(\Gamma)$ $[A(\Gamma)]$ 中的每一点都是 Γ 上的点的聚点，从而也是 $\Omega(\gamma)$ 的聚点，因此 (再由 (b))，它是 $\Omega(\gamma)$ 的点.

2. 轨线的分类

(a) 因而，对给定的轨线 γ，有三种可能性：(1) $\Omega(\gamma)$ 为空集；(2) $\Omega(\gamma)$ 非空，但交 $\gamma\cap\Omega(\gamma)$ 是空集；(3) 集合 $\gamma\cap\Omega(\gamma)$ 非空.

仅当 γ 含有一无界(正)半轨(它可经历有限时间或无限时间)时第一种情况才能成立(引理 1)，这时称 γ 为 ω-发散轨线.

对第二种情况，称 γ 为 ω-渐近轨线；最后，在第三种情况，γ 称为 Poisson ω-稳定的.

对 $A(\gamma)$ 可作类似的定义.

(b) ω-发散轨线与其它两种轨线相比意义不大，因此，我们仅通过一个例子给予说明. 容易看出，系统

$$\dot{x}=1,\ \dot{y}=-2xy^2$$

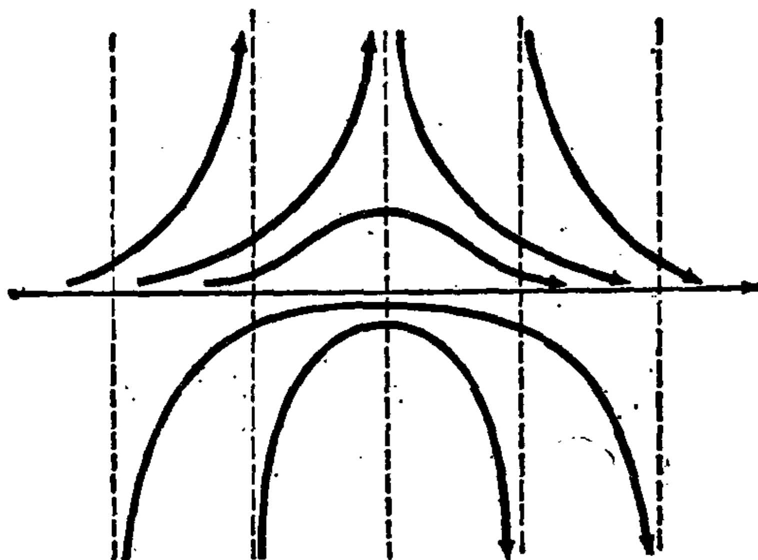


图 46

*) 原书误为 $\Omega(\gamma)[A(\gamma)]$，下同. ——译者注

的轨线为三次曲线族 $cy + x^2y - 1 = 0$ (c 为常数)，它们的形状如图 46 所示.

其中每一条轨线都 α-发散，也都 ω-发散，又因为 $\dot{x} = 1$，故 $x = x_0 + t$. 利用横坐标的这一性质，容易将那些在有限时间内走完的轨线与别的轨线区分开来.

(c) 在第二章我们已经遇见过几个 α-渐近轨线和 ω-渐近轨线的例子(它们都趋于奇点)，不久我们还将遇见另一些例子. 在这一章的§ 2 和§ 3 中将对这些轨线的性状进行研究.

(d) 我们指出，就第三类轨线而论，它们也可由下面的关系式来定义:

$$\gamma \subseteq \Omega(\gamma). \tag{4.1.6}$$

事实上，由此显然可得 $\gamma \cap \Omega(\gamma)$ 非空; 反之，若 P 是 $\gamma \cap \Omega(\gamma)$ 的点，则 $\gamma_P \subseteq \Omega(\gamma)$ (引理 2)，但因 $P \in \gamma$，故 $\gamma_P = \gamma$，因此得知 (4.1.6) 成立.

于是，**每一条 Poisson ω-稳定[α-稳定]轨线也都是极限轨线**.

(e) 奇点和环是 Poisson ω-稳定轨线的两个例子，这就是说，**每条闭轨都是 Poisson ω-稳定的**. 事实上，我们甚至可以进一步断言:

引理 4. **若 γ 是一条闭轨，则**

$$\gamma = \Omega(\gamma) = A(\gamma). \tag{4.1.7}$$

设 $P \in \gamma$，我们来考虑半轨 $\gamma_P^+(t)$ (其中 $\gamma_P^+(0) = P$). 由于 γ 是闭轨，故至少存在 $T > 0$，使得 $\gamma_P^+(t + T) = \gamma_P^+(t)$ (第一章§ 5.3)，因此点列 $\gamma_P^+(nT)$ ($n = 1, 2, \cdots$) 与 P 重合，从而满足§ 1.1(a) 中定义的条件，故 $P \in \Omega(\gamma)$. 类似地，若取序列 $\gamma_P^-(-nT) = P$，则有 $P \in A(\gamma)$.

另一方面，若 $P \in \Omega(\gamma)$ [或者若 $P \in A(\gamma)$]，由同一定义，P 与闭集 γ 的距离必须等于零，因此 $P \in \gamma$.

(f) 我们注意，迄今为止，本节所得到的结果也可以应用到欧几里得空间 $S_n (n > 2)$ 的自治系统中去. 但是从现在起，除少数例外，在§ 1，§ 2，§ 3 中我们将只限于讨论系统 (4.1.1)，且假定 x，

y 为欧几里得平面中点的直角坐标.

3. 常点与常轨线

(a) 相平面中凡不是系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \tag{4.1.1}$$

的奇点的点都称为常点. 因此, 在且仅在常点 (x, y) 处才有 $X^2(x, y) + Y^2(x, y) > 0$.

由 X, Y 的连续性得知, 常点所构成的集合为开集. 因此, 对每个常点 P 可确定 $\rho > 0$, 使得以 P 为中心 ρ 为半径的圆内任一点都是常点. 仍由 X, Y 的连续性, 可取 $\rho > 0$, 使得对所有的点 $Q \in C(P, \rho)$, γ_P 的定向切线与 γ_Q 的定向切线之间的夹角 $\leqslant \pi/4$. 这时称 $C(P, \rho)$ 为 P 点的关联圆. 显然, 若 $0<\rho' < \rho$, 则 $C(P, \rho')$ 也是 P 点的关联圆.

关联圆中, 沿着 γ_P 在 P 点的法线方向的直径称为法直径. 这条法直径显然是一条我们以前曾用过的 Poincaré 命名的无切弧 (第二章§ 3.3(b)). 所有通过它的轨线必与 γ_P 以同一方向穿过. 因此, 我们可以就法直径将 $C(P, \rho)$ 分为 "负" 半圆和"正半圆", 即在负半圆中含有趋于这直径的轨线, 在正半圆中含有从法直径出发的轨线.

(b) 我们已经注意到, 对每一常点 P, 存在着无穷多个关联圆. 若 ρ_P 是使 $C(P, \rho)$ 为 P 的关联圆的 ρ 的上确界, 则或者对给定的 P 有 $\rho_P = +\infty$, 从而一切点都是常点, 且对一切点 $\rho_P = +\infty$, 或者对所有的点(常点) ρ_P 为有限数*).

设 γ 为一常轨线, 即它上面无奇点(第一章§ 5.3), $\widehat{AB}$ 为 γ 的弧段(包括两个端点): 很清楚, 若 $A = B$, 则 γ 为一环. 对 $\widehat{AB}$

---

*) 原书这段话欠妥, 例如考虑系统 $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = |y|$, 其轨线为 $y = ce^x$ $(y > 0)$, $y = ce^{-x}$ $(y < 0)$, $y = 0$ $(y = 0)$, 显然对 $|y| = 1$ 上的每一点 P, $\rho_P = +\infty$. 但对 $|y| < 1$ 中的点 Q(例如在 $y = 0$ 上的点), ρ_Q 却为有限数. ——译者注

上每一点 P 考虑对应的 ρ_P，且假定 ρ_P 是有限数（$\rho_P=+\infty$ 的情况没有什么兴趣）. 容易看出，ρ_P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上 P 点的连续函数. 事实上，若 ρ_P 在点 $P_0\in\overset{\frown}{AB}$ 处不连续，则存在数 $\varepsilon>0$ 以及任意接近于 P_0 的点 $P\in\overset{\frown}{AB}$，使得 $\rho_P-\rho_{P_0}>\varepsilon$ [或 $\rho_{P_0}-\rho_P>\varepsilon$]. 现在如果取其中一点 P，使得 $d(P,P_0)<\varepsilon$，于是我们有 $d(P,P_0)<\rho_P-\rho_{P_0}$ [或 $d(P,P_0)<\rho_{P_0}-\rho_P$]. 因此，圆 $C(P_0,\rho_{P_0})$ [$C(P,\rho_P)$] 在圆 $C(P,\rho_P)$ [$C(P_0,\rho_{P_0})$] 的内部，这与 ρ_{P_0}[ρ_P] 的定义相矛盾.

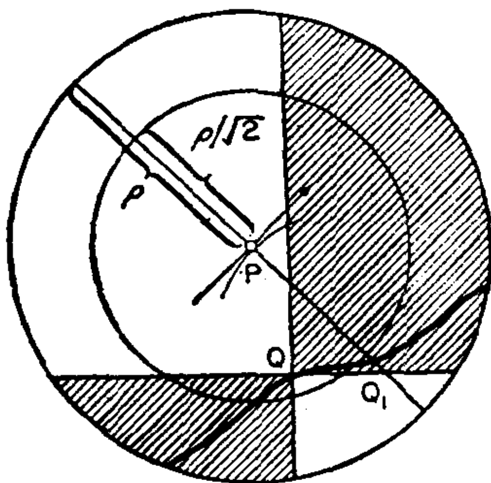


图 47

因为 $\overset{\frown}{AB}$ 是闭集，故 ρ_P 在它上面达到最小值，记作 ρ_0，由于对任何 P 有 $\rho_P>0$，故 $\rho_0>0$.

称所有满足 $d(Q,\overset{\frown}{AB})\leqslant\rho$，$0<\rho<\rho_0$，的点 Q 的集合为常轨线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的 (ρ) 邻域.

(c) 若 Q 是某常点 P 的关联圆上的一点，则 γ_Q 可以不与 $C(P,\rho)$ 的法直径相交，但无论如何，我们有：

引理 5. 设 $C(P,\rho)$ 是常点 P 的关联圆，

$$Q\in C(P,\rho'),\quad 0<\rho'<\rho/\sqrt{2},$$

则 γ_Q 必含一段完全位于 $C(P,\rho)$ 中的弧，它与 $C(P,\rho)$ 的法直径相交.

经过 Q 点作在 P 点的轨线 γ_P 的切线的平行线，并以此直线作为以 Q 为顶点的直角的平分角线. γ_Q 位于 $C(P,\rho)$ 内的那部分也一定位于这两个直角区域之一中（图 47 中带斜线的那一部分）.

此外，由于 $Q\in C(P,\rho/\sqrt{2})$，这两个直角之一的两条直角边一定与 $C(P,\rho)$ 的法直径相交. 因此，γ_Q 与这直径必相交于 Q_1（若 Q_1 与 Q 不重合，则当 Q 位于"负"半圆时 Q_1 属于 γ_Q^+，而当 Q

位于"正"半圆时 Q_1 属于 $\gamma_{\bar{Q}}$).

4.(平面)闭轨线,平面环的稳定性

(a) 现在我们来证明下面的定理，设本章开始所作的假定都满足.

定理 1. 系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \tag{4.1.1}$$

的每一条 Poisson ω-稳定[α-稳定]的轨线(§ 1.2(a)) 都是闭轨线(环或奇点)(其中 x, y 为欧几里得平面中点的直角坐标).

设 γ 是 (4.1.1) 的一条 Poisson ω-稳定轨线, B 是集 $\gamma \cap \Omega(\gamma)$ 中的一点. 若 B 是奇点, 则 $B = \gamma = \Omega(\gamma)$, 定理得证. 若 B 是常点,我们来证明 γ 是一个环.

设 $C(B, \rho)$ 是 B 的关联圆. 由于 $B \in \Omega(\gamma)$, 故对任何数 ρ', $0 < \rho' \leqslant \rho$, 存在递增发散序列 $\{t_n\}$, 使得点 $\gamma_B^+(t_n) \in C(B, \rho')$. 由于 γ_B 不会退化为一点, 我们可选取 ρ' 使得 γ_B^+ 与 $C(B, \rho')$ 的圆周第一次相交于点 B_1. 现在假定 γ_B 不是环, 则点列 $\gamma_B^+(t_n)$ 中除了至多有限个点以外都不属于弧 $\widehat{BB_1}$. 例如,设 P 是其中的一点,它属于 $C(B, \rho')$的"负"半圆(§ 1.3(a)). 由于我们可设 $\rho' < \rho/\sqrt{2}$,于是由引理 5 γ_P^+, 从而 γ_B^+, 与 $C(B, \rho)$ 的法直径相交于 B', 按假设 $B' \neq B$. 记住, (4.1.1) 的轨线只能按同一方向穿过 $C(B, \rho)$ 的法直径 $N'N$. 因此我们有如图 48(a) 与 48(b) 所示的两种可能性. 即或者 B' 在 N' 与 B 之间, 或者 B' 在 B 与 N 之间*).

令 $d = \overline{BB'}$, 则 γ_B^+ 不含有圆 $C(B, d/\sqrt{2})$ 中的点,因为否则, 由引理 5, 它与 $C(B, d)$ 或 $C(B, \rho)$ 的法直径只能以相反方向穿过. 因此 γ_B^+ 中的点与 B 的距离都 $\geqslant d/\sqrt{2}$, 而这与 $B \in \Omega(\gamma)$ 这假设相矛盾.

(b) 综合刚才所得的结果和引理 4 的结论, 得知系统 (4.1.1)

---

*) 这段话的严格证明,例如可参看 S. Lefschetz 著"微分方程几何理论", 中译本第十章§ 3,许淞庆译,上海科学技术出版社, 1965. ——译者注

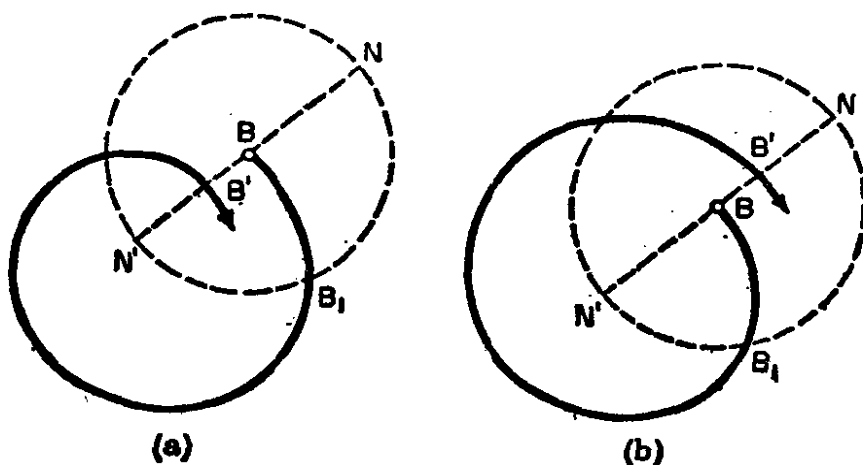


图 48

的 Poisson 稳定轨线只能是闭轨线(环和奇点).

(c) 现在我们来证明一条定理,它阐明了平面系统 (4.1.1) 的环关于轨线的稳定性.

定理 2. 设 Γ 是平面系统 (4.1.1) 的一个环,对每一 $\rho>0$,对应地有数 $\delta>0$,使得只要对点 P 有 $d(P,\Gamma)<\delta$,则 γ_P^+ 或 γ_P^- 中至少有一条其上的所有的点 Q,都有 $d(Q,\Gamma)<\rho$.

显然,我们可设 $\rho>0$,使得与 Γ 的距离 $\leqslant\rho$ 的点 (x,y) 的集合为 Γ 的 (ρ) 邻域 (§1.3(b)). 此外,由解关于初值的连续依赖性,若 T 是 Γ 的周期,则可取 $\delta>0$,使得如果点 G 属于 Γ 而 $d(P,G)<\delta$,那么

$$d(\gamma_P(t),\Gamma_G(t))<\rho/\sqrt{2},\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{4.1.8}$$

$(\gamma_P(0)=P,\ \Gamma_G(0)=G)$. 特别地,当 $t=0$ 时有 $d(P,G)<\rho/\sqrt{2}$,对 $t=T$ 类似. 由于 $\Gamma_G(T)=\Gamma_G(0)=G$,因此若令 $\gamma_P(T)=P'$,则 $d(P',G)<\rho/\sqrt{2}$.

由于 $C(G,\rho)$ 是 G 的关联圆,P,P' 是圆 $C(G,\rho/\sqrt{2})$ 中的两点,由引理 5 在圆 $C(G,\rho/\sqrt{2})$ 中存在 γ_P 的两段弧,它们分别以 P,P_1 和 P_1',P_2 为端点,P_1,P_2 都在法直径上. 最后,γ_P 的弧 $\widehat{P_1P_2}$ 上的每一点与 Γ 的距离都小于 ρ,它的两个端点 P_1,P_2 都位于 Γ 在 G 的法线上. 若 $P_1=P_2$,定理得证. 若 $P_1\neq P_2$,由于 G 在上述这条法线上,它就不可能介于 P_1 与 P_2 之间,故只有两种可

能的次序：GP_1P_2，GP_2P_1.

又因轨线只能以同一方向穿过法直径上的线段 P_1P_2，因而若以 Γ 以及构成闭曲线的 γ 的弧 $\overset{\frown}{P_1P_2}$ 和线段 P_2P_1 为边界所组成的环域记作 A，则在情形 $GP_1P_2(GP_2P_1)$，半轨 $\gamma_{P_1}^-$，$\gamma_{P_1}^+(\gamma_{P_2}^+$，$\gamma_{P_2}^-)$ 之一必整个地位于 A 中，因此对这条半轨上的所有的点 Q，都有 $d(Q,\Gamma)<\rho$.

(d) 由此证明也得知，若 γ_P 是一个环(其中 $d(P,\Gamma)<\delta$)，则对每一点 $M\in\Gamma$，相应地有点 $M'\in\gamma_P$，使得 $d(M,M')<\rho$.

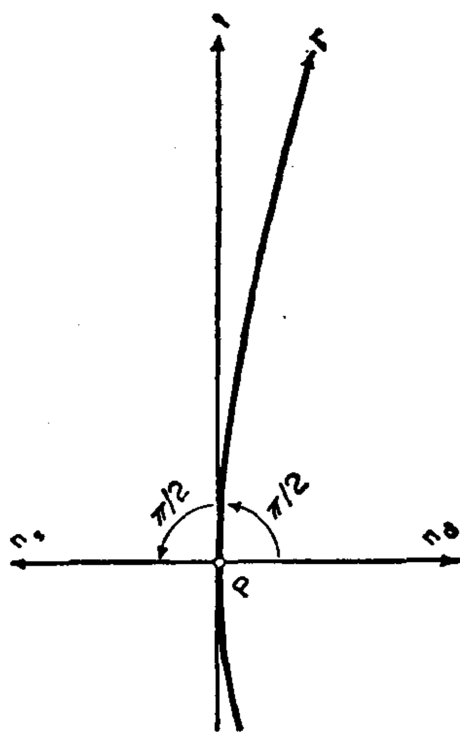


图 49

5.（平面）常极限轨线

(a) 设 Γ 是一条常极限轨线，它是由某轨线 γ 的 $\Omega(\gamma)$ 的一部分所组成. $\boldsymbol{t}$ 是 Γ 在 P 点的切线，其方向与 Γ 的相同，$\boldsymbol{n}_s$ 与 $\boldsymbol{n}_d$ 是 Γ 在 P 点的半法线，使得从 $\boldsymbol{t}$ 到 $\boldsymbol{n}_s$ 和从 $\boldsymbol{n}_d$ 到 $\boldsymbol{t}$ 的正角都是 $\pi/2$（图 49).

设 $C(P,\rho)$ 是 P 点的关联圆，G_s 是 $C(P,\rho)$ 中 γ 与 $\boldsymbol{n}_s$ 的交点集，G_d 是 $C(P,\rho)$ 中 γ 与 $\boldsymbol{n}_d$ 的交点集．若 γ 不是环（若 γ 是环，则 $\gamma=\Omega(\gamma)=\Gamma$)，则点 P 是且仅是 G_s，G_d 之一的聚点，如果 Γ 分平面为两个区域(即若 Γ 是一环，或双方无界，亦即既 α-发散又 ω-发散的轨线)，这个结论是显然的.

反之，若 P_1 与 P_2 是 $G_s\cup G_d$ 的两个相继点（它们分别对应于 t_1 与 t_2，$t_1<t_2$，使得当 $t_1<t<t_2$ 时 $\gamma(t)$ 没有点属于 $G_s\cup G_d$)．则三种次序 P_1PP_2，PP_1P_2，PP_2P_1 中只有最后一种情况才有可能发生．由此得知，$\gamma_{P_2}^+$ 必与线段 P_2P_1 相交，此外，穿过的方向也只能与 Γ 穿过的方向相同(图 50(a)，(b)，(c)).

由此得知，集合 G_s 与 G_d 之一是空集，另一个则构成单调趋

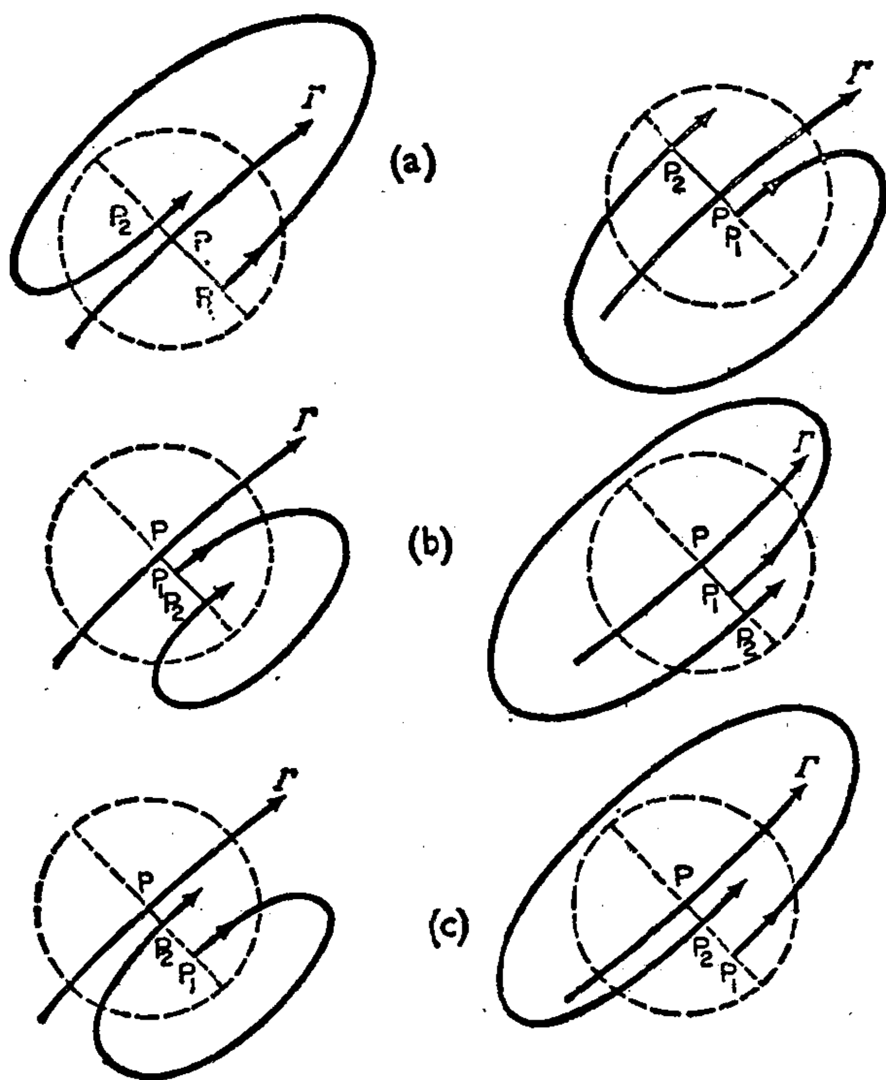


图 50

于 P 的序列 $\{P_n\}$.

于是，当 P 在 Γ 的某个位置时，集合 G_s，G_d 之中不是空集的那一个显然当 P 在 Γ 上变动时它也是不空的. 事实上，如果对点 P，G_s 非空，则存在 Γ_P^+ 的弧 $\overset{\frown}{PQ}$，对它上面的每一点 G_s 非空；Q 点的 G_s 也不可能是空的，因为在这种情况下，同一点 Q 的 G_d 不可能是空的，因此，在 P 与 Q 之间就会存在同时使 G_s 与 G_d 都为非空的点，这与我们的断言矛盾.

总之，我们可以说，若渐近轨线（§ 1.2(a)）有常极限轨线 Γ，则这轨线只能从 Γ 的一侧盘旋逼近 Γ.

现在让我们来证明：

定理 3. 设Γ是给定轨线γ的$\Omega(\gamma)$的常极限轨线，若$\Omega(\Gamma)$ [$A(\Gamma)$] 含有常点，则Γ为一个环且与$\Omega(\gamma)$重合.

我们用反证法证明. 假设Γ不是环，则Γ与$\Omega(\Gamma)$没有公共点. 设P是$\Omega(\Gamma)$的一个常点，$C(P,\rho)$是其关联圆，NPN'是它的法直径. 设$P_1P_2P_3$是圆$C(P,\rho/\sqrt{2})$内Γ与NPN'的三个相继交点. 由 (a)，它们的次序必为$P_1P_2P_3P$. 由于$P_2\in\Gamma\subset\Omega(\gamma)$，在$\gamma$上必存在任意接近于$P_2$，从而属于$C(P,\rho/\sqrt{2})$的点. 因此，由引理 5 γ，必须与NPN'相交，且穿过的方向总是与Γ穿过的方向相同. 但是γ在P_1与P_2之间和NPN'的交点不可能多于一个(图 51)，在P_2与P_3之间的交点也不可能多于一个. 由假定$P_2\in\Omega(\gamma)$，故γ在P_1与P_2之间或在P_2与P_3之间与NPN'必有无穷多个交点. 因此Γ是一个环(若以$A(\Gamma)$代替$\Omega(\Gamma)$，则可得到同样的结论).

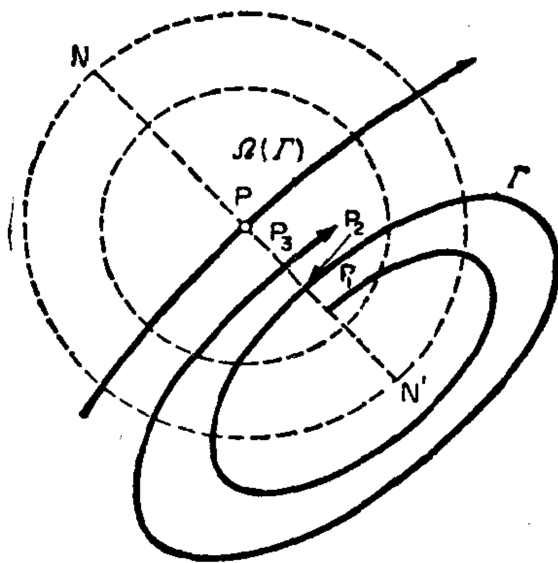


图 51

由于$\Gamma\subset\Omega(\gamma)$，$\gamma$上有任意接近于$\Gamma$的点$P$. 因此，由定理 2 存在$\Gamma$的($\rho$)邻域，$\gamma$的半轨位于其中. 这条半轨一定是$\gamma_P^+$，因为若是$\gamma_P^-$，按定理 2 的证明的同样推理，存在一个环域使$\gamma_P^+$不在其中，这与假设矛盾.

这样的γ_P^+必有界，因此$\Omega(\gamma)$必连通(引理 1). 从而不可

能存在 $\Omega(\gamma)$ 的点 Q 它也不属于 Γ，因为否则 Γ_Q 或者退化为一奇点，或者如果 Q 是常点，则由刚才看到的，Γ_Q 应为一环，不管怎么样，我们有与 Γ 不相交且是 $\Omega(\gamma)$ 的组成部分的第二个闭集 Γ_Q，这与 $\Omega(\gamma)$ 的连通性相矛盾.

6. 有界极限集 $\Omega(\gamma)$ 的结构

(a) 考虑轨线 γ 及其极限集 $\Omega(\gamma)$，并以 Ω_s 记 $\Omega(\gamma)$ 中的奇点的全体，它可能是空集. 设 $\Omega(\gamma)$ 有界，$\Omega(\gamma)$ 无界的情形将在§ 1.8 中讨论.

若 Ω_s 是空集，则唯有常轨线可作为 $\Omega(\gamma)$ 的组成部分，但由于 $\Omega(\gamma)$ 有界，对每一条这样的轨线 Γ，$\Omega(\Gamma)$ 非空 (引理 1). 另一方面，$\Omega(\Gamma)$ 中只可能包含常点. 因此，由定理 3 得知，$\Omega(\Gamma)$ 退化为一个环.

若 Ω_s 非空，则 Ω_s 必为闭集 (§ 1.1(c))，它可能与整个 $\Omega(\gamma)$ 重合 (在§ 1.7 中我们将给出这种情况的例子)，要不，就有一条或几条必须为开的常极限轨线构成 $\Omega(\gamma)$ 的一部分. 对每条这种轨线 Γ，由引理 3 有 $A(\Gamma)\subset\Omega(\gamma)$，$\Omega(\Gamma)\subset\Omega(\gamma)$，进而，更有 $A(\Gamma)\subset\Omega_s$，$\Omega(\Gamma)\subset\Omega_s$.

总结这段的结果，可得下面的 I. Bendixson 定理；除此以外，本段以及后面的其它结果也大多属于 Bendixson(见 I. Bendixson[1]).

定理 4. 设 $\Omega(\gamma)$ 为一有界集，若它不含奇点，则它必为一环；反之，$\Omega(\gamma)$ 就含有闭的奇点集 Ω_s，此外还含有开的极限轨线 Γ，且每一条 Γ 都 ω-渐近于又 α-渐近于集合 Ω_s，轨线 γ 以螺旋线方式趋于每一常极限轨线(§ 1.5).

另外，还可证明，有界集 $\Omega(\gamma)$ 中的开轨线的条数至多为可数多条(参看 G. Solntsev[1]*)).

(b) 若 Ω_s 只有有限个点，则有界集 $\Omega(\gamma)$ 一般呈曲线多边形状，其顶点为 Ω_s 中的点，其边为 $\Omega(\gamma)$ 所含的开的极限轨线. γ

---

*) 也可参看 В. В. Немюцкий, В. В. Степанов “微分方程定性理论” 中译本上册第二章定理 9. 王柔怀，童勤谟译，科学出版社，1956 年. ——译者注

则从这种多边形的内部或外部趋近于它．这种图形称为多角环或网络．

(c) 在§ 1.7 中我们还将更详细地研究当 Ω_t 退化为一个点(奇点)时的情形．下面我们引用一个由 E. Digel 给出的有趣例子(见 E. Digel [1])，它的 $\Omega(\gamma)$ 只有一个奇点，但却有无穷多条开的极限轨线．

考虑系统(4.1.1)，其中 X, Y 定义如下 $(x^2+y^2=\rho^2)$:

$$X(x, y)=6x^2y^5\rho^6\sin^2\rho y^{-1}-2x^2y^4\rho^7\sin\rho y^{-1}\cos\rho y^{-1}$$
$$-x\rho^{14}+2xy^6\rho^7\sin^2\rho y^{-1}-xy^{12}\sin^4\rho y^{-1}-y\rho^{13},\quad y\neq 0,$$
$$Y(x, y)=6xy^6\rho^6\sin^2\rho y^{-1}-2xy^5\rho^7\sin\rho y^{-1}\cos\rho y^{-1}-y\rho^{14}$$
$$+2y^7\rho^7\sin^2\rho y^{-1}-y^3\sin^4\rho y^{-1}+x\rho^{13},\quad y\neq 0$$

以及

$$X(x, 0)=-x^{15},\quad Y(x, 0)=x^{14}.$$

如此定义的 X, Y 在全平面上有偏导数，这是因为当 $y\neq 0$ 时 $y^3\sin^m\rho y^{-1}\cos^n\rho y^{-1}$ $(m, n\geqslant 0)$ 在全平面内显然有偏导数的缘故．

点 $O=(0, 0)$ 是这系统的唯一奇点．以 O 为极点引入极坐标 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$，则上述系统当 $\sin\theta\neq 0$ 变成

$$\begin{aligned}\dot{\rho}=\rho^{13}(&6\sin^5\theta\cos\theta\sin^2\sin^{-1}\theta\\&-2\sin^4\theta\cos\theta\sin\sin^{-1}\theta\cos\sin^{-1}\theta)\\&-\rho^{13}(\rho-\sin^6\theta\sin^2\sin^{-1}\theta)^2,\\\dot{\theta}=\rho^{13},&\end{aligned}$$

当 $\sin\theta=0$ 时变为 $\dot{\rho}=-\rho^{14}$, $\dot{\theta}=\rho^{13}$．由于 $\dot{\theta}\geqslant 0$，这系统的轨线可写为 $\rho=\rho(\theta)$，其中 $\rho(\theta)$ 是方程

$$d\rho/d\theta=6\sin^5\theta\cos\theta\sin^2\sin^{-1}\theta$$
$$-2\sin^4\theta\cos\theta\sin\sin^{-1}\theta\cos\sin^{-1}\theta-(\rho-\sin^6\theta\sin^2\sin^{-1}\theta)^2$$

的解，暂时不计 $\rho>0$ 这一条件，则这方程有解

$$\rho=\sin^6\theta\sin^2(1/\sin\theta)^{*)},\tag{4.1.9}$$

*) 原书这段中的 arc sinθ 和 $1/\sin\theta$ 都用 $\sin^{-1}\theta$ 表示，实际上这儿以前的 $\sin^{-1}\theta$ 是指 arc sinθ，而这儿以及后面式子中的 $\sin^{-1}\theta$ 应指 $1/\sin\theta$，现已改正．——译者注

$$\rho = \sin^6\theta \sin^2(1/\sin\theta) + 1/(\theta - c)(\theta > c, \text{或} \theta < c). \quad (4.1.10)$$

方程 $\sin^6\theta\sin^2(1/\sin\theta) = 0$ 在区间 $0 < \theta < \pi$ 内有无穷多个根，它们把这个区间分成无穷多个开子区间. 若 (β, γ) 是这些子区间之一，则在其中 $\rho(\theta) > 0$. 又由 (4.1.9),

$$\lim_{\theta\to\beta+0} \rho(\theta) = \lim_{\theta\to\gamma-0} \rho(\theta) = 0.$$

因此，(4.1.9) 为系统 (4.1.1) 在 (β, γ) 中的轨线，它以 O 为唯一的 ω-极限点，也以它为唯一的 α-极限点. 若对 $\theta > c$ 考虑 (4.1.10)，则 $\rho(\theta) > 0$ 且 (4.1.10) 表示这个系统的其它轨线，它们都以 O 和轨线 (4.1.9) 为其 ω-极限点集(图 52).

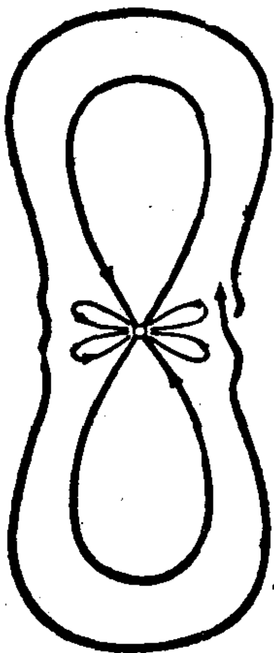


图 52

7. 由一个奇点构成的极限集

(a) 让我们从下面的引理开始.

引理 6. 若系统 (4.1.1) 的轨线 $\gamma(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时趋于点 Q，则极限集 $\Omega(\gamma)$ 由 Q 构成. 反之，若 $\Omega(\gamma)$ 是由一个点 Q 所组成，则当 $t\to+\infty$ 时 $\gamma(t)$ 趋于 Q.

显然 $Q\in\Omega(\gamma)$. 如果还存在另外一点 $R\in\Omega(\gamma)$, $R\neq Q$, 记 $d(R, Q) = d > 0$, 对每个 t 有 $d \leqslant d(R, \gamma(t)) + d(Q, \gamma(t))$. 但是必须存在递增序列 $\{t_n\}\to+\infty$，使得 $d(R, \gamma(t_n))\to 0$，对这同一序列又有 $d(Q, \gamma(t_n))\to 0$，因此 $d = 0$，即 $R = Q$，与假设矛盾.

反之，若 $\Omega(\gamma)$ 退化为一点 Q，则对每个 $\rho > 0$，对应地有 t_0，使得当 $t > t_0$ 时 $d(\gamma(t), Q) < \rho$. 因为若存在 $\bar\rho$ 使上述结论不成立，则对任意大的 t^*，存在 $t > t^*$，使得 $\gamma(t)$ 不在 $C(Q, \bar\rho)$ 之内. 但是，由假设存在递增序列 $\{t_n\}\to+\infty$，使得 $\gamma(t_n)$ 是 $C(Q, \bar\rho)$ 的内点，因此存在序列 $\{t_n^*\}\to+\infty$，使得点列 $\gamma(t_n^*)$ 属于 $C(Q, \bar\rho)$ 的圆周. 但这样的点列的每个聚点异于 Q 却又属于 $\Omega(\gamma)$，这是不可能的.

从这个今后要用到的引理以及§ 1.6(a) 中的结果，得知：

定理 5. 若已给 $\Omega(\gamma)$ 的奇点集 Ω_s 退化为一点 Q，则或者 $Q=\Omega(\gamma)$，或者在 $\Omega(\gamma)$ 中至少存在一条开的极限轨线 Γ，使得 $Q=\Omega(\Gamma)$，或者 $Q=A(\Gamma)$，或者两者同时成立.

(b) 现在我们来研究系统 (4.1.1) 的轨线 $\gamma(t)$，例如当 $t\to+\infty$ 时，能够趋于奇点 Q 的方式.

首先我们可以假定 Q 与原点 O 重合，然后，引入极坐标 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则轨线可表为形式 $\rho=\rho(t)$，$\theta=\theta(t)$，由假设 $\rho(+\infty)=0$. 令

$$\underline{\theta}=\varliminf_{t\to+\infty}\theta(t),\quad \bar{\theta}=\varlimsup_{t\to+\infty}\theta(t),$$

由第二章§ 3.4 知道，若 $X(x,y)$，$Y(x,y)$ 在 $C(O,\gamma)$ 内全纯，则必有 $\underline{\theta}=\bar{\theta}$. 但另一方面，在现在的假设下，我们不久可看到，这时共有三种可能性：$(\alpha)\underline{\theta}<\bar{\theta}$，$(\beta)\underline{\theta}=\bar{\theta}=\theta(+\infty)$ 且 $|\theta(+\infty)|<+\infty$；$(\gamma)\underline{\theta}=\bar{\theta}=\theta(+\infty)$ 且 $|\theta(+\infty)|=+\infty$.

(c) 现在我们给出系统 (4.1.1) 的一个例子，原点 O 为此系统的(α)情形，其中 $-\infty=\underline{\theta}<\bar{\theta}=+\infty$（在 P. Hartman-A. Wintner 的文章中，曾对 X，Y 附加上一些一般性条件，以排除 (α) 情形出现的可能性（见 P. Hartman-A. Wintner [1]).

考虑系统（见 E. Digel [1]第 11 页，以 $-t$ 代替 t）：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-x\rho^4-y\rho^2\cos\rho^{-1}-y\rho^3\sin\rho^{-1},\quad \rho>0\\ \dot{y}&=-y\rho^4+x\rho^2\cos\rho^{-1}+x\rho^3\sin\rho^{-1},\quad \rho>0\end{aligned}\right\}$$

其中 $\rho^2=x^2+y^2$，当 $\rho=0$ 时 $\dot{x}=\dot{y}=0$.

换成极坐标，即得系统

$$\dot{\rho}=-\rho^5,\quad \dot{\theta}=\rho^2(\cos\rho^{-1}+\rho\sin\rho^{-1}),$$

这系统的轨线可表示为 $\theta=\theta(\rho)$ 的形式，其中 $\theta(\rho)$ 为方程

$$d\theta/d\rho=-\rho^{-3}[\cos\rho^{-1}+\rho\sin\rho^{-1}],\quad \rho>0$$

的解.

此方程的解是曲线 $\theta=\rho^{-1}\sin\rho^{-1}+c$，$c$ 为常数. 当 $t\to+\infty$

时轨线图形如图 53 所示，这正是 (α) 情形.

(d) 对情形 (β)，最简单的情况是由 $\theta(+\infty)$ 存在有限极限可推知轨线的切线存在极限. 这在解析系统已被证明过了 [第二章§ 3.5(b)]. 即使在更一般的假设下这个结论也能成立 (见 P. Hartman-A. Wintner[1] 第 118 页)，但如下例所示 (见P. Hartman-A. Wintner [1] 第 120 页)，在本章的假设下，此结论却未必成立.

考虑系统 (4.1.1)，其中

$$X(x, y) = -x, \quad Y(x, y) = -2x^2\sin x^{-1} + x\cos x^{-1},$$

当 $0 < |y| \leqslant x^2$，在平面上的其它地方要求处处连续且满足 Lipschitz 条件. 这系统的解为 $x = e^{-t}$，$y = e^{-2t}\sin e^t$，对此有 $\rho(+\infty) = 0$，且当 $t \to +\infty$ 时 $\lim y/x = 0$，但 $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{y}/\dot{x}$ 却不存在. 因此由第二章§ 3 知道，轨线的切线没有极限.

(e) 容易构造一个系统，其轨线当 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 时都趋于 O，且使得情形

$$(\beta):\ \theta(+\infty) = \theta(-\infty), \quad |\theta(+\infty)| < +\infty$$

成立.

不太显然的是情形 (γ) 的例子，即

$$\theta(+\infty) = \theta(-\infty) = +\infty[= -\infty].$$

下面给出这种情形的一个例子(参看 E. Digel[1] 第 13 页)，考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x} = (2xy + y^2)\cos\log\rho^{-1} + (y^2 - x^2 - xy)\sin\log\rho^{-1}, & \rho > 0,\\ \dot{y} = (y^2 - x^2 - xy)\cos\log\rho^{-1} + (x^2 - 2xy)\sin\log\rho^{-1}, & \rho > 0,\end{cases}$$

其中 $\rho^2 = x^2 + y^2$，当 $\rho = 0$ 时 $\dot{x} = \dot{y} = 0$. 这系统可写为极坐标方程

$$\dot{\rho} = \rho^2\sin(\theta - \log\rho^{-1}),$$

$$\dot{\theta} = -\rho\cos(\theta - \log\rho^{-1}) - \rho\sin(\theta - \log\rho^{-1}).$$

其解为曲线

$$\rho = c(1 + c^2t^2)^{-1/2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}(-ct) + \log c^{-1}(1 + c^2t^2)^{1/2},$$

其中 c 为正常数，arc tg( ) 取主值. 容易看出，这些曲线在 O 的邻域内的性状如图 54 所示.

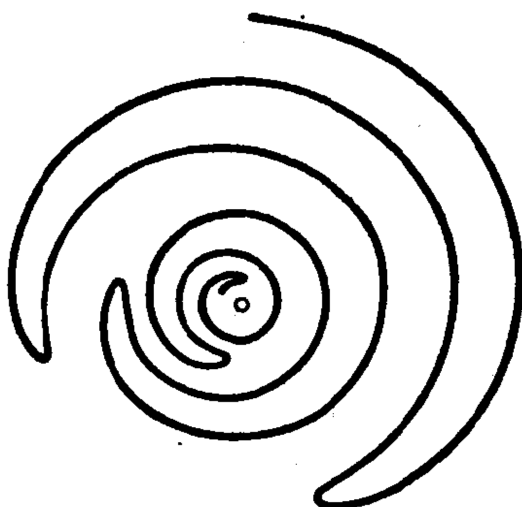


图 53

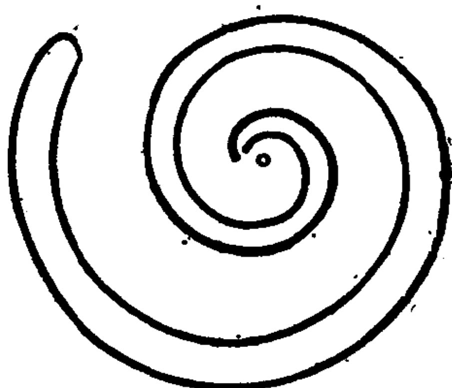


图 54

8. 无界集 $\Omega(\gamma)$ 的结构

(a) 我们已经证明(引理 1)，如果已知轨线 γ 包含一有界半轨 γ^+，则它的 $\Omega(\gamma)$ 是连通集. 若去掉这一条件，则 $\Omega(\gamma)$ 可以是不连通的，这可以从下面的例子看出. 考虑系统 (4.1.1)，其中 X, Y 定义如下:

$$X(x, y) = \frac{\operatorname{tg}x - y}{1 + (\operatorname{tg}^2 x + y^2)^{1/2}} \cos^2 x,$$

$$\text{对 } |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < +\infty.$$

$$Y(x, y) = \frac{\operatorname{tg}x + y}{1 + (\operatorname{tg}^2 x + y^2)^{1/2}};$$

在带域 $|x| < \frac{\pi}{2}$, $|y| < +\infty$ 之外，若 $x < -\pi/2$，令 $X = 0$; 若 $x > \pi/2$，令 $Y = +1$.

变换 $\xi = \operatorname{tg}x$, $\eta = y$ 将上述系统变成

$$\dot{\xi} = \frac{\xi - \eta}{1 + (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}}, \quad \dot{\eta} = \frac{\xi + \eta}{1 + (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}},$$

这系统的轨线与系统 $\dot{\xi} = \xi - \eta$, $\dot{\eta} = \xi + \eta$*) 的轨线在原点 O 附近是相同的，它们都是以 O 为极点的对数螺线. 因此，容易看出，原来系统的轨线如图 55 所示，从而当 $t \to -\infty$ 时它们都趋

*) 原书这里误为 $\dot{\eta} = \xi - \eta$. ——译者注

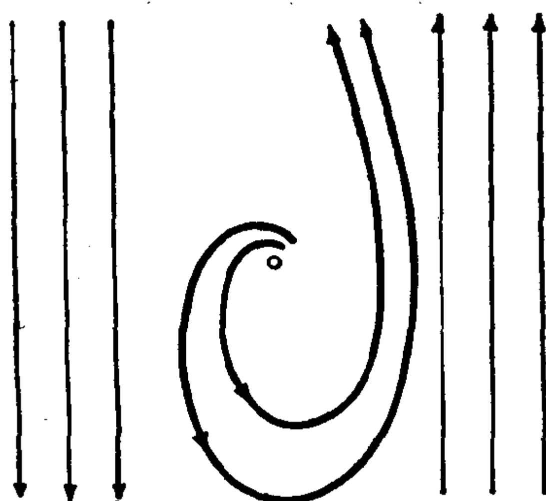


图 55

于 O，$\Omega(\gamma)$ 为两条直线 $x=-\pi/2$，$x=\pi/2$.

(b) 无界集 $\Omega(\gamma)$ 的结构曾由 Vinograd 研究过，他证明了下面的定理，我们在此只叙述而不给予证明(见 R. E. Vinograd [1]. 也可看 V. V. Nemystskii-V. V. Stepanov[1] (中译本第 30 页))：

定理 6. 若集合 $\Omega(\gamma)$ 无界且不包含奇点，则它由可数多条分支子集所组成，其中每一条都与一个开区间同胚. 而在平面的每一有界部分至多有有限个这样的分支.

R. E. Vinograd 还证明了下面的定理(文献同上)：

定理 7. x, y 平面中的点集 E 是某系统 (4.1.1) 轨线的极限集 $\Omega(\gamma)$ 的充分必要条件是：E 是扩张复 $z=x+iy$ 平面中一单连通区域的边界.

z 平面中的一个单连通区域，是指属于它的任意一闭 Jordan 曲线可连续变形到一点(或等价地，它在扩张复平面中的余集为连通集).

§2. 平 面 环

1. 极限环

(a) 我们知道，一条闭轨线，或者特别地，一个环 Γ，应满足关系式 $\Gamma=\Omega(\Gamma)=A(\Gamma)$，因此，它是一条极限轨线. 一个环仅当

它至少是一条异于Γ的轨线γ的$\Omega(\gamma)$或$A(\gamma)$时，才称为极限环。

与奇点的情况不同，如我们在§ 1.6(c)，§ 1.7(e)中的例子所看到的，奇点可以同时是同一条开轨线的$\Omega(\gamma)$和$A(\gamma)$. 系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y) \tag{4.2.1}$$

的极限环则可用下面的定理来刻划，其中X, Y满足本章开头所述的假设。

定理 8. 若(极限)环Γ是内侧轨线（属于Γ所围区域中的轨线）[外侧轨线]的$\Omega(\gamma)$，则它就不可能再是任何内[外]侧轨线γ'的$A(\gamma')$.

首先，设γ在Γ的内侧，且$\Gamma=\Omega(\gamma)$. 由定理 2 知道，存在γ与Γ在给定点G的法线的两个相继交点P_1, P_2，使得半轨$\gamma_{P_1}^{-}$整个地位于由线段P_1P_2与γ的弧$\widehat{P_1P_2}$所组成的闭曲线C所围成的区域内，于是$A(\gamma)$与Γ有一正的距离，这就不可能有$A(\gamma)=\Gamma$.

现在假定$\Gamma=\Omega(\gamma)$, γ'是Γ内部异于γ的轨线. 设R为由Γ和上述的闭曲线C所围成的环域. 由定理 2，所作的R可使其中不含奇点(图 56).

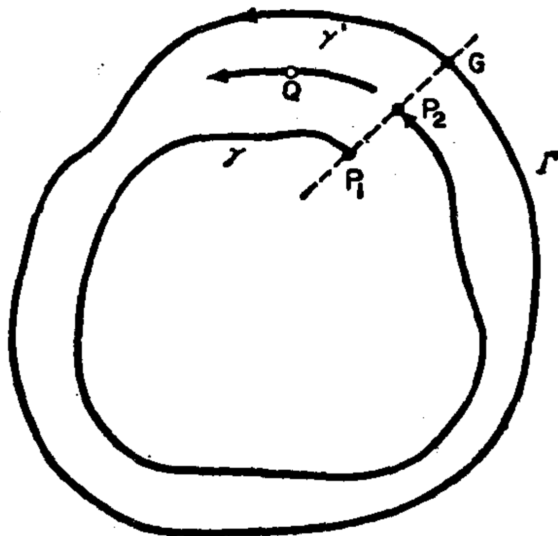


图 56

若$A(\gamma')=\Gamma$，则在R内至少存在一点$Q\in\gamma'$，且$\gamma_Q'^{-}$按§ 1.5 (a)中定理 4 的意义趋于Γ. 此外，γ_Q^{-}不能离开R，因为与P_1P_2

相交时只能按同一方向穿过，因此 $\Omega(\gamma')$ 包含在 R 内，又因 R 内不含奇点，由定理 4，$\Omega(\gamma')$ 为一环，从而它与 Γ 的同一法线不能相交两次．因而若 $\Gamma'\neq\Gamma$，则有以 $\Gamma\cup\Gamma'$ 为边界的环域 $R_1\subset R$．只要 $\Omega(\gamma)=\Gamma$，R_1 中就不可能有 γ 的任何点，因此有 $\Gamma=\Gamma'$，而这导致 $\Gamma=\Omega(\gamma')=A(\gamma')$，但这是不可能的．

于是我们还得到：

定理 9. 若系统 (4.2.1) 的环 Γ 是 Γ 内[外]部某条轨线 γ 的 $\Omega(\gamma)$，则存在 Γ 的邻域，使得从这邻域位于 Γ 内[外]部的点出发的每一条轨线 γ' 都以 Γ 为其 $\Omega(\gamma')$．

(b) 我们用下面的定理来完成上面定理的证明．

定理 10. 若 γ 是系统 (4.2.1) 的一条开轨线，它 ω-渐近于环 Γ（即 $\Gamma=\Omega(\gamma)$），则对每一点 $P\in\gamma$，可确定一圆 $C(P,\rho)$，使得从其中出发的轨线都是 ω-渐近于 Γ 的(开)轨线．

令 $d=d(P,\Gamma)$，由定理 2，存在 $\delta>0$，使得当 $d(Q,\Gamma)<\delta$ 时，或者 $d(\gamma_Q^+,\Gamma)<d/3$，或者 $d(\gamma_Q^-,\Gamma)<d/3$．此外，由假设，γ_Q^+ 上至少有一点 Q 属于 Γ 的 $\delta/2$ 邻域．由解对初值的连续依赖性，总可找到圆 $C(P,\rho)$，$\rho<d/3$，使得从其中出发的正半轨其上有点 M 与 Q 的距离小于 $\delta/2$．因此，点 M 属于 Γ 的 δ 邻域．又由定理 2，γ_M^+ 或 γ_M^- 必整条位于 Γ 的 $d/3$ 邻域．但是，因为 γ_M^- 与 P 的距离小于 $d/3$，从而与 Γ 的距离大于 $2d/3$；因而 γ_M^+ 必定位于此邻域内．

(c) 两个环，一个在另一个内部，称为是相邻的，如果在它们之间的环域内不再包含闭轨线(奇点或环)．于是我们有：

定理 11. 两个相邻的环是由这两个环所构成的环域内的一切轨线的极限环，其中之一是所有这些轨线的 $\Omega(\gamma)$，另一个则是所有这些轨线的 $A(\gamma)$．

事实上，若 γ 是由环 Γ 与 Γ' 所构成的环域 R 内的一条轨线，则集 $\Omega(\gamma)$ 有界、连通且非空．又由于在 R 中无奇点，由定理 4 知道 $\Omega(\gamma)$ 为一环，因此它必须与 Γ 或 Γ' 重合，设它与 Γ 重合．类似地，$A(\gamma)$ 是一环且一定与 Γ' 重合（定理 8）．此外，由定理 9，

Γ 不可能是 R 中任一轨线 γ' 的 $A(\gamma')$，因此，Γ' 也不可能是 $\Omega(\gamma')$.

2. 极限环的分类.轨道稳定性

(a) 一个极限环可以是所有内侧轨线的极限，也可以是所有外侧轨线的极限；又可以同时是内外两侧轨线的极限.前两种情形的环称为单侧极限环，后一种情形的环称为双侧极限环. 若是我们毋需对它们作精确的区分，就统称它们为极限环。

显然，为使一环为极限环（单侧的或双侧的），其充分必要条件是存在一邻域(或仅为内邻域，或仅为外邻域)，使得其中不含有其它环的点.

因此，如果在已知系统 (4.2.1) 的轨线中只有有限个环，则它们之中的每一个都是(双侧)极限环.

(b) 借用下面这个由定理 8 和定理 9 所启示的定义，可以对极限环作进一步的区分.

定义. 一个极限环称为是稳定[不稳定]的，如果它是内外侧轨线的 $\Omega(\gamma)[A(\gamma)]$；否则，就称为半稳定极限环.

在第九章我们将看到，正是由于环的稳定性这一性质，稳定环恰当地可称为 $t\to+\infty$ 时是轨道(渐近)稳定的.

3. 例子

设 $f(u)$ 对 $u\geqslant 0$ 定义、连续且满足 Lipschitz 条件. 系统(见 S. Lefchetz [1]，中译本第 234—235 页)

$$\dot{x}=-y+xf(x^2+y^2),\ \dot{y}=x+yf(x^2+y^2) \qquad (4.2.2)$$

就满足本章开头加于系统 (4.2.1) 的那些条件，且以原点 O 为其奇点. 在极坐标系下这系统变为

$$\dot{\rho}=\rho f(\rho^2),\ \dot{\theta}=1,$$

因此，如果方程

$$f(\rho^2)=0 \qquad (4.2.3)$$

有根 $r_0^2>0$，则圆 $\rho=r_0$，$\theta=t$，$-\infty<t<+\infty$，即

$$x = r_0\cos t,\quad y = r_0\sin t,\quad -\infty < t < +\infty,$$

就是系统 (4.2.2) 的一个环.

若 r_0^2 是方程 (4.2.3) 的一个孤立根,则此圆是一孤立环,从而是一极限环,反之亦然. 如果当 u 通过 r_0^2 而增加时, $f(u)$ 从大于零变到小于零,则这环是稳定的,反之它是不稳定的; 如果 u 通过 r_0^2 时 $f(u)$ 不变号,则此环为半稳定的.

现在我们来看几个由给定的 $f(u)$ 所得到的例子.

(i) 设 $f(u) \equiv 0$, 则得中心点, 这在第二章中已考虑过了; 任一环(同心圆)都不是极限环.

(ii) 设 $f(u) = 1 - u$, 对 $0 \leqslant u$. 圆 $\rho = 1$ 是一个稳定极限环 (图 57)

(iii) 设 $f(u) = (u-1)^2\sqrt{u}$, 对 $0 \leqslant u$. 圆 $\rho = 1$ 是半稳定极限环 (图 58).

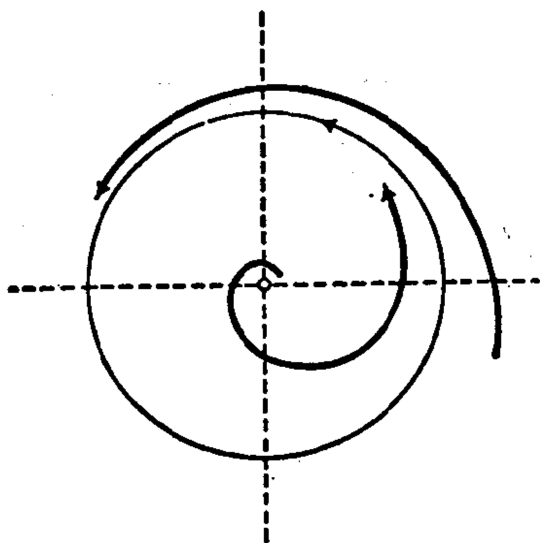


图 57

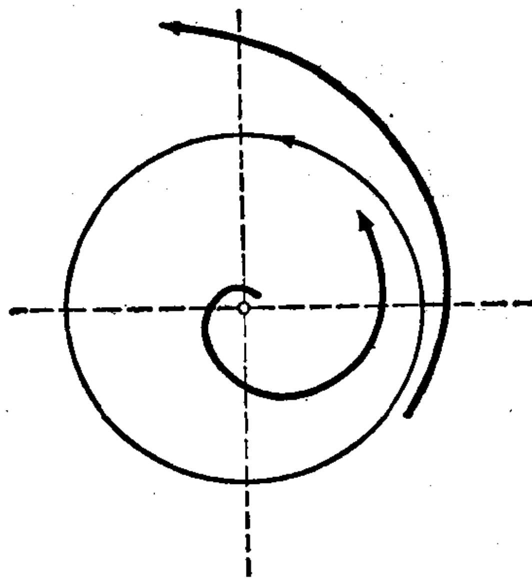


图 58

(iv) 设 $f(u) = u^{-1}(u-1)^2\log(u-1)$, 对 $u > 1$; $f(0) = 0$, 对 $0 \leqslant u \leqslant 1$. 圆 $\rho = r$, $0 < r < 1$ 是环, 但不是极限环; $\rho = 1$ 是单侧极限环, $\rho = 2$ 是不稳定极限环(图 59).

(v) 设 $f(u) = (u-1)^2\sin(u-1)^{-1}$, 对 $0 \leqslant u < 1$, $u > 1$; $f(1) = 0$. 所有的圆 $\rho = 1 + 1/(k\pi)(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

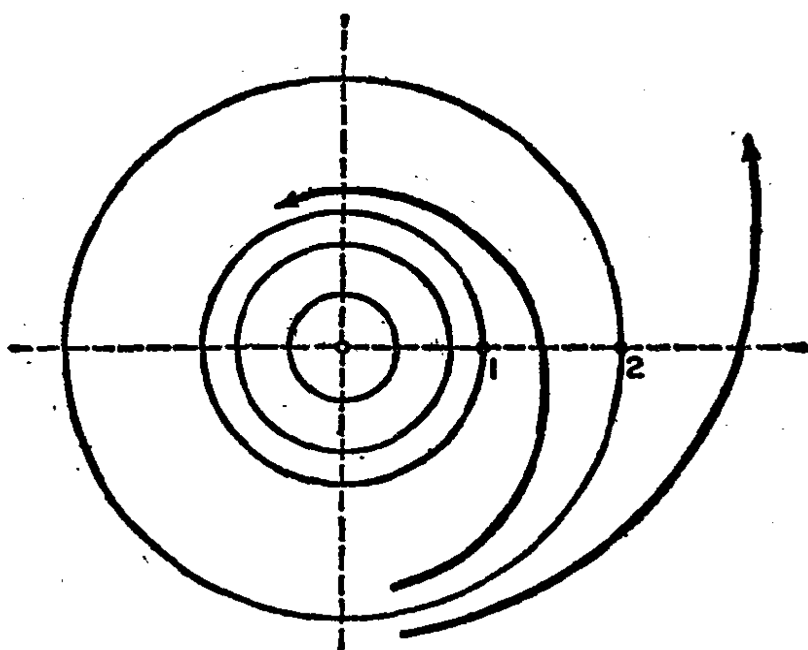


图 59

都是极限环，这些环随着 k 的变化从稳定环 $\rho=1-1/\pi$ 开始变到不稳定环 $\rho=1+1/\pi$ 为止，它们的稳定性相互交替，且都集中在环 $\rho=1$(非极限环)的邻域内(见§ 2.2(c))．

(vi) 设 $f(u)=u^2\sin u^{-1}$，对 $u>0$，$f(0)=0$．所有的圆 $\rho=1/(k\pi)$ $(k=1,2,\cdots)$ 都是极限环，当 k 为奇数时它们都是稳定的，当 k 为偶数时都是不稳定的．

4. Bendixson 定理

在对系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y) \tag{4.2.1}$$

的相平面的研究中．Bendixson 定理对于阐明环的整体性质起着重要的作用．在这里我们将给出这个定理的两个证明．第一个出于 Bendixson[1] 的原来的证明(其它的证明本质上都等价于 Bendixson 的证明，但要用到超穷数，见 V. V. Nemytskii-V. V. Stepanov[1]，中译本上册第 50 页)，第二个证明 (A. D. Myshkis [1]) 要用到 Brouwer 不动点定理(见第七章§ 2)，这显示了 Bendixson 定理的拓扑性质．第三个证明则基于指标概念，它将在§ 4.1(f) 中给出．

这定理是：

定理 12. 系统 (4.2.1) 的环所围成的区域内至少包含有一个奇点.

证法 1. 设 Γ 是系统 (4.2.1) 的一个环，G 是由 Γ 所围的区域，假设 G 内不包含奇点.

对任一点 $P\in G$，γ_P 为常轨线，因此它或者是一环，或者是一有界而渐近于两集合 $A(\gamma)$，$\Omega(\gamma)$ 的开轨线. 由于 G 中不含奇点，故 $A(\gamma)$ 和 $\Omega(\gamma)$ 是(定理 4)两条相异(定理 8)的环，因此其中至少有一条异于 Γ 且包含在 G 内. 从而，若环内不含奇点，则由此环所围成的区域内至少总含有另一个环.

对于 G 的闭包 $\overline{G}$ 中的每一点 P，我们定义函数 $V(P)$. 若 γ_P 为一环，则此函数值为 γ_P 所围区域的面积(按 Peano-Jordan 定理，这样的区域一定有面积)，若 γ 为一开轨线（它必为渐近的)，则函数值为 G 的面积 V.

设 P_w 是对应于 $V(P)$ 在 $\overline{G}$ 中的值的下确界*) $\overline{V}$ 的 Weierstrass 点，即在该点的每个邻域内 $V(P)$ 的下确界都等于 $\overline{V}$，由于 G 内含有环，故 $\overline{V}<V$.

若 γ_{P_w} 为开轨线，由定理 10 存在圆 $C(P_w,\rho)$，过其中各点的轨线只能是开的，因此在此圆内我们有 $V(P)=V>\overline{V}$，这与 P_w 的定义矛盾.

但是，γ_{P_w} 也不可能是一个环. 因为如果它是一环，则其内部必含有另一环 γ'，使得 $d(\gamma_{P_w},\gamma')=d>0$，且对 γ' 内域的面积 V' 和 γ_{P_w} 内域的面积 $V(P_w)$ 有 $V'<V(P_w)$. 由定理 2，对应于 $d/2$，存在 $\delta>0$，使得只要 $d(P,P_w)<\delta$，而 γ_{P_w} 为一环，则从 P 点出发的轨线整个地位于 γ_{P_w} 的 $d/2$ 邻域内. 又由定理 2 后面的说明，这个环必须包含 γ' 在其内部. 因此，从圆 $C(P_w,\delta)$ 内出发的轨线或者为开轨线，这时对应的值 $V(M)=V>\overline{V}$；或者为一环，这时对应的值 $V(M)>V'>\overline{V}$. 但这仍与点 P_w 的定义

---

*) 原书为上确界. 下同. ——译者注

矛盾.

证法 2. 考虑通过每一点 $P\in\overline{G}$ 的轨线 $\gamma_P(t)$, 其中 $\gamma_P(0)=P$. 对 $n=1,2,\cdots$, 令 T_n 是将 $P=\gamma_P(0)$ 映到 $\gamma_P(1/n)$ 的变换. T_n 是将 $\overline{G}$ 映到它自身的拓扑变换. 因而由 Brouwer 不动点定理 (参看第七章§ 2), 这变换至少有一个不动点, 从而至少存在一点 Q_n, 使得 $Q_n=\gamma_{Q_n}\left(\frac{1}{n}\right)$.

对 n 的每一个值, 点集 Q_n 为闭, 因而, 对 n 的每一值可以选取一点 Q_n.

序列 $\{Q_n\}$ 显然是有界的, 故至少存在一个聚点. 我们马上就可以看到, 这个聚点就是一个奇点.

假如不然, 设 Q 是一个常点. 则存在 t 的两个值 $t_1, t_2, 0<t_1<t_2$, 使得以点 $\gamma_Q(t_1)$ 和 $\gamma_Q(t_2)$ 为端点的 $\gamma_Q(t)$ 的闭弧段与 Q 点的距离 $d>0$. 于是

$$d(\gamma_Q(t), Q)\geqslant d>0, \quad t_1\leqslant t\leqslant t_2. \tag{4.2.4}$$

从序列 $\{Q_n\}$ 中我们可以选取一个趋于 $Q=\gamma_Q(0)$ 的子序列 $\{Q_\nu\}$, 使得对充分大的 ν, 由解对初值的连续依赖性知 $d(\gamma_{Q_\nu}(t), \gamma_Q(t))<d/2$, 对 $0\leqslant t\leqslant t_2$. 特别地, 对 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 有

$$-d(\gamma_{Q_\nu}(t), \gamma_Q(t))>-d/2, \quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2). \tag{4.2.5}$$

把 (4.2.4) 和 (4.2.5) 相加, 得知对 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, 有

$$d(\gamma_Q(t), Q)-d(\gamma_{Q_\nu}(t), \gamma_Q(t))>d/2,$$

从而

$$d(\gamma_{Q_\nu}(t), Q)>d/2, \quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2). \tag{4.2.6}$$

此外, 若 $\nu_0>1/(t_2-t_1)$, 则对每一个 $\nu>\nu_0$, 存在正整数 $\mu=\mu(\nu)$, 使得当 $t_1\leqslant\mu/\nu\leqslant t_2$, 且 $t=\mu/\nu$ 时, 由 (4.2.6) 推知 $d(\gamma_{Q_\nu}(\mu/\nu), Q)>d/2$. 由于 $\gamma_{Q_\nu}(\mu/\nu)=\gamma_{Q_\nu}(1/\nu)=Q_\nu$, 故 $d(Q_\nu, Q)>d/2$, 对 $\nu>\nu_0$, 而这与 $Q_\nu\to Q$ 的事实矛盾.

5. C^1 类系统. 环的特征指数

(a) 在本段中我们假设系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y) \tag{4.2.1}$$

的右端 X, Y 在某区域 D(可以是整个 x, y 平面)内是 C^1 类函数. 即 X 与 Y 在 D 内具有一阶连续偏导数. 称这样的系统为 D 内的 C^1 类系统.

我们来证明下面的引理(见 S. K. Zaremba [1]).

引理 7. 设 (4.2.1) 是 D 内的 C^1 类系统, 且在 D 内

$$X^2(x,y)+Y^2(x,y)>0,$$

即 D 内不含奇点.

设 $A_1=(x_1,y_1)$, $A_2=(x_2,y_2)$ 是 D 中 (4.2.1) 的轨线弧

$$L:\ x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

的两个端点, t_1, t_2 $(t_1<t_2)$ 是这两点所对应的参数值.

再设 J_1, J_2 是与 (4.2.1) 正交的系统

$$\begin{aligned} dx/du&=-Y(x,y)[X^2(x,y)+Y^2(x,y)]^{-1},\\ dy/du&=X(x,y)[X^2(x,y)+Y^2(x,y)]^{-1}\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

的依次通过 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 的两条轨线.

在 J_i 上取 $u=u_i$, 使得 $u_i=0$ 对应于 $(x_i,y_i)(i=1,2)$. 于是, 若将 u_2 看成 u_1 的参数, 使得对应于值 u_1 与 u_2 的 J_1 与 J_2 上的点是 (4.2.1) 的轨线弧段上的两个端点, 则

$$\left.\frac{du_2}{du_1}\right|_{u_1=0}=\exp\left(\int_{t_1}^{t_2}[X_x(\varphi(t),\psi(t))+Y_y(\varphi(t),\psi(t))]dt\right). \tag{4.2.8}$$

首先我们注意到, 若 P 是 L 上的点, 且在这一点处 $X=0$, 则在此点, 从而在包含 P 在其内部的 L 的一整段弧上有 $Y\neq 0$. 因此, 我们可以作一段包含 P 在其内部的闭弧, 使得在这弧段上 $Y\neq 0$. 当然, 对于那些使 $X\neq 0$, $Y\neq 0$ 的点 P 来说上述结论也成立.

对于使 $Y=0$ 的点 P, 我们可作一段弧, 使在其上 $X\neq 0$. 对这样的弧段集合应用 Heine-Borel 定理, 可将 L 划分成有限个弧段, 在这些弧段上有 $X\neq 0$ 或者 $Y\neq 0$.

由 (4.2.8) 的形式得知, 只需对这种弧, 例如在其上 $X\neq 0$ 的

那条弧来证明就行了，于是这弧段可表示为 $\eta=\eta(x)$ 的形式，其中 $\eta(x)$ 是方程

$$dy/dx=Y(x,y)/X(x,y) \tag{4.2.9}$$

的一个解.

由 $X(x,y)$ 的连续性，这种表示法对于(4.2.1)的属于上述弧的某邻域内的一切轨线均成立.

设 $\eta_1(u_1)$, $\eta_2(u_2)$ 为直线 $x=x_1$, $x=x_2$ 与(4.2.1)通过 J_1 上对应于值 u_1 的点的轨线 $\eta(x)$ 的交点之纵坐标(图 60).

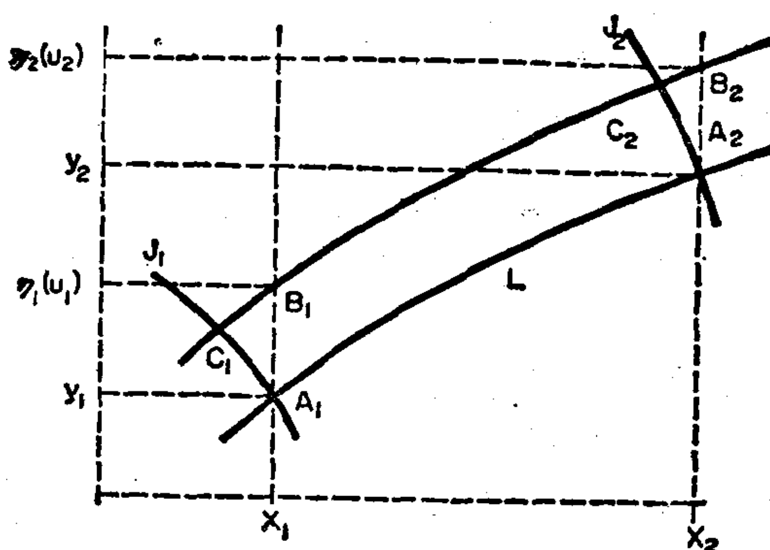


图 60

首先可得

$$\left.\frac{d\eta_1}{du_1}\right|_{u_1=0}=\frac{1}{X(x_1,y_1)}. \tag{4.2.10}$$

显然，(4.2.10)的两端有相同的符号，因为例如设 $X(x,y)>0$，则由(4.2.7)在 J_1 上 $y(u)$ 随 u 单调增加，从而 $\eta_1(u_1)$ 也随 u_1 的增加而增加. 因此只需证明(4.2.10)两端的绝对值相等就行了. 为此，考虑三角形 $A_1B_1C_1$, $A_1=(x_1,y_1)$, $B_1=(x_1,\eta_1(u_1))$, C_1 是 J_1 上对应于参数 u_1 的点. 设 r 表示 L 在 A_1 处的切线，s_1 表示 J_1 上的弧 A_1C_1 的长度，则有

$$\left|\frac{\eta_1(u_1)-y_1}{u_1}\right|=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}\cdot\frac{\overline{A_1C_1}}{s_1}\cdot\frac{s_1}{u_1}=\frac{\sin\angle A_1C_1B_1}{\sin\angle C_1B_1A_1}\cdot\frac{\overline{A_1C_1}}{s_1}\cdot\frac{s_1}{u_1},$$

令 $u_1 \to 0$ 取极限，得

$$\left|\frac{d\eta}{du_1}\right|_{u_1=0} = \frac{1}{\cos\angle rx}\cdot\frac{ds_1}{du_1} = (X^2+Y^2)^{-1/2}\frac{1}{\cos\angle rx} = \frac{1}{X(x_1, y_1)},$$

即得 (4.2.10)。

类似地，

$$\left.\frac{d\eta_2}{du_2}\right|_{u_2=0} = \frac{1}{X(x_2, y_2)},$$

因此，由 (4.2.10) 有

$$\left.\frac{du_2}{du_1}\right|_{u_1=0} = \frac{X(x_2, y_2)}{X(x_1, y_1)}\left.\frac{d\eta_2}{d\eta_1}\right|_{u_1=0}.$$

此外，由 (4.2.9) 我们有(第一章§ 3.5(b))

$$\left.\frac{d\eta_2}{d\eta_1}\right|_{u_1=0} = \exp\left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial(Y/X)}{\partial y}dx\right),$$

因此，

$$\begin{aligned}\left.\frac{du_2}{du_1}\right|_{u_1=0} &= \frac{X(x_2, y_2)}{X(x_1, y_1)}\exp\left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{Y_yX - X_yY}{X^2}dx\right)\\ &= \exp\left(\log\frac{X(x_2, y_2)}{X(x_1, y_1)} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{Y_yX - X_yY}{X}dt\right)\\ &= \exp\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{X_xX + X_yY}{X}dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{Y_yX - X_yY}{X}dt\right),\end{aligned}$$

由此即得 (4.2.8)。

(b) 现在设 L 为一个环 Γ. 对任一点 P，考虑 (4.2.7) 的轨线 J，在其上 u 是如此定义，使得 $u=0$ 对应于 P，这时 $J_1 = J_2 = J$. 以 u_2 表示对应于 J 上的点 Q_2 的参数 u 的值，Q_2 是 (4.2.1) 的从 J 上对应于 $u=u_1$ 的点 Q_1 出发的轨线，当 t 增加时第一次与 J 相遇的点.

由 (4.2.8) 得知，若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 是环 Γ 的任一表达式，其中 φ，ψ 以 T 为周期，且

$$P = (\varphi(0), \psi(0)) = (\varphi(T), \psi(T)),$$

则

$$\left.\frac{du_2}{du_1}\right|_{u_1=0} = \exp\left(\int_0^T \{X_x(\varphi(t),\psi(t)) + Y_y(\varphi(t),\psi(t))\}dt\right). \tag{4.2.11}$$

鉴于 (4.2.11)，我们称

$$h_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \{X_x(\varphi(t), \psi(t)) + Y_y(\varphi(t), \psi(t))\}dt, \tag{4.2.12}$$

或等价地称

$$h_0 = \frac{1}{T}\int_{(\Gamma)} \operatorname{div}(X, Y)dt \tag{4.2.13}$$

为环 Γ 的特征指数. (4.2.13) 中的符号 (Γ) 表示积分是围绕 Γ 按 t 增加的方向而取的.

(c) 由§ 2.1 和§ 2.2 以及 $du_2/du_1|_{u_1=0}$ 的意义，立刻得到：

定理 13. 若 Γ 为 C^1 类系统 (4.2.1) 的一个环，它的特征指数 h_0 为负数，则 Γ 是一稳定极限环；若特征指数 h_0 为正数，则 Γ 是一不稳定极限环.

因此，如果 Γ 是一个环，但或者不是极限环，或者是半稳定极限环，则 $h_0 = 0$.

这个定理的证明可由 (4.2.11) 立刻得到. 因为若 $h_0 < 0$，则 $du_2/du_1|_{u_1=0} < 1$，即对充分接近于零的 $|u_1|$ 有 $|u_2| < |u_1|$，因此 Q_2 位于 Q_1 与 P 之间.

H. Poincaré[1] 对 X, Y 为全纯函数时得到了定理 13. 这里考虑的 C^1 类系统的情形是属于 A. A. Andronov [1]. 也有作者用其它方法得到这一定理的 (可参看 J. J. Stoker [1] 的附录 5; A. A. Andronov-C. E. Chaikin[1] 第五章§ 6). 这儿的证明是 S. K. Zaremba [1] 给出的.

半稳定极限环所满足的其它必要条件见 P. N. Papus[1], V. A. Chechik [1] 与 V. F. Tkachev [1].

定理 13 的逆定理是不成立的. 例如，对§ 2.3 中所考虑的系统 (4.2.2)，当 $f(u) = (1-u)^3$ 时，它有唯一稳定极限环 $x^2 + y^2 = 1$；但是，$\operatorname{div}(X, Y) = 2[f(x^2+y^2) + (x^2+y^2)f'(x^2+y^2)]$ 在环上每一点处都等于零，因而 $h_0 = 0$.

特征指数等于零对应于 $du_2/du_1|_{u_1=0}=1$，为了讨论这种情形，必须确定 $u_2(u_1)$ 的高阶导数在 $u_1=0$ 的性质，但这就要求对(4.2.1)中的 X，Y 附加更多的限制．它要涉及到§ 2.6 中关于解析系统的讨论，虽然那里所用的方法与此地的不同．

对于 C^2 类系统(4.2.1)，即 X，Y 有连续二阶偏导数，S. P. Diliberto 证明了，当系统(4.2.1)的正交系统(4.2.7)的轨线在环上每一点处都具负曲率时，系统(4.2.1)的这个环是稳定的，这时甚至可以出现 $h_0=0$ 的情况(参看 S. P. Diliberto [1] 的定理 4)．

(c) 在第九章，环的特征指数将就轨道稳定问题来进行讨论．

6. 解析系统的环

(a) 现在假定 $X(x,y)$，$Y(x,y)$ 在 x，y 平面某区域内的每一点 (x_0,y_0) 的邻域中可展为 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$ 的幂级数．区域 D 也可以是整个平面．

在这一假设下，(4.2.1)称为解析系统(参看第二章§ 3)．

我们的论述是以 M. Urabe [1] 的工作为基础．

设 Γ 是(4.2.1)在 D 内的一个环，令 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 为其参数表达式，其中 $x(t)$，$y(t)$ 的周期为 T．

以 $\boldsymbol{n}$ 表示 Γ 在点 $P\in\Gamma$ 的法线，按通常方法定向，亦即当 $\boldsymbol{t}$ 表示 Γ 在 P 点的定向切线时，从 $\boldsymbol{t}$ 到 $\boldsymbol{n}$ 的正角等于 $\pi/2$．

为简短起见，令 $X=X(x(t),y(t))$，$Y=Y(x(t),y(t))$．于是 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为

$$l(t)=-Y(X^2+Y^2)^{-1/2},\quad m(t)=X(X^2+Y^2)^{-1/2}. \tag{4.2.14}$$

若以 $\rho(t)$ 表示从 P 到 $\boldsymbol{n}$ 上的点 $Q=(x_1,y_1)$ 的有向距离，则有

$$x_1=x(t)+\rho(t)l(t),\quad y_1=y(t)+\rho(t)m(t). \tag{4.2.15}$$

因此，对给定的 t 值 t_0，以及 Γ 上的点 $P_0=(x(t_0),y(t_0))$，令 $\boldsymbol{n}_0$ 为 Γ 在 P_0 点的法线，若 Q_1 是 $\boldsymbol{n}_0$ 上充分靠近于 P_0 的任一点，则我们知道，(4.2.1)的从 Q_1 出发的轨线按正方向走下去将在 Q_2 与 $\boldsymbol{n}_0$ 再次相遇．由 § 1.4 知道，除 $\boldsymbol{n}_0$ 以外，弧 $\widehat{Q_1Q_2}$ 与 Γ 的每条

法线 n 只相交一次.

设 $x = x_1(\tau)$, $y = y_1(\tau)$ 是 $\widehat{Q_1Q_2}$ 的参数表达式. 对每一 $t \in [t_0, t_0 + T]$, 我们有点 $P \in \Gamma$ 和对应的一条法线 n, $\widehat{Q_1Q_2}$ 在这条法线上只有一点,因而 τ 是 t 的单值函数 $\tau = \tau(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$.

对于每一条弧 $\widehat{Q_1Q_2}$, 我们选择 $\tau(t)$ 使得

$$\tau(t_0) = t_0. \tag{4.2.16}$$

在 (4.2.15) 中, 以 $x_1(\tau)$, $y_1(\tau)$ 代替 x_1, y_1, 并且关于 t 求导数,得

$$X_1\dot{\tau} = X + \dot{\rho}l + \rho\dot{l}, \quad Y_1\dot{\tau} = Y + \dot{\rho}m + \rho\dot{m}, \tag{4.2.17.1}$$

为简短起见,这里 $X_1 = X(x_1(\tau), y_1(\tau))$, $Y_1 = Y(x_1(\tau), y_1(\tau))$.

现在,若令

$$k = k(t) = (Y\dot{X} - X\dot{Y})(X^2 + Y^2)^{-3/2}, \tag{4.2.18}$$

则由 (4.2.14) 立刻得到

$$\dot{l} = kX, \quad \dot{m} = kY,$$

于是 (4.2.17.1) 可写为

$$X_1\dot{\tau} = \dot{\rho}l + (1 + k\rho)X, \quad Y_1\dot{\tau} = \dot{\rho}m + (1 + k\rho)Y.$$

解出 $\dot{\rho}$, $\dot{\tau}$, 并利用 (4.2.14),即得

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho} &= (X^2+Y^2)^{1/2}(1 + k\rho)(XY_1 - YX_1)(XX_1+YY_1)^{-1}, \\ \dot{\tau} &= (X^2+Y^2)^{1/2}(1 + k\rho)(XX_1 + YY_1)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.17.2}$$

若以 D 记算子

$$D = l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y},$$

则 $X_1 = X + \rho DX + \cdots$, $Y_1 = Y + \rho DY + \cdots$, 将它们代入 (4.2.17.2), 得

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho} &= (X^2 + Y^2)^{1/2}(1 + k\rho)\frac{\rho(XDY - YDX) + \cdots}{X^2 + Y^2 + \rho(XDX + YDY) + \cdots}, \\ \dot{\tau} &= (1 + k\rho)\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Y^2 + \rho(XDX + YDY) + \cdots}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.17.3}$$

对充分小的 $|\rho|$，(4.2.17.3) 的第一式的右端在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ 内是 (ρ, t) 的解析函数. 事实上，在 Γ 上有 $X^2 + Y^2 > 0$，而分母中 $X^2 + Y^2$ 以后的项是随 ρ 一起成为无穷小.

由此得知 (G. Sansone [1] 第一章§ 3.4(a)，也可参看本书第二章§ 4 关于中心问题的论述)，满足

$$\rho(t_0, \rho_0) = \rho_0 \tag{4.2.19}$$

的解 $\rho(t, \rho_0)$ 对充分小的 $|\rho_0|$ 是 ρ_0 的解析函数. 由于 $\rho(t, 0) = 0$，对此解我们有

$$\rho(t, \rho_0) = r_1(t)\rho_0 + r_2(t)\rho_0^2 + \cdots + r_m(t)\rho_0^m + \cdots, \tag{4.2.20}$$

其中 $r_m(t)$ 是 t 的解析函数.

如果在 (4.2.20) 中令 $t = t_0$，由 (4.2.19) 我们有

$$\rho_0 = r_1(t_0)\rho_0 + r_2(t_0)\rho_0^2 + \cdots,$$

由此即得

$$r_1(t_0) = 1, \ r_m(t_0) = 0, \ m = 2, 3, \cdots \tag{4.2.21}$$

若在 (4.2.20) 中令 $t = t_0 + T$，得知由 Q_2 到 P 的距离 $\rho(t_0 + T, \rho_0)$ 是由 Q_1 到 P 的距离 ρ_0 的函数，Poincaré 称之为**后继律**:

$$\rho(t_0 + T, \rho_0) = r_1(t_0 + T)\rho_0 + r_2(t_0 + T)\rho_0^2 + \cdots. \tag{4.2.22}$$

由此立刻得知解析系统的环的一个性质:

定理 14. **若 Γ 是解析系统的一个环，则存在 Γ 的一个邻域，其中或者只含环，或者只含开轨线.**

事实上，如果在 Γ 的每个邻域内既有环上的点又有开轨线上的点，则点 P_0 是 P_0 处法线 n_0 上与点 Q_2 重合的无穷多个点 Q_1 的聚点. 因此方程 $\rho(t_0 + T, \rho_0) - \rho_0 = 0$ 有无穷多个根，它们不恒等于零，但以零为聚点. 这是不可能的，因为 $\rho(t_0 + T, \rho_0)$ 是 ρ_0 的解析函数.

注. § 2.3 的例 5 指出，若去掉 X, Y 的解析性这一假定，则定理 14 不成立.

(b) 将展开式 (4.2.20) 代入 (4.2.17.3) 的第一式，并令 ρ_0 的同次项相等，则得含有无穷多个微分方程的方程组

$$(X^2 + Y^2)^{1/2}\dot{r}_1 = (XDY - YDX)r_1,$$

$$(X^2+Y^2)^{1/2}\dot{r}_m=(XDY-YDX)r_m+R_m(r_1,\cdots,r_{m-1})$$
$$(m=2,3,\cdots),$$
其中 R_m 是其变元的 m 次多项式，多项式的系数是 t 的函数. 依次积分这些方程，并利用初值条件(4.2.22)，可求得展开式(4.2.20)中的系数 $r_1(t)$, $r_2(t)$, $\cdots$，从而，展开式(4.2.2)中的系数也可求得，这就给出了后继律.

例如，利用恒等式

$$XDY-YDX=(X^2+Y^2)^{1/2}(X_x+Y_y)-d(X^2+Y^2)^{1/2}/dt,$$

立刻可以验证上面写的两个方程中的第一个变为

$$\dot{r}_1/r_1=X_x+Y_y-(X^2+Y^2)^{1/2}d(X^2+Y^2)^{1/2}/dt,$$

在 t_0 与 t_0+T 之间积分此式，并注意到 $X(x(t),y(t))$, $Y(x(t),y(t))$ 是以 T 为周期的周期函数以及 $r_1(t_0)=0$，即得

$$r_1(t_0+T)=\exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T}\{X_x+Y_y\}dt\right),$$

借助于§ 2.5 中的记号，上式亦可写为 $r_1(t_0+T)=e^{h_0T}$.

因此，(4.2.22)可写为

$$\rho(t_0+T,\rho)/\rho_0=e^{h_0T}$$
$$+r_2(t_0+T)\rho_0+\cdots+r_m(t_0+T)\rho_0^{m-1}+\cdots\quad(4.2.23)$$

这样，对解析系统我们又得到了定理 13 的一部分结论. 亦即若 $h_0<0$，则(极限)环为稳定；若 $h_0>0$，则(极限)环为不稳定. 但是在现在的假设下，对 $h_0=0$ 的情况可作更多的研究. 事实上，由(4.2.23)推知下面的定理成立：

定理 15. 若解析系统(4.2.1)的环 Γ 的特征指数 h_0 等于零，则或者存在 $r_k(t_0+T)\neq 0$（设 k 为使此式成立的最小指标），那么，当 k 为偶数时 Γ 为半稳定极限环；当 k 为奇数时，则 $r_k(t_0+T)<0$ 时 Γ 为稳定极限环，$r_k(t_0+T)>0$ 时 Γ 为不稳定极限环，或者 $r_k(t_0+T)=0$，对 $k=2,3,\cdots$，则存在 Γ 的邻域，它被环所充满，这时 Γ 称为被嵌入于一个环的连续统.

(c) 对于被嵌入连续统的环，我们将看到，其邻近环的周期是如何随距离 ρ_0 而变化的.

为此，将 (4.2.17.3) 的右端重写为

$$\dot{\tau} = (1 + k\rho)\left(1 + \rho\frac{XDX + YDY}{X^2 + Y^2} + \cdots\right)^{-1}.$$

由此，对充分小的 $|\rho|$，有

$$\dot{\tau} = 1 + \left(k - \frac{XDX + YDY}{X^2 + Y^2}\right)\rho + \cdots.$$

由 (4.2.18) 立刻得知

$$k - \frac{XDX + YDY}{X^2 + Y^2} = \frac{2XY(X_x - Y_y) + (Y^2 - X^2) + (X_y + Y_x)}{(X^2 + Y^2)^{3/2}},$$

再在 t_0 到 $t_0 + T$ 之间积分前一式子，即得

$$\tau(t_0 + T) - \tau(t_0) = T + \int_{t_0}^{t_0+T}\frac{2XY(X_x - Y_y) + (Y^2 - X^2) + (X_y + Y_x)}{(X^2 + Y^2)^{3/2}}\rho dt + \cdots \tag{4.2.24}$$

当 Q_1 与 Q_2 重合时，$\tau(t_0 + T) - \tau(t_0)$ 表示环 $\widehat{Q_1Q_2}$ 的周期 T'，根据 (4.2.20) 知 ρ 是 ρ_0 的解析函数，这说明若 Γ 被嵌入到环的连续统 Γ' 中去，则 Γ' 的周期是由 Q 到 P_0 的距离 ρ_0 的解析函数.

7. 右端为多项式的系统的极限环

现在假设系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \tag{4.2.1}$$

中的 X, Y 是无实公共因子的 x, y 的多项式．则 H. Dulac [1] 给出了下面的一个经典结果：

定理 16. 若 X, Y 是无实公共因子的 x，y 的多项式，则系统 (4.2.1) 至多有有限个极限环.

更精确的结果是 I. G. Petrovskii-E. M. Landis [2] 给出的，他们证明了：

定理 17. 若 X, Y 为次数最多等于 n 的多项式，则系统 (4.2.1)

的极限环的数目，当 n 为偶数时不会超过 $(6n^3-7n^2+n+4)/2$，当 n 为奇数时不会超过 $(6n^3-7n^2-11n+6)/2$.

S. Diliberto [1] 与 B. M. Peretyagin [1] 给出了极限环数目的另一些上界.

一般地，对每个值 n，这些上界是否能真正达到是不知道的. 对 $n=2$，我们有 (I. G. Petrovskii-E. M. Landis [1]):

定理 18. 若 X, Y 为二次多项式(齐次或非齐次)，则极限环的最大数目不会超过 3，并且的确存在这样的系统，它有 3 个极限环*).

8. 无平面环的区域

现在我们列出几个判别系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y) \tag{4.2.1}$$

在 x, y 平面的区域 D 内不存在极限环的准则.

由§ 2.4 的 Bendixson 定理，立刻得到:

定理 19. 无奇点的区域 D 内不存在环.

更一般地，应用§ 4 将要定义的指标概念，我们有如下定理:

定理 20. 若区域 D 内至多存在有限个奇点，且它们的指标之和不等于 $+1$，则在该区域内不存在环.

若 (4.2.1) 是 C^1 类系统，则有下面定理 21, 22, 23 所给出的判别准则:

定理 21. 若在单连通区域 D 中的每一点，

$$\operatorname{div}(X,Y)=X_x+Y_y$$

具同一符号，则在 D 内不存在环(见 Bendixson [1]).

事实上，若在 D 内存在环 Γ，周期为 T. 以 G 表示 Γ 的内域，则由 Gauss 定理(即 Green 公式——译者注)得

$$\iint_G (X_x+Y_y)\,dxdy=\int_\Gamma (Xdy-Ydx)=\int_0^T (X\dot{Y}-Y\dot{X})dt=0.$$

---

*) 这个定理的结论是错误的，我国的数学工作者陈兰荪，王明淑，史松龄曾各自举出出现四个极限环的反例. 见“数学学报”1979 年第 6 期和“中国科学”1979 年第 11 期. ——译者注

而这与 $X_x + Y_y$ 在整个区域D内不等于零的假设矛盾.

按照定理 13，半稳定环具有零特征指数，因此，我们有如下定理：

定理 22. 若在某区域D(不必要单连通)内

$$\operatorname{div}(X, Y) = X_x + Y_y$$

不改变符号，则 (4.2.1) 在D内不存在半稳定极限环.

(见 H. Dulac [2]，证明也可看 Z. K. Zaremba [1]).

最后，鉴于定理 13 的证明，我们有：

定理 23. 若在某区域D内恒有 $X_x + Y_y = 0$，则在此区域内不包含任何极限环.

(见 S. K. Zaremba [1] 第 233 页).

注. 由于对 $X(x, y)$ 与 $Y(x, y)$ 同时乘上相同因子$M(x, y) \neq 0$ 后，(4.2.1) 的轨线保持不变 (第一章 §5)，故在由定理 21，22，23 所给出的判别法则中，都可以

$$\operatorname{div}(MX, MY) = (MX)_x + (MY)_y$$

代替其中的 $\operatorname{div}(X, Y)$ 来加以考虑，其中M是 C^1 类函数. 适当选取M可以得到有益的结果. 作为这方面的例子可参看 F. Kestin-S. K. Zaremba[1].

9. 平面自治系统的周期解. 极限环的存在性

(a) 假设系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \qquad (4.2.1)$$

有解 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$，它对 $t_0 < t\ [t < t_0]$ 有界，或者说它正(负)向有界，从而对应的轨线的 ω-极限集 [α-极限集] 有界，因而它是一个环(§1)，或者它含有奇点. 在这两种情况下 (4.2.1) 有周期解，也可能是常数解. 反之，若 (4.2.1) 有周期解，则 (4.2.1) 显然有正负向都有界的解，因此我们有：

定理 24. 系统 (4.2.1) 有周期解的充分必要条件是该系统至少有一个正(或负)向有界解.

(b) 定理 24 的直接推论是：

若在不含奇点的 x, y 平面的有界区域 D 内，包含有 (4.2.1) 的整条轨线，则 D 中至少有一个极限环.

特别地，我们有下面著名的判别极限环存在的 Poincaré-Bendixson 定理：

定理 25. 若 D 是由两条闭曲线 C', C'' 所围成的环域，且假定：(1) D 的闭包中不含奇点，(2) 当 t 增加或减少时，轨线通过 C' 和 C'' 时都进入 D，则 D 内至少含有一个极限环.

对 C^1 类系统，这条定理已被 M. Urabe-S. Katsuma 所推广，在它们的结论中可假定轨线与 C' 或 C'' 相切 (见 M. Urabe-S. Katsuma [1]).

Poincaré-Bendixson 定理在第六章(§ 4.5,7)中经常要用到. 存在性的其它准则还有 N. P. Eryghin 的论文[1]中的定理 2 和 3.

10.(极限)环的唯一性

通常对于弄清楚 (4.2.1) 的围绕奇点 O 的环是否为唯一(必为极限环)这样的问题是令人感兴趣的.

对特殊系统的这个问题的研究将推迟到第六章中去进行. 唯一性的判别准则通常可分为下面两种类型：(1) 一类准则是给出条件使已给系统的围绕奇点的环不多于一个；(2) 另一类准则是给出条件，使每条围绕奇点的环都是稳定(不稳定)极限环，再利用定理 11 得知只存在一个环. 在这后一类准则中，对 C^1 类系统若能证明可能出现的环的特征指数都具相同的符号，从而它们都是稳定的或者都是不稳定的 (定理 13)，再由定理 11，排除了两个不同极限环的存在性.

§3. 孤 立 奇 点

1. 孤立奇点的分类. 第一类奇点(中心-焦点). 中心

(a) 我们默认本章开头所述的假设在这一节中总成立.

定理 26. 若 O 是系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y) \tag{4.3.1}$$

的孤立奇点，则对每个 $r>0$，至少存在一条异于 Q 的轨线 γ，其半轨 γ^+ 或 γ^- 全部位于圆 $C(Q, r)$ 内.

用反证法证明.

假设 C 是一个圆 $C(Q, r)$，使得从 $P\in C$ 出发的一切异于 Q 的轨线都在 C 内只停留有限时间. 任取 C 的半径 QR，且设 P 为其上任意一点，$P'[P'']$ 是 $\gamma_P^+[\gamma_P^-]$ 与 C 的圆周的第一个交点.

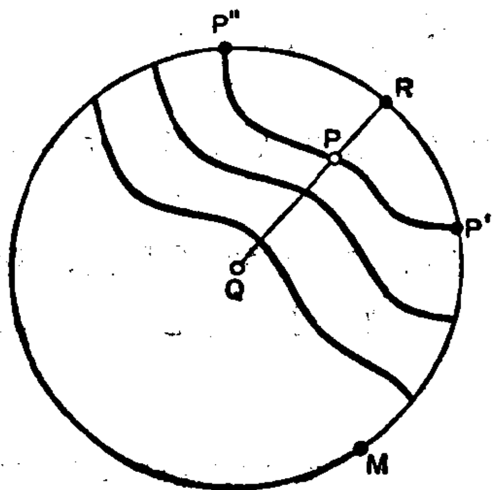


图 61

若 P 沿着这条半径连续地朝着 Q 移动，于是点 P', P'' 各自在这圆周上刻划出一个有序集合，由解的唯一性它们按相反方向排列. 设 ω' 表示 P' 的幅角，于是当 $P\to Q$ 时 ω' 递增或递减. 现在，令 ω 为 ω' 的下确界或上确界，M 为圆周上幅角为 ω 的点，则 M 是 P' 的聚点（图 61）.

由于 $M\in C$，故半轨 γ_M^- 在 C 内停留有限时间 T_0，由解的连续依赖性定理，对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得从 $C(M, \delta)$ 中出发的所有轨线在 C 内停留的时间大于 $T_0-\varepsilon$ 而小于 $T_0+\varepsilon$. 另一方面，由于 Q 是奇点，因而对应的（常数）解经历无限长时间，故对任意的 T，譬如 $T>T_0+\varepsilon$，再由连续依赖性定理，存在 $\delta_1>0$，使得当 $P\in C(Q, \delta_1)$ 时，轨线 γ_P 在 C 内停留的时间间隔 $\geqslant T$. 因此存在任意接近于 M 的 P'，使得弧 $\widehat{PP'}$ 所对应的时间间隔 $T>T_0+\varepsilon$，这就导致了矛盾.

(b) 在 *Proc.* (*Versl.*) *Koninl. Ak. Wet. Amsterdam* 的第 17，18 和 19 卷的三篇论文中，L. E. Brouwer 研究了向量在曲面上的连续分布，而并不假定过该曲面上每一点有唯一的向量场的轨线通过. 这些文章对自治微分系统来说有其深远的作用. 它们转载于题为“关于在曲面上的连续向量分布”的两篇文章中（见 L. E. J. Brouwer [1]）.

Brouwer 将 (4.3.1) 的孤立奇点分成下面两类：一类，奇点不

是任何异于它们自身的其它轨线的极限点；另一类，至少存在一条异于奇点本身的轨线，它以此奇点为其 α 或 ω-极限点．

前者称为**第一类奇点**，后者称为**第二类奇点**．

(c) 我们首先来研究相平面内第一类奇点 Q 的邻域内轨线的形状．

设 $C(Q, r_0)$ 是只含有一个奇点 Q 的圆．对任一 r, $0<r<r_0$, 在 $C(Q, r)$ 中至少存在一条异于 Q 的半轨 $\gamma_P^+[\gamma_P^-]$ (定理 26)．集合 $\Omega(\gamma)[A(\gamma)]$ 也含在 $C(Q, r)$ 中，又因为在 $C(Q, r)$ 内没有任何其它奇点，故 $\Omega(\gamma)[A(\gamma)]$ 为一环 (定理 3)．因此，$C(Q, r)$ 内至少包含一个环，又由 r 的任意性，Q 是无数多个环上的点的聚点．

此外，每一个这样的环必包含 Q 在其内部，因为否则由定理 12，在 $C(Q, r)$ 中就要存在除 Q 以外的其它奇点．

设 Γ 是这些环中的一个．我们把落在 Γ 内的点分成两种：属于这些环的点和属于渐近于这些环的开轨线的点．由此，在一般情况下，第一类奇点*)的邻域的形状如第四章§ 2.3 中的例子所示．因此，这类奇点称为**中心-焦点**．

也可能发生这样一种情况，这时存在 $r>0$，使得所有从 $C(Q, r)$ 中出发的轨线都是环，亦即奇点 Q 只是属于环的点的聚点．在这种情况下，推广第二章已给过的定义，而称 Q 为**中心**．对于中心的邻域的更详细研究，见 N. A. Sakharnikov [1]．

我们已经证明(第二章§ 2.3)，对于齐次系统和解析系统来说，第一类奇点只可能是中心．

2. 第二类奇点的邻域

(a) 第二类奇点的性质可表达为：

定理 27． 若 Q 是第二类孤立奇点，则存在一圆 $C(Q, r)$，使得从其中出发的每条轨线当 $t\to+\infty$ 或者 $t\to-\infty$，或者当

*) 指(3.1.(b))最后奇点分类中的第一类．——译者注

$t \to \pm\infty$ 时都趋于 Q;或者在 $C(Q, r)$ 内只停留有限时间.

若 Q 是直径为任意小的环内的一点，则没有轨线能趋于 Q. 因为若以 d 表示任一点 P 到点 Q 之间的距离，则总存在直径小于 $d/2$ 的环. γ_P 为了要趋于 Q 就必须从这环外面的 P 点进入这环的内部,与唯一性矛盾.

因此,存在圆 $C(Q, \bar{r})$,其中不含环也不含异于 Q 的奇点. 如果 $P \in C(Q, \bar{r})$, 则或者 γ_P 在 $C(Q, \bar{r})$ 内停留有限时间，或者 $\gamma_P^+[\gamma_P^-]$ 整个地位于 $C(Q, \bar{r})$ 内. 因而 $\Omega(\gamma_P)[A(\gamma_P)]$ 含在 $C(Q, \bar{r})$ 之内,但由于它不是环,故必含有奇点(定理 4), 亦即 Q 是 $C(Q, \bar{r})$ 内的唯一奇点.

若 $\Omega(\gamma_P)[A(\gamma_P)]$ 由单个奇点 Q 所组成,则定理得证;否则由定理 4, $\Omega(\gamma_P)$ 至少含有一条开轨线 Γ,由于它整条位于 $C(Q, \bar{r})$ 内,故 $\Omega(\Gamma) = A(\Gamma) = Q$ (定理 3).

Γ 与 Q 一起构成了一条闭曲线,其直径记作 d. 圆 $C(Q, d/2)$ 与 Γ 至少相交于两点，设 R_1 为第一个交点，R_2 为第二交点(图 62).

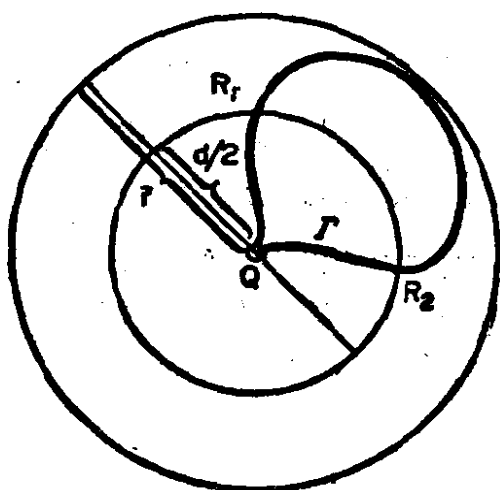


图 62

任取 $P \in C(Q, d/2)$, 若 $\gamma_P^-[\gamma_P^+]$ 不离开 $C(Q, \bar{r})$, 则它必趋于 Q, 因为若 $A(\gamma_P)[\Omega(\gamma_P)]$ 不退化为奇点 Q, 则它必须至少包含一条开轨线 Γ', 使得 $\Omega(\Gamma') = A(\Gamma') = Q$ (定理 4). 于是 $\gamma_P^-[\gamma_P^+]$ 就要以螺旋状趋于 $A(\gamma_P)[\Omega(\gamma_P)]$,由此,$\gamma_P^-[\gamma_P^+]$必与 Γ 的弧 $\overset{\frown}{QR_1}$, $\overset{\frown}{R_2Q}$ 相交，与唯一性矛盾.

(b) 按照 L. E. J. Brouwer 的意见,由上面的定理,可以将通过第二类孤立奇点 Q 的邻域 $C(Q, r)$(r 充分小)内的轨线分成三类.

假如在 $C(Q, r)$ 内不含有环，则当 $C(Q, r)$ 中的轨线在 $C(Q, r)$内只停留有限时间时(因此轨线的两个端点属于 $C(Q, r)$

的边界)，称其为双曲轨线；当 $C(Q, r)$ 中的轨线含有趋于Q的半轨(从而它有一个端点在 $C(Q, r)$ 的边界上)时，称其为抛物轨线；当 $C(Q, r)$ 包含整条轨线，且当 $t \to +\infty$ 及 $t \to -\infty$ 时，这条轨线都趋于Q（从而在 $C(Q, r)$ 以外没有轨线上的点），则称其为椭圆轨线.

若γ是一条椭圆轨线，从而它与Q构成一条闭曲线C。于是，所有属于C内部的点都是椭圆轨线上的点，其中任何两条轨线一条在另一条的内部．有关这方面的有趣例子见 E. Digel [1].

3. 焦点

(a) 现在我们来推广一些定义，这些定义对于解析系统和齐次系统来说，已在第二章§ 3 和§ 2 中给出过．点 $O=(0, 0)$（总可将奇点取作原点O)称为系统 (4.3.1) 的稳定焦点，如果存在一个圆 $C(O, r)$，使得对任意的 $P\in C(O, r)$，轨线 $\gamma_P(t)$: $\rho=\rho(t)$，$\theta=\theta(t)$ 满足两个条件——$\rho(+\infty)=0$ 和 $\theta(+\infty)=+\infty$．类似地，可给出不稳定焦点($t\to-\infty$)的定义．焦点(稳定的和不稳定的)显然是第二类孤立奇点(§ 3.1(b)).

(b) 对于解析系统，正如我们已经注意到的（第二章§ 3)，上面关于不稳定焦点的定义是多余的，这是因为有下面的定理，我们在这里只叙述而不给证明(证明见 S. Lefschetz [1]).

定理 28. 若存在一条轨线 $\rho=\bar{\rho}(t), \theta=\bar{\theta}(t)$ 有 $\bar{\rho}(+\infty)=0$, $\bar{\theta}(+\infty)=+\infty$，或者有 $\bar{\rho}(+\infty)=0, \bar{\theta}(+\infty)=-\infty$，则$O$是稳定焦点[*].

4. 例外方向

(a) 依据 M. Frommer [1]，我们作如下定义：

定义. 极角 $\theta_0(0\leqslant\theta_0\leqslant 2\pi)$ 的方向称为系统

[*] 本定理只对解析系统成立，对非解析系统，条件还不够．见§ 1.7(e) 中的例子.——译者注

$$\dot{x} = X(x, y), \ \dot{y} = Y(x, y) \quad (4.3.1)$$

关于孤立奇点O的例外方向，如果存在点列 $A_n = (\rho_n, \theta_n)$ ($n = 1, 2, \cdots$)，使得当 $n \to \infty$ 时 $\theta_n \to \theta_0$，$\rho_n \to 0$，$\operatorname{tg}\alpha_n \to 0$，其中 $\operatorname{tg}\alpha_n$ 表示 OA_n 方向与向量场 (X, Y) 在点 A_n 的方向之间的交角 α_n 的正切.

点 A_n 不必都要属于同一条轨线；但是，显然，若 (4.3.1) 存在一条趋于O的轨线，其切线趋于某一固定方向，则这个方向就是例外方向.

(b) 我们有下面的定理.

定理 29. 若以孤立奇点O为顶点的圆扇形域 $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$，$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ ($0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$) 内整个包含一条趋于 0 的半轨(从而$O$是第二类奇点)，则至少存在一个例外方向 $\bar{\theta}$，$\theta_1 \leqslant \bar{\theta} \leqslant \theta_2$.

设 γ^+ 为包含在定理所述的扇形域中的一条半轨，它的方程为 $\rho = \rho(t)$，$\theta = \theta(t)$. 若 $\theta(+\infty)$ 存在有限极限，则它必介于 θ_1 与 θ_2 之间，而且此极限就对应一例外方向*. 另一方面，若 $\theta(+\infty)$ 不存在，则

$$\theta_1 \leqslant \underline{\lim}\, \theta(t) < \overline{\lim}\, \theta(t) \leqslant \theta_2.$$

以 T_n 记扇形：$0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0/n$，$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$，对 $n = 1, 2, \cdots$，以 γ_n 记属于 T_n 中的 γ^+ 的那一部分，由假设 $\theta(t)$ 是振动的，故 $\dot{\theta} = (xY - yY)\rho^{-2}$ 无穷多次变为零；令 Z_n 为 $T_n - T_{n-1}$ 的闭包点集，在这种点处有 $\dot{\theta} = 0$. 因 Z_n 是闭集，故可对每一 n 选取点 $P_n = (\rho_n, \theta_n)$，使得由于在这种点处 $\dot{\theta} = xY - yX = 0$，极角 θ_n 的方向与向量 (X, Y) 的方向重合. 序列 $\{\theta_n\}$ 中至少有一

---

*) 原书这里没有严格证明，今补证如下：若 $\theta(+\infty)$ 存在且有限，则有两种情况——或者θ单调趋于 θ_0，或者θ振动地趋于 θ_0. 对于前者 $d\theta/dt$ 定号，对于后者 $d\theta/dt$ 变号. 若 $d\theta/dt$ 定号，则当 $t \to +\infty$ 时 $d\theta/dt \to 0$，因为否则，若 $d\theta/dt$ 常大于或常小于某一常数，则θ无限增大(小)，此时 $\operatorname{tg}\alpha_n \to 0$，故 θ_0 为例外方向. 对θ振动地趋于 θ_0 的情况可以与原书后面的情形一起讨论. ——译者注

个聚点 $\bar{\theta}$，因此存在 $\{\theta_n\}$ 的子序列 $\{\theta_n\}^*$ 使得 $\{\theta_n\}^* \to \bar{\theta}$，从而 $\bar{\theta}$ 是例外方向.

(c) 考虑下面的系统(见 O. Perron [1])

$$\dot{x} = x, \; \dot{y} = y + x\cos\log|x|/\log|x|, \; Y(0, y) = y.$$

轨线方程为

$$y = x(c + \sin\log|\log|x||),$$

c 为任意常数，若 $x \neq 0$，这些曲线都随 $\theta(t)$ 振动而趋于 O. 我们还必须将点 O 或两条半轴 $x = 0$，$y \lessgtr 0$ 也算作轨线的一部分，也只有这后两条半轴才以使 $\theta(-\infty)$ 存在有限极限的方式趋于 O.

然而，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 中的所有方向都是例外方向. 事实上，若 $A_n = (x_n, y_n)$ 是具横坐标 $x_n = e^{\pi/2 - n\pi}$ 的任意点，$n = 1, 2, \cdots$，于是立刻得知，在点 A_n 处有

$$x_n Y(x_n, y_n) - y_n X(x_n, y_n) = x_n^2 \cos\log|x_n|/\log|x_n| = 0,$$

因此，过 A_n 点的向量 (X, Y) 通过 O 点. 因而，若取过 O 点的射线，则这条射线与直线束 $x_n = e^{\pi/2 - n\pi}$ 的交点序列满足例外方向定义中的假设，这就证明了任一射线的方向均为例外方向.

(d) 对于齐次系统(第二章§ 2)，例外方向全都是不变射线的方向，亦即全都是由 $N(\theta) = 0$ 的根所表示.

我们回想一下，这时通过 O 的射线都是等倾线，亦即沿着每条射线，射线与向量 (X, Y) 之间的交角的正切 α 是常数. 因而，当且仅当 θ_n 趋于方程 $N(\theta) = 0$ 的根时 α_n 才趋于 0 .

对解析系统(第二章§ 3)可作类似的说明.

由于对应于第一类奇点，$N(\theta) = 0$ 也有根(见第二章§ 3.2 例 6). 因此，第一类奇点，例如中心点也可以有例外方向*).

5. 正规扇形域

(a) 现在我们引入**正规扇形域**的概念(见 M. Frommer [1]).

---

*) 实际上，第二章§ 3.2 例 6 中的系统就有例外方向 $\theta = 0$.——译者注

在某种意义下，它对一般系统 (4.3.1) 的作用与正规角域对于齐次系统的作用相同．这一概念在第五章将证明是必不可少的，它的定义如下：

定义．一个以 O 为顶点的圆扇形域 S: $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ ($0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$) 称为关于系统 (4.3.1) 的正规扇形域，如果 (i) 在 θ_1 与 θ_2 之间至多存在有限个（也可能没有）例外方向，(ii) θ_1 和 θ_2 都不是例外方向，(iii) 在 S 内任一点 P，向量场的方向均不与矢径 OP 垂直．

由条件 (ii)，可确定 ρ_0，使得在两条边 $\theta=\theta_1$ 和 $\theta=\theta_2$（记作 L_1 和 L_2）上没有点使向量场 (X, Y) 在该点的方向通过 O，因此，L_1，L_2 总可认为是无切弧（第二章 §3）．

由条件 (iii)，向量 (X, Y) 不可能是 L_1 或 L_2 上任一点的法向量．因此，例如通过 L_1 上异于 O 的点 Q 的向量 (X, Y)，必进入由直线 $\theta=\theta_1$ 和在 Q 点的 L 的法线所分成四个角域中的一个．

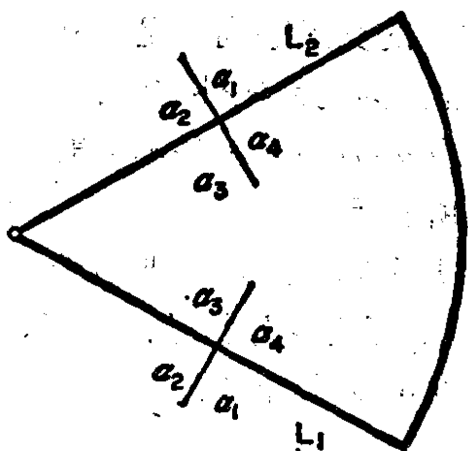


图 63

将这四个角域记作 α_1，α_2，α_3，α_4，其中 α_1 表示既不含点 O，又不含有 S 内的点的角域，α_2 则包含 O 但不含 S 内的点，α_3 既含 O 又含 S 内的点，α_4 为余下的角域（图 63）．

如果对 L_1 上的给定点 Q，向量 (X, Y) 进入 α_1，则对 L_1 上所有其它的点 Q，该向量也都进入 α_1．于是，假定在 L_1 上的一切点 Q 处，这向量都进入 α_1，则在 L_2 上的点其向量就不可能进入 α_2 或 α_3．因为，设 Q_1 是 L_1 上的点，Q_2 是 L_2 上的点，它们与 O 的距离相等．如果这向量在 Q_1 进入 α_1 而在 Q_2 进入 α_2 或 α_3，则该向量在 Q_2 处指向圆 $C(O, \overline{OQ_1})$ 的内部，而在 Q_1 处指向这圆的外部，由连续性在弧 $\widehat{Q_1Q_2}$ 上的某一点这向量将与此圆弧相切，与条件 (iii) 矛盾．

因此，只存在三种可能性：(1)沿着 L_1 和 L_2，向量 (X, Y) 都进入 $\alpha_1[\alpha_3]$（图 64a）；(2) 沿着 L_1 和 L_2 该向量都进入 $\alpha_2[\alpha_3]$（图 64b）；(3) 沿着 L_1 这向量进入 $\alpha_1[\alpha_3]$，而沿着 L_2 它进入 $\alpha_4[\alpha_2]$，或者沿着 L_1 进入 $\alpha_2[\alpha_4]$，而沿着 L_2 进入 $\alpha_3[\alpha_1]$（图 64c）.

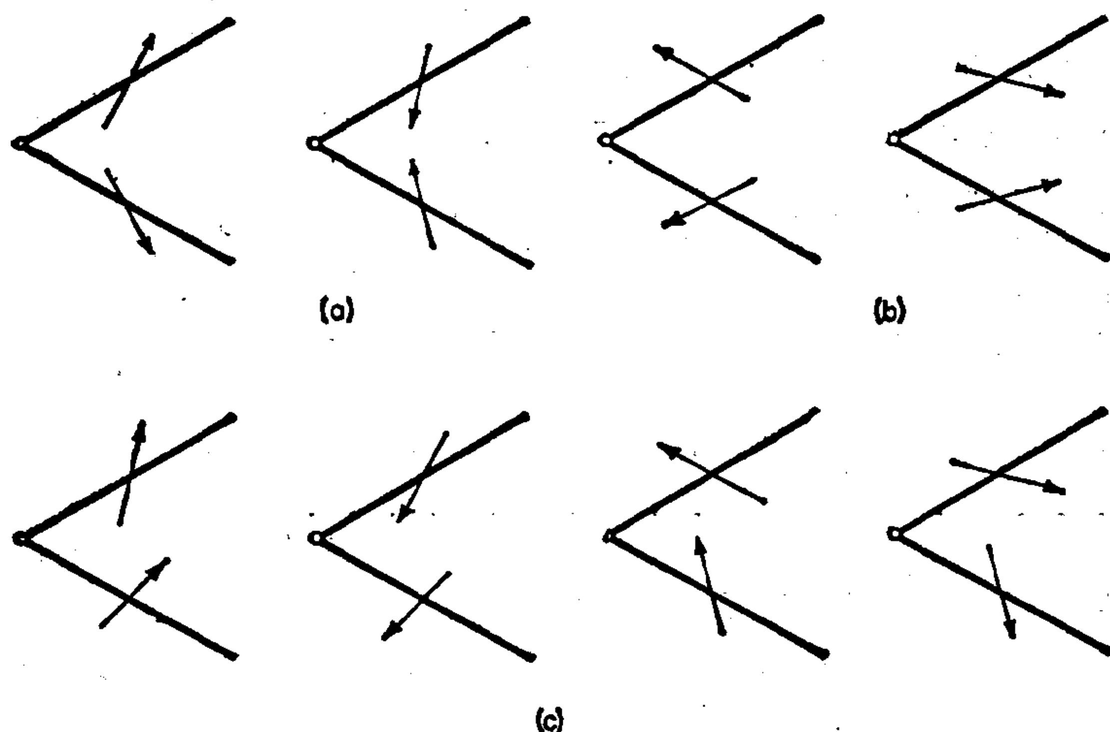


图 64

显然，[ ]内所表示的可能性可由[ ]前面的那种可能性改变向量的方向，或改 t 为 $-t$ 来得到.

这三种正规扇形域分别称为**第一型**，**第二型**和**第三型**（**混合型**）.

这些定义显然可与齐次系统的正规角域（第二章§2）相对应．对于齐次系统，由于过 O 的射线都是等倾线，扇形域中的 ρ_0 可任意大，亦即扇形域可以是整个角域．按照定义，正规角域内含有一个且只含有一个例外方向，即平分此角域的不变射线（对正规角域来说，不变射线的反向射线一定也是不变射线，而对正规扇形域来说只有一个方向才是．——译者注）

另一方面，对于我们所考虑的一般系统，轨线的性状可以与齐

次系统在正规角域中的轨线性状完全不同.

(b) **定理 30.** (I) 第一型正规扇形域中的轨线或者当 $t\to+\infty$ 时都趋于顶点 O，或者当 $t\to-\infty$ 时都趋于 O.

(II) 通过第二型正规扇形域的两条边的轨线在这扇形域内只停留有限时间，而且当 $t\to+\infty$，或者当 $t\to-\infty$ 时都与弧 $\rho=\rho_0$，即这扇形域的边界（扇形的底边）相交而离开此扇形域. 这扇形的底边总含有这样的点集，使得通过这点集的轨线当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时都趋于顶点 O. 这个点集在一般情况下为一圆弧段，但也可能会退化成一点(唯一性情形).

(III) 若扇形域是第三型的，则或者其中没有趋于 O 的轨线(双曲情形)，或者在这扇形的两边之一上存在点 $A\neq O$，使得当 $t\to+\infty$(或当 $t\to-\infty$)时轨线 γ_A 趋于 O. 在后一种情况，线段 OA 上的点都具有点 A 的同一性质. 与此同时，通过这扇形的另一边的轨线在这扇形域内只停留有限时间(一般情形).

(I) 的证明是立刻可得的. 进入扇形域的轨线当 t 增加时想要离开扇形就得与扇形的底边相交，这就导致轨线的切线(从而向量 (X,Y)) 与矢径 OP 成直角. 因此，在扇形域 S 内的轨线要停留无限长时间，从而必趋于 O (图 65).

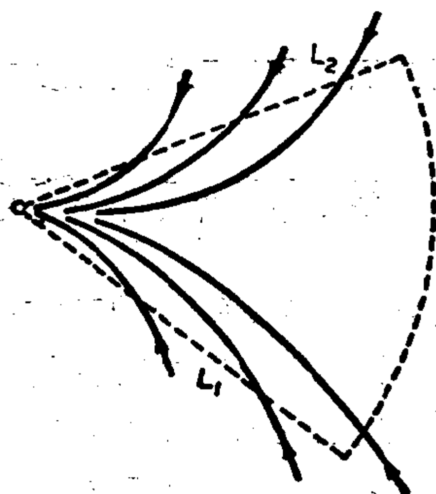


图 65

(II) 的证明. 若通过 S 的一条边的轨线在 S 内停留无限长时间，则它必趋于 O. 所以根据与上面相同的推证，轨线必在某点 P 与向径 OP 垂直. 因此，通过 S 的边的每条轨线在 S 内只停留有限时间，当 t 增加或减少时它必与底边相交而离开此扇形域.

设 P 是扇形域底边上一点，γ_P 是对应的轨线，譬如说 γ_P^+ 进入 S. 若 γ_P^+ 与 $L_1[L_2]$ 相交而离开扇形，以 $M_1[M_2]$ 记 $L_1[L_2]$ 上 S 的一个顶点，则对介于 P 与 $M_1[M_2]$ 之间的底边上的一切点

Q，γ_Q^+ 都与 $L_1[L_2]$ 相交而离开扇形．设从 M_1 按正向（即逆钟向）沿着底边移动到 M_2，R_1 为弧 $\widehat{M_1M_2}$ 上所有这样的点的上确界［R_2 为下确界］，通过这些点的轨线与 $L_1[L_2]$ 相交而离开扇形，这样的点称为第一类［第二类］点．或者 R_1 先于 R_2，或者 R_1 与 R_2 重合．

$\gamma_{R_1}^+$ 和 $\gamma_{R_2}^+$ 都趋于 O．因为，若 $\gamma_{R_1}^+$ 离开扇形域时与 L_1 相交，设交点 A 在 O 与 M_1 之间，则通过 OA 的轨线就要进入扇形，并且经过 $\widehat{M_1M_2}$ 上 R_1 下方的点，这是不可能的．若 $\gamma_{R_1}^+$ 离开扇形域时与底边相交，则就要存在一点 P，在这点轨线垂直于 OP，这也是不可能的．最后，若 $\gamma_{R_1}^+$ 离开扇形域时与 L_2 相交，则 R_2 不论是否异于 R_1，都不可能是第二类点的下确界．因此，至少存在一条轨线趋于 O，而且若 $R_1 \neq R_2$，则所有通过底边上 R_1 与 R_2 之间的点的轨线都要趋于 O（图 66(a) 与 (b)）．

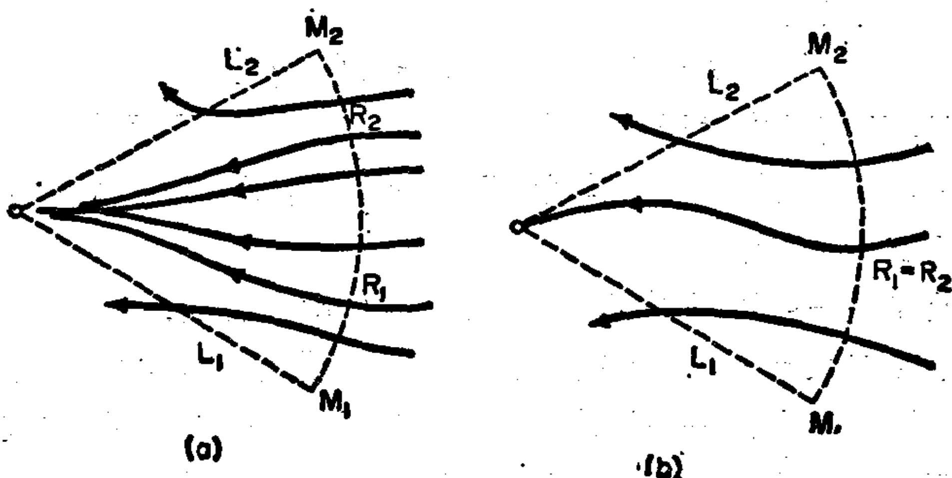


图 66

(III) 的证明．可以没有轨线趋于 O，例如鞍点的情形．反之，若存在趋于 O 的轨线，则在两条边之一，例如在 L_1 上，必至少存在一点 A，使得例如轨线 γ_A^+ 趋于 O．现在若 P 是 L_1 上 O 与 A 之间的点，则 γ_P^+ 也必趋于 O．因为它不可能与线段 OA 相交．另一方面，通过 L_2 离开扇形的轨线当 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 时都不可能趋于 O，因为否则，在某点 P 轨线与向量 OP 就要垂直，这与正规扇形域定义中的条件 (iii) 矛盾（图 67(a)，(b)）．

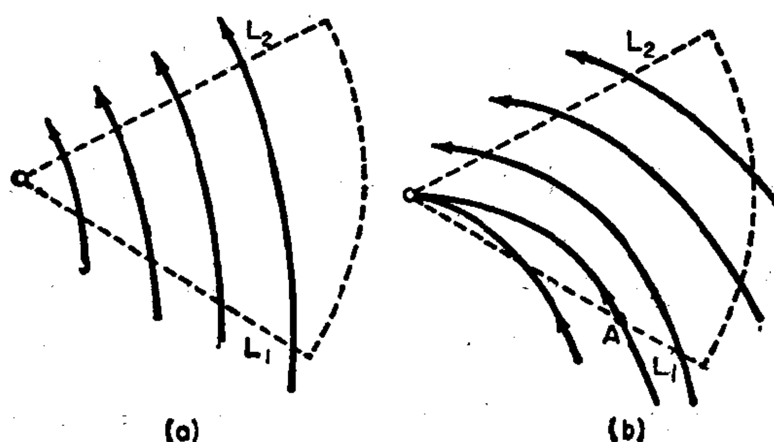


图 67

§ 4. 指 标

1. Kronecker 指标

(a) 考虑系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y),\tag{4.4.1}$$

其中 X, Y 满足本章开头所述的条件. 对 x, y 平面上的每一点 $P=(x,y)$, 我们赋予一向量 $V(P)=(X,Y)$, 对 (4.4.1) 的奇点我们赋予零向量.

设 K 是一条不通过任何奇点的闭 Jordan 曲线.

沿着 K 取定一正向; 在平面上另取一固定方向 α (一般, 可取 α 为 x 轴的正向. ——译者注); 在 K 上取定一点 A; 取方向 α 与向量 $V(A)$ 之间的夹角中的无穷多个值的任一个记为 φ.

设 P 从 A 开始按正向绕 K 转一圈, 则 φ 连续地变动, 由于 P 点的最后位置与它开始的位置相重合, φ 的最后值与它的开始值之差为 $2\pi j_K$, 其中 j_K 是一个整数.

显然, j_K 与约定的方向 α 的取法等无关*), 而仅仅依赖于曲线 K 和向量 $V(P)$, 即与系统 (4.4.1) 有关. 这样的数称为 K 关于系统 (4.4.1) 的 Kronecker 指标.

---

*) 例如, 也与计算开始角度 φ 的方法无关. ——译者注

(b) j_K 的一个性质由下面定理给出.

定理 31. 若 K 连续地变形,但不经过任何奇点,则其指标不变.

因为 j_K 随 K 连续地变动,又它只能取整数值,故必保持不动.

j_K 的另一个性质由下列定理给出.

定理 32. 若 $V'(P)$ 与 $V(P)$ 为在 P 点对应于两个不同系统 (4.4.1) 的向量. 并且 K 有这样的性质,对于任何 $P\in K$, $V(P)$ 与 $V'(P)$ 都不处于相反方向(也都不为零向量),则 K 关于 $V(P)$ 的指标与关于 $V'(P)$ 的指标相同.

定义向量 $V''(P)=(1-\lambda)V(P)+\lambda V'(P)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 由假设,这个向量在 K 上连续变动,且在 K 上恒不为零. K 关于 $V''(P)$ 的指标随 λ 连续地变动,因而对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 中的一切 λ 值它为常数. 特别地,K 关于 $V(P)\,(\lambda=0)$ 的指标应等于 K 关于 $V'(P)(\lambda=1)$ 的指标.

(c) 特别地,由定理 31 和 32 得知,(4.4.1) 中的变量 x, y 经过一个非退化的线性变换后,已给闭路的指标等于变换后对应闭路的指标.

(d) 在阐述闭曲线 K 的指标的第三个性质之前,我们引入向量 V 沿着弧 $L=\overset{\frown}{AB}$ 的改变量这一概念,以便推广指标的定义. 考虑开的 Jordan 弧以代替考虑闭的 Jordan 曲线. V 沿着 $\overset{\frown}{AB}$ 的改变量记作 W_{AB}, 若 $B=A$ 且这段弧不退化为一点,则 W_{AB} 就是闭曲线 AB 的指标*).

若 C 是 AB 上的一点,显然 $W_{AB}=W_{AC}+W_{CB}$ 且 $W_{AB}+W_{BA}=0$.

指标的第三个性质现在可以表示为:

定理 33. 给定一闭路 K, 令

$$K_1=(MABM),\ K_2=(M_1ABM_1)$$

是两个闭路,它们是以 K 所围的区域中的简单弧 $\overset{\frown}{AB}$ 连接 K 上两

*) 实际上,这时 W_{AB} 应等于指标 j_{AB} 的 2π 倍. ——译者注

点 A，B 而得到的，则 $j_{K_1}+j_{K_2}=j_K$（指标的可加性）。

这个证明是直接可得的（图 68），因为我们有（令

$$w_K=\frac{W_K}{2\pi}.$$

——译者注）：

$$j_{K_1}=w_{BMAB}=w_{BMA}+w_{AB},\quad j_{K_2}=w_{AM_1BA}=w_{AM_1B}+w_{BA},$$

两式相加，即得

$$j_{K_1}+j_{K_2}=w_{BMA}+w_{AM_1B}=w_{BMAM_1B}.$$

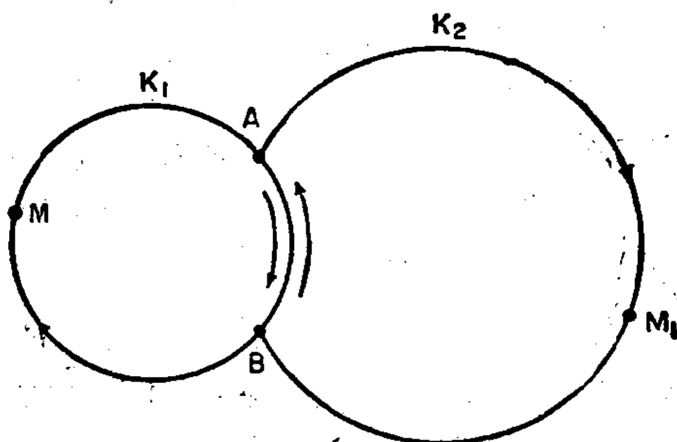


图 68

(e) 我们还有如下定理.

定理 34. 若K的内部不含奇点，则 $j_K=0$.

设 P_0 是K内部任一点，$C(P_0, r)$ 是 P_0 在K内部的一个关联圆（参看 §2.3），K 可连续变到这个圆的边界 C 而不经过任何奇点. 因此，$j_K=j_C$（定理 31）（图 69(a)）.

现在在每一点 $P\in C(P_0, r)$，考虑 $V(P)$ 和平行于 $V(P_0)$ 的 $V'(P)$ 这两个向量. 在每一点 $P\in C(P_0, r)$，$V(P)$ 与 $V'(P)$ 之间的交角$\leqslant\pi/4$，因而由定理 32 知道，C 关于 $V(P)$ 与 $V'(P)$ 的指标相等，而 C 关于第二个系统的指标是零（图 69(b)）.

(f) 下面给出的定理的证明见于 E. A. Coddingtm-N. Levinson [1]，也可看 S. K. Zaremba [2].

定理 35. 若K是一条具有连续转动切线的闭 Jordan 曲线，则K关于由其切向量 v 所确定的系统的指标为 $+1$.

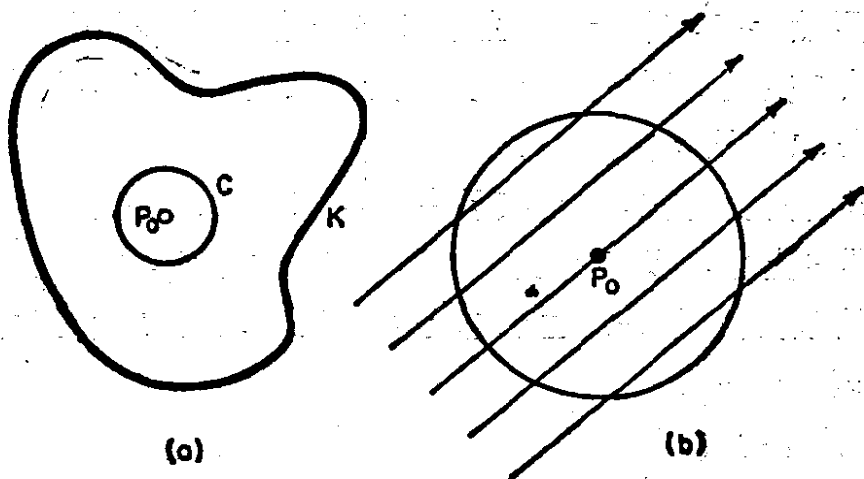


图 69

设 $u(P)$ 是 K 在 P 点的单位切向量(按正向),则 $j_K(u)=j_K(v)$，于是这个定理可以对 u 来证明.

进一步，我们假定 K 整个属于半平面 $y\geqslant 0$，并且 K 上的点 P 由 $P(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t))$ 给出，$0\leqslant t\leqslant 1$. 由假设，对 $0\leqslant t\leqslant 1$，$\alpha_1'(t)$，$\alpha_2'(t)$ 存在且连续. 因此，$u(t)=(\alpha_1'(t),\alpha_2'(t))$. 最后，假定正 x 轴切于点 $P(0)=P_0$，即 $\alpha_1'(0)=1$，$\alpha_2'(0)=0$.

对 s，t 平面中的三角形 T：$0\leqslant s\leqslant 1$，$s\leqslant t\leqslant 1$(图 70)作辅助向量 $\tilde{u}=\tilde{u}(s,t)$：$\tilde{u}(s,s)=u(s)$，对 $0\leqslant s\leqslant 1$；$\tilde{u}(0,1)=-u(0)$；对于 T 中所有其它的点，$\tilde{u}(s,t)$ 等于 K 上从 $P(s)$ 到 $P(t)$ 的方向的单位向量.

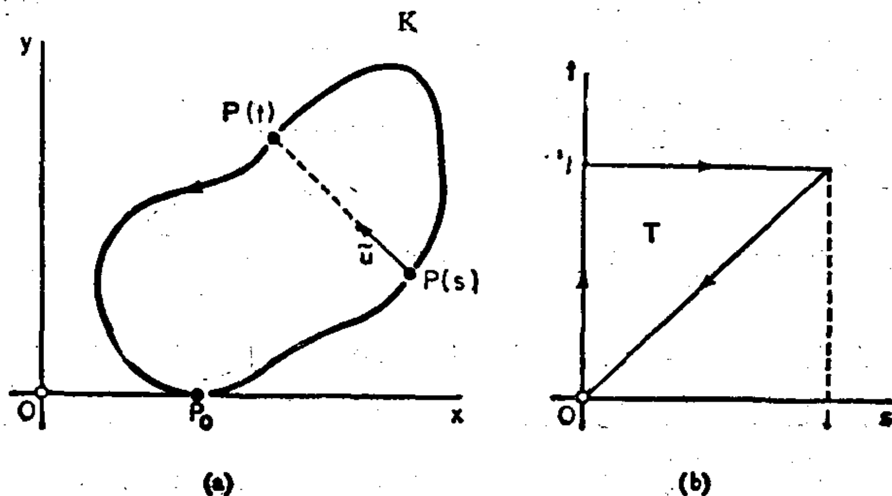


图 70

设 $\theta(s, t)$ 为 $\tilde{u}(s, t)$ 与正 x 轴的夹角，规定其值在 0 与 2π 之间．显然 $\theta(0, 0)=0$，由于K整个地位于半平面 $y\geqslant 0$ 中，故当 t 从 0 变到 1 时 $\theta(0, t)$ 从 0 变到 π．类似地，当 s 从 0 变到 1 时，$\theta(s, 1)$ 从 π 变到 2π．

由 $\tilde{u}$ 的定义得知，$\tilde{u}$ 连续且在 T 中 $\tilde{u}\neq 0$．将定理 34 应用到 T 的边界 B 上去，我们得到 $j_B(\tilde{u})=0$．故当 s 从 0 变到 1 时，$\theta(s, s)$ 的改变量为 2π．由于它是 u 与正 x 轴的交角的改变量，因此，$j_K(u)=+1$．

特别地，由定理 35 得：

定理 36. 系统（4.4.1）的环的指标为＋1．

由定理 34 与 36 得知，每一个环至少包含一个奇点．这结果给出了 Bendixson 定理(定理 12)的第三个证明．

(g) 我们还有以下定理：

定理 37. 若K为闭曲线，其上每一点有连续转动的切向量．另外，存在向量 v，沿着 K，v 连续变动并且常指向K的内部(或外部)，则K关于由 v 所确定的系统的指标等于＋1．

这个定理的证明是立刻可得的，只要我们注意到由定理 32，$j_K(\boldsymbol{n})=j_K(u)$，其中 $\boldsymbol{n}$ 是K的内法线(外法线)向量，u 是K上的单位切向量．由定理 35，$j_K(u)=+1$，再由定理 32，$j_K(v)=j_K(\boldsymbol{n})$．

(h) 若K是正则回路，例如由有限条正则弧(具连续转动切线的弧)所组成，且假定(4.4.1)为 C^1 类，即 X, Y 对 x, y 具有一阶连续偏导数，则K关于系统（4.4.1）的指标可由下面的曲线积分来计算：

$$j_K=\frac{1}{2\pi}\oint_K d\operatorname{arc\,tg}(Y/X)=\frac{1}{2\pi}\oint_K\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}, \qquad (4.4.2)$$

这里的积分取正向（即由半轴 $x>0$ 到半轴 $y>0$ 的方向)．(4.4.2)可由下面的事实得到，$\operatorname{arc\,tg} Y/X$ 是向量 $V=(X, Y)$ 的幅角，且 dX 与 dY 的系数是K上的连续函数，由于K上无奇点，因此，$X^2+Y^2>0$．(4.4.2) 称为 Poincaré 公式．

2. 点的指标

(a) 已给系统(4.4.1),现在我们可以对每一常点(非奇点)和每一孤立奇点赋予一个称为点的指标的数.

设 P 是任一点,K 为包含 P 但不包含任何奇点(P 可以除外)的简单闭曲线,且 K 不经过奇点. 我们将闭曲线 K 的指标称为点 P 的指标,由定理 31 知,此值与曲线 K 的选择无关.

由定理 34 立刻得到:

定理 38. 常点的指标等于零.

注. 有例子(见 §4.3(d))说明,奇点的指标也可以是零. 因此,定理 38 的逆定理不真.

(b) 由定理 33 得:

定理 39. 若简单闭曲线 K 包含有有限个奇点,则 K 的指标等于各个奇点指标的代数和.

将区域 K 划分成若干个子域,使得每个子域中仅含有一个奇点 P_i(图 71). 于是由定理 33,有 $j_K = \Sigma_i j_{K_i}$, 而 j_{K_i} 为 P_i 的指标.

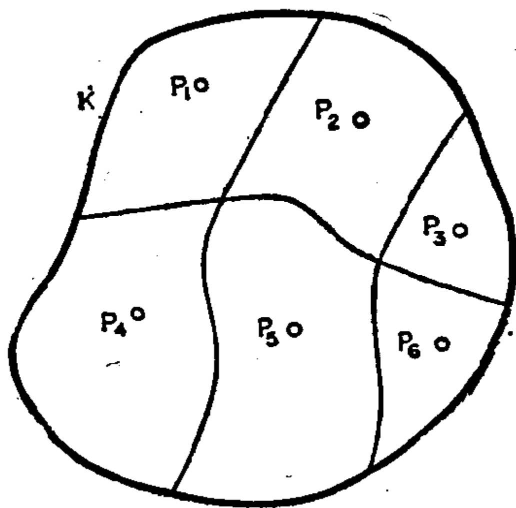


图 71

现在我们可以得到一个改进了的 Bendixson 定理(定理 12):

定理 40. 环内有限个孤立奇点指标的代数和等于 $+1$.

(c) 接下来我们证明:

定理 41. 若 $P_0=(x_0, y_0)$ 是系统

$$\dot{x}=X(x, y), \quad \dot{y}=Y(x, y) \tag{4.4.1}$$

的奇点,也是系统

$$\dot{x}=X'(x, y), \quad \dot{y}=Y'(x, y) \tag{4.4.1'}$$

的奇点,且如果

$$\lim_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\to 0}\frac{(X'-X)^2+(Y'-Y)^2}{X^2+Y^2}=0, \qquad (4.4.3)$$

则P_0关于(4.4.1)和关于(4.4.1′)的指标是相同的.

通常,我们取 $x_0=y_0=0$.

现在令

$V=(X,Y)$, $V'=(X',Y')$, $V''=(X'-X,Y'-Y)$, 由(4.4.3),对$\varepsilon>0$存在$r>0$,使得在$C(O,r)$内有$|V''|\leqslant\varepsilon|V|$,其中$|V|$是$V$的模.

由于$V'=V+V''$,而$|V''|$可任意小,V与V'永不取相反方向,于是由定理32,$C(O,r)$的边界关于V和V'有相同的指标.

3. 特殊奇点的指标的计算

(a) 首先,我们来计算点O关于线性系统

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y,\quad \dot{y}=\gamma x+\delta y \qquad (4.4.4)$$

的指标. 假设O是孤立奇点,因而

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0. \qquad (4.4.5)$$

从而曲线 $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$ 是以O为中心的椭圆. 为了计算点O的指标,可选取这个椭圆为曲线K,再利用 Poincaré 公式求K的指标,而它又等于O的指标. 因此,O的指标是

$$j_O=\frac{1}{2\pi}\oint_K\{(\alpha x+\beta y)d(\gamma x+\delta y)-(\gamma x+\delta y)d(\alpha x+\beta y)\}.$$

若用变换 $x_1=\alpha x+\beta y$, $y_1=\gamma x+\delta y$ 将x, y平面映成x_1, y_1平面,将椭圆K映成圆 C: $x_1^2+y_1^2=1$, 其正向按

$$d(x_1,y_1)/d(x,y)=\alpha\delta-\beta\gamma$$

是正或是负,而取为逆钟向或是顺钟向(见 E. Goursat[1]). 那么,由(4.4.2)即得

$$j_O=\pm\frac{1}{2\pi}\int_C(xdy_1-y_1dx_1),$$

其中若 $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, 则上式右端的积分号前取正号; 若 $\alpha\delta-\beta\gamma<0$, 则取负号. 由于上面的积分表示圆$C$的面积($=2\pi$),故我们有(第二章§1):

定理 42. 对于线性系统(4.4.4),(4.4.5),鞍点的指标为-1;结点,焦点,中心点O的指标为$+1$.

(b) 由定理 41,我们有:

定理 43. 给定系统

$$\dot{x}=\alpha x+\beta y+f(x, y), \quad \dot{y}=\gamma x+\delta y+g(x, y),$$

其中 $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$, 且有

$$\lim_{\rho\to 0} f(x, y)/\rho=\lim_{\rho\to 0} g(x, y)/\rho=0 \quad (\rho^2=x^2+y^2),$$

则这系统关于O的指标. 当 $\alpha\delta-\beta\gamma<0$ 时为-1, $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ 时为$+1$.

(c) 若P是第二类孤立奇点(§ 3),我们已经知道,在每一个圆 $C(P, r)$ 内,r 充分小,只可能存在三种类型的轨线弧,按照 Brouwer 的命名,称它们为双曲轨线弧,抛物轨线弧和椭圆轨线弧.

如果对每个 r, $C(P, r)$ 可以划分为有限个扇形域,通过其中每一点的轨线弧或者为椭圆轨线弧(椭圆扇域)或者为双曲轨线弧(双曲扇域)*). 又 n_f 表示椭圆扇域的个数, c 为双曲扇域的个数, j_P 为 P 点的指标,则成立着 Bendixson 公式(见 I. Bendixson [1]):

$$j_P=1+n_f/2-c/2.$$

I. Bendixson 对 C^1 类系统 (4.4.1) 证明了这个公式. L. E. J. Brouwer 把它推广到 X, Y 仅为连续的系统 (4.4.1).

如果我们把 Bendixson 公式应用到鞍点,则有 $n_f=0$, $c=4$, $j_P=-1$. 鞍点的这个性质提供了推广鞍点概念的基础,即把使 $n_f=0$, $c=4$ 从而 $j_P=-1$ 的点定义为鞍点. 不过,这样的定义不排除有多于四条趋于P的轨线的可能性,这种情况的例子见第五章§ 1.5(a).

(d) 再将 Bendixsen 公式应用到第二章 §2.6(e) 中考虑过的系统,就可得到孤立奇点的指标为零的一个例子,这就证明了定理 38 后面的注,即该定理之逆不真.

(e) 以下的事实也许是很显然的,即奇点的指标有可能既不

---

*) 原书误为抛物轨线弧(抛物扇域). ——译者注

等于零，也不等于-1，又不等于$+1$. 例如对在第二章§2.6(e)中考虑过的系统，由于 $n_f=0$，$c=6$，由 Bendixson 公式得知$j_O=-2$。

4. 球面和亏格为p的曲面的指标

(a) 假设系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y) \tag{4.4.1}$$

中的X, Y是x, y的实系数多项式，再引入第二章§5所述的，在u, v, z空间的球面 Σ: $u^2+v^2+z^2=1$ 上(4.4.1)的轨线的表达式。

作为关系式

$$udu+vdv+zdz=0 \tag{4.4.6}$$

的推论，我们看到，系统

$$\left.\begin{aligned}du/d\tau&=B(u,v,z)z-C(u,v,z)v,\\ dv/d\tau&=C(u,v,z)u-A(u,v,z)z,\\ dz/d\tau&=A(u,v,z)v-B(u,v,z)u,\end{aligned}\right\} \tag{4.4.7}$$

的从Σ上一点出发的轨线必整个地落在Σ上，且除了Σ的赤道的那一部分以外，它们都是(4.4.1)的轨线的象。

设 $U(u,v,z)$, $V(u,v,z)$, $Z(u,v,z)$ 为方程组 (4.4.7) 的右端，按这个次序我们在Σ上每一点定义一个向量$W(P)$，其分量为U, V, Z. 由(4.4.6)，这个向量位于Σ在P点的切平面上。这样，我们得到了一个在球面上的向量的连续分布，它类似于在平面上由(4.4.1)所建立的向量的连续分布。$W(P)$ 仅在Σ上对应于(4.4.1)的奇点（有限远奇点或无穷远奇点）的那些点处才退化为零向量。事实上，唯一使 $A=B=C=0$ 的点才是奇点（第二章§5)，这个方程组等价于由(4.4.7)的右端等于零的三个方程以及方程 $Au+Bv+Cz=0$ 一起构成的方程组。

(b) 现在我们可以引入球面 Σ 上的点关于向量 W 的指标的概念，对此我们仅给一个简短的说明，更详细的讨论读者可看参 S. Lefschetz [1]第九章§5。

设 P 是 Σ 上的一点，通过 Σ 的中心 O 将 P 点的邻域投影到 Σ 在 P 点的切平面上去，向量 W 投影到此平面上得 W'，P 点关于 W 的指标定义为 P 点关于 W' 的指标，这个定义仅依赖于 P 与 W，而与定义中 W' 的引入无关.

若 P 是 Σ 上的常点，则它的指标为零；若 P 是一个不在赤道上的孤立奇点，则它的指标等于系统 (4.4.1) 的奇点(它是 P 点的象)的指标. 如果 P 是赤道上的孤立奇点，则它的指标就定义为系统 (4.4.1) 的无穷远奇点(它是 P 点的象)的指标.

(c) 可以证明，(4.4.7) 所有奇点指标的代数和永远等于 2，而不管 A, B, C 如何，只要 $Au + Bv + Cz = 0$.

由此得知，若 X, Y 为实系数多项式，则系统 (4.4.1) 至少有一个奇点，或为有限远奇点，或为无穷远奇点.

(d) H. Poincaré 证明了一个更为一般的结果. 事实上，向量的连续分布可以在任何一个闭解析曲面 F 上来定义. 如果奇点定义为使向量等于零向量的点，且只存在孤立奇点. F 的指标定义为这些点的指标的和，则可以证明 F 的指标等于 F 的 Euler 数(F 的任一三角剖分的三角形个数－边数＋顶点数)*).

若 F 是定向的，亏格为 p，则 Euler 数(从而为 F 的指标)等于 $2-2p$. 由于对球面 $p=0$，故球面的指标为 2，这个结果我们已在 (c) 中验证过了. 对于环面，由于 $p=1$，故其指标为零. 因此，在环面上可以存在没有奇点的连续分布，这一点将在 §6.3 中说明.

§5. 相空间是柱面的情形

1. 相空间是柱面的情形

(a) 在第六章§2 中，我们将考虑方程

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + f(\theta) = 0, \quad (\dot{\theta} = d\theta/dt,\ \ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2)$$

*) 这条 Poincaré 指标定理的证明可看 S. Lefschetz [1] 中译本第 362—365 页. ——译者注

其中 θ 是角度，它是时间的函数，且可被确定到相差一个 2π 的倍数；$f(\theta)$ 是 θ 的已知周期函数，以 2π 为周期．这种方程出现在动力学和电动力学的研究中．

若令 $\dot{\theta} = z$，这个方程就等价于系统 $\dot{\theta} = z$，$\dot{z} = -az - f(\theta)$，它具有

$$\dot{\theta} = P(\theta, z), \quad \dot{z} = Q(\theta, z) \tag{4.5.1}$$

的形式，其中 $P(\theta, z)$，$Q(\theta, z)$ 是 θ 的周期函数，周期为 2π．

因此，若 $P(\theta, z)$，$Q(\theta, z)$ 定义在整个 θ，z 平面上，则我们只需在宽为 2π 而平行于 z 轴的任意带域中进行各种讨论，即可刻划这个相平面．这就促使我们去考虑由圆柱面所构成的相空间以代替相平面．

(b) 因此，θ 与 z 将看作为以 R 为半径的圆柱面上点 H 的柱面坐标 (θ, z) 中的坐标．这种表示法的基本特点在于这样的事实：在圆柱面 Σ 上存在两类简单闭曲线——一类是将 Σ 分成两个区域，其中有一个是有界域(与零同伦的闭路)；另一类则将 Σ 分为两个无界区域(不能与零同伦的闭路)．

因而，(4.5.1)在柱面上的闭轨线中，除了奇点和对应于(4.5.1)的周期解的**第一类环**(它们与零同伦)以外，还可能出现**第二类环**(它们不能与零同伦)，这种环不对应于(4.5.1)的任何周期解，但对应于方程 $dz/d\theta = Q(\theta, z)/P(\theta, z)$ 的周期解 $z = z(\theta)$ (特别地，它可以是常数解)．

例如，系统 $\dot{\theta} = 1$，$\dot{z} = 0$ 在圆柱面 Σ 上的轨线只能是圆，这些圆都位于 Σ 的轴的法平面上；因此，这些轨线都是第二类环，又因 $\theta = \theta_0 + t - t_0$，$z = z_0$ 是这系统的一般解，因此这系统显然没有周期解．

(c) Bendixson 定理(定理 12)显然只对第一类环才成立．

柱面上的环域是指这样的有界域：或是(1)由两个与零同伦的闭路所围成的区域，或是(2)两个都是不能与零同伦的闭路所围的区域，因此 如果环域内不含奇点，那末它在情形(1)只可能包含第一类环，在情形(2)只可能包含第二类环．

2. 一个例子

今用下面古典力学中的一个例子来说明 §5.1 的内容。

单摆运动对应于方程

$$\ddot{\theta}+\sin\theta=0, \tag{4.5.2}$$

它等价于方程组

$$\dot{\theta}=z,\ \dot{z}=-\sin\theta. \tag{4.5.3}$$

这个系统的奇点为 $(k\pi, 0)$, $k=0, \pm 1, \cdots$, 轨线为曲线

$$z=\pm(2\cos\theta+c)^{1/2},\quad c \text{ 为常数}. \tag{4.5.4}$$

为使曲线是实的, c 要限制为 $c\geqslant -2\cos\theta\geqslant -2$.

当 $c=-2$ 时, 我们有 $\theta=0$, $z=0$, 它是一个奇点;对 $-2<c<2$, 我们有 $\cos\theta\geqslant -c/2$, 曲线(4.5.4)与 θ 轴相交于点$-\theta_0$ 与 θ_0,其中 θ_0 满足 $\cos\theta_0=-c/2$. 假设 $0<\theta_0<\pi$,则当 θ 从$-\theta_0$ 变到 θ_0 时,曲线(4.5.4)是闭的(环),且与 θ 轴垂直相交于 $\theta=-\theta_0$ 与 $\theta=\theta_0$. 当 $c=2$ 时, $z=\pm(2\cos\theta+2)^{1/2}=\pm 2\cos(\theta/2)$. 令 θ 从$-\pi$ 变到 π, 我们就得到两条关于 θ 轴对称的分界线弧, 它们以 $\theta=-\pi$, $\theta=\pi$ 为端点, 且在这两点与 θ 轴的交角为 $\pi/4$.

最后,对 $c>2$, 曲线(4.5.4)不与 θ 轴相交, 但是关于这个轴是对称的,而且在 $\theta=\pm 2$ 处它们取极值. 点(0, 0)是中心,

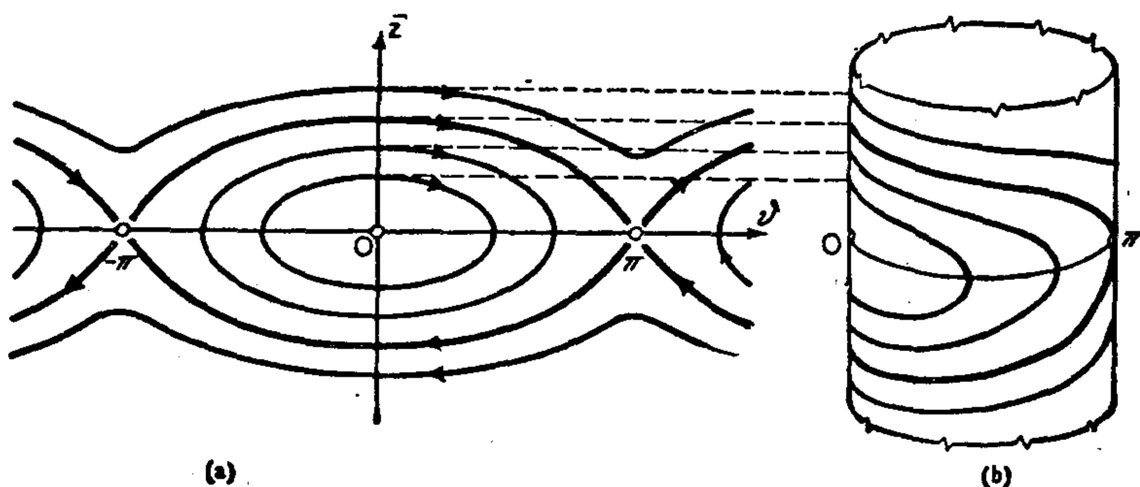


图 72

$(0, -\pi)$，$(0, \pi)$ 是两个鞍点(图 72 (a)).

这些轨线在以单位长为半径的圆柱面上的象，除了分界线以外都是闭曲线(环)(图 72 (b)). 如果以 γ 记由分界线和两个鞍点所组成的闭路，则 γ 内部的环都是第一类环，它们对应于单摆的周期振荡；γ 外部的环都是第二类环，它们对应于单摆的旋转运动；每条分界线都对应于时间为无限长的单摆摆动，这可由下面事实得知. 由于 $dt = d\theta/z$，$z = 2\cos(\theta/2)$，单摆从位置 $\theta = 0$ 运动到 $\theta = \pi$ 所需的时间为

$$\int_0^\pi d\theta/[2\cos(\theta/2)] = \left[\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4}\right)\right|\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = +\infty.$$

§6. 相空间为环面的情形

1. 相空间为环面的情形

上一节我们在假设 $X(x + 2\pi, y) = X(x, y)$，$Y(x + 2\pi, y) = Y(x, y)$ 下考虑了系统

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \tag{4.6.1}$$

并且看到，将 (x, y) 当成圆柱面上的点的坐标是很方便的.

现在我们假定 X, Y 满足

$$\left.\begin{aligned} X(x + 2\pi, y) = X(x, y + 2\pi) = X(x, y), \\ Y(x + 2\pi, y) = Y(x, y + 2\pi) = Y(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{4.6.2}$$

于是，我们可以将 (x, y) 当作环面 Σ 上点的坐标.

用环面上点的通常坐标 θ, φ 来代替 x, y，这个系统可写为

$$\dot{\theta} = X(\theta, \varphi), \quad \dot{\varphi} = Y(\theta, \varphi) \tag{4.6.3}$$

对于环面 Σ 上的每一点 $P = (\theta, \varphi)$，(4.6.3) 赋予一个向量，它位于 Σ 在 P 点的切平面上，其分量为 X，Y (与直线 $\theta =$ 常数，$\varphi =$ 常数相关).

假定在正方形 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ 内 $X^2 + Y^2 > 0$，则在此环面上无奇点(参看§ 4.4 (d)).

自 Poincaré 以后，关于 (4.6.3) 的许多研究都涉及到这种情

况.

如同柱面情形一样,环面上也有两类环. 只有第一类环(即与零同伦的环)才对应于 (4.6.3) 的周期解.

环面上的轨线的一个显著特点是: 环面上的 Poisson 稳定轨线(§ 1.2(a)), 除了奇点和环(第一类和第二类)以外还包括开轨线. 因此定理 1 对环面是不成立的.

2. 例子

(a) 给定系统

$\dot{\theta} = a$, $\dot{\varphi} = b$(a, b 为常数; $a > 0$, $b > 0$).

消去 t, 我们得到通过点 (θ_0, φ_0) 的轨线方程

$$\theta = \theta_0 + \frac{a}{b}(\varphi - \varphi_0). \tag{4.6.4}$$

设 a/b 为有理数, $a/b = m/n$, m 与 n 为互质的正整数. 当 $\varphi = \varphi_0 + 2ln\pi$ (l 为整数) 时, $\theta = \theta_0 + 2lm\pi$, 由于点 $(\varphi_0 + 2ln\pi, \theta_0 + 2lm\pi)$与点 (θ_0, φ_0) 重合,故这条轨线是闭的. 但(θ_0, φ_0) 是任意的,因此所有的轨线都是第二类环.

设 a/b 为无理数, 则一点沿着轨线 Γ 由点 A 开始移动就不可能再回到 A 点, 因为否则, $(\theta - \theta_0)/(\varphi - \varphi_0) = a/b$ 为有理数了. 若 $A^* = (\theta^*, \varphi^*)$ 是环面 Σ 上任一点, Γ 是通过 A^* 的轨线, 则 Σ 上 A^* 的任一邻域 ω 与 Γ 相交无穷多次. 这可由下列事实得知,由 (4.6.4) 和第一章§4.1 所述的 Dirichlet 定理, Γ 与通过 A^* 的纬线相交于一个处处稠密集, 再由 Dirichlet 定理以及将轨线的方程写为 $\varphi - \varphi_0 = (b/a)(\theta - \theta_0)$, Γ 也与过 A^* 的径线相交于一个处处稠密集.

因此,每一条轨线或者当 $t \to +\infty$ 时是 Poisson 稳定的, 或者当 $t \to -\infty$ 时是 Poisson 稳定的,因为它不是一个环.

(b) 系统

$$\dot{\theta} = \sin\theta, \quad \dot{\varphi} = 1$$

有两个第二类极限环, 亦即 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$. 所有其它的轨线,

其方程为 $\theta=2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta_0/2)e^{\varphi})$，它们都 ω-渐近于第一类环，α-渐近于第二类环.

关于环面上含有奇点的系统的文献见 T. Ura [2].

3. 环面上无奇点的系统

我们已经提到，H. Poincaré [1] 研究过(4.6.3)无奇点的情形．他进一步假定这系统的轨线可以用方程

$$\frac{d\theta}{d\varphi}=A(\varphi,\theta) \tag{4.6.5}$$

表示，其中 $A(\varphi,\theta)$ 定义在单位正方形 $0\leqslant\varphi\leqslant1$, $0\leqslant\theta\leqslant1$ 上，并且有

$$A(\varphi+1,\theta)=A(\varphi,\theta+1)=A(\varphi,\theta). \tag{4.6.6}$$

Poincaré 原来作的全纯性假设可以减弱．事实上，假定 A 连续且通过环面上的每一点(4.6.5)的轨线唯一，则大多数结果仍成立(见 V. V. Nemytskii-V. V. Stepanov [1] 第一章).

由 A 的连续性和周期性得知，它在整个 φ, θ 平面上有界，因此，(4.6.5)的一切解对 $-\infty<\varphi<+\infty$ 有定义．由于(4.6.5)的每一解与环面上的子午线 C: $\varphi=0$ 相交于点 $(0,\theta_0)$，故在

$$\theta=u(\varphi,0,\theta_0)=u(\varphi,\theta_0)$$

中，令参数 θ_0 变动即可得到所有的解.

固定整数 n，函数 $u(n,\theta)$ 定义了一个将直线 $\varphi=0$ 映射到直线 $\varphi=n$ 的映射．于是可以证明，由 $P=(0,\theta)$，$P_1=(0,u(1,\theta))$ 定义的从 C 映射到 C 的映射

$$TP=T_1$$

是一个保序的同胚映射．从而对(4.6.5)的轨线的性态的研究，可以由研究 T 的性质来实现．可以证明，若令

$$v(\theta)=u(1,\theta)-[u(1,\theta)], \tag{4.6.7}$$

其中 $[u(1,\theta)]$ 是 $u(1,\theta)$ 的最大整数，则

$$v^n(\theta)=u(n,\theta)-[u(n,\theta)].$$

于是在环面上，由逐次迭代式

$$\theta_k = \nu^k(\theta_0),\ 0 \leqslant \theta_k \leqslant 1,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

所确定的点 $(0, \theta_k)$ 都是轨线 $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ 与子午线 $C: \varphi = 0$ 的交点，其中 θ_0 是由变换 (4.6.7) 所定义. 可以证明，极限

$$\rho = \lim_{|k| \to +\infty} \frac{u(k, \theta)^{*)}}{k}$$

存在且与 θ_0 无关，数 ρ 称为 T 对应于方程 (4.6.5) 的**旋转数**；旋转数为有理数的充分必要条件是存在某些具整数周期的周期解.

于是，由 (4.6.5) 所定义的环面上的向量场，可以依照某一"聚点集"的结构来进行分类. 更明确地说，若以 S 记在子午线 $C: \varphi = 0$ 上任一点 P 的迭代的集 $T^nP(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，则 S 的聚点集 S' 在 T 作用下是不变的 (即 $TS' = S'$)，且 S' 与 P 无关：从而它依赖于 $A(\varphi, \theta)$. 此外，若旋转数是有理数，则 S' 为有限集，若 ρ 是无理数，则 S' 是完备集，且或者 $S' = C$ (**各态历经情形**或**传递情形**)，或者 S' 在 C 上为无处稠密(**奇异情形**或**不可传递情形**).

各态历经情形的充分条件是由 A. Denjoy [1]得到的，即若 A 是 C^1 类的，偏导数 $\partial A/\partial\theta$ 是有界变差函数，又 ρ 是无理数，则 T 是各态历经的.

这个定理(Poincaré 对解析系统已猜想到了这定理)的证明可以在 Coddington-Levinson 的书 [1] 的第十七章中找到. 该书还给出了 H. Kneser[1], A. Weil[1]与 E. R. van Kampen[1]等人的有关工作. 各态历经的更进一步的条件最近由 A. Denjoy[3]给出.

C. L. Siegel [1] 把 Denjoy 定理推广到系统

$$\dot{\varphi} = \Phi(\varphi, \theta),\ \dot{\theta} = \Theta(\varphi, \theta)$$

中去，其中假设 $\Phi^2 + \Theta^2 > 0$. 另外，最近 A. Denjoy[2], [4] 指出，还可将此定理推广到闭流形上的变量个数 $n > 2$ 的方程组中去.

环面上的向量场理论中另一个突出的问题是解的表达式问题. 这方面的第一个结果是 E. E. Levi [1] 给出的，他在 A 关于

---

*) 原书定义为 $\rho = \lim\limits_{|k| \to +\infty} \frac{\theta_k}{k}$.——译者注

φ 和 θ 都满足 Lipschitz 条件下,得到了(4.6.5)的解的表达式

$$\theta = \rho\varphi + \varepsilon(\varphi),$$

其中 $\varepsilon(\varphi)$ 为有界函数. 在各态历经情形,更精确的公式由 P. Bohl [1] 得到(见 Coddington-Levinson 的书). 与此有关的最近结果也可看 C. Olech [1] 和 Z. Opial [1].

4. 其它结果

T. M. Cherry [1], [2] 和 T. Ura [2] 考虑了具奇点的系统(4.6.8)(即不假定 $\Phi^2 + \Theta^2 > 0$).

方程

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta, \lambda)$$

的旋转数 $\rho(\lambda)$ 对参数 λ 的依赖性曾被 V. A. Pliss [1]和秦元勋[1] 研究过.

最后, 我们还得提到 T. Saito [1], A. N. Kolmogorov [1], S. Sternbeg [1], E. J. Akutowicz [1] 等人的其它研究工作, 他们考虑了具不变积分的环面上的向量场.

§7. 动力系统的简单介绍

设 $X(x)$ 是定义在整个 n 维欧几里得空间 E^n 中的 n-向量函数,其分量为 $X_1, \cdots, X_n$. 若 X 是 E^n 中的 C^1 类函数,则自治微分系统

$$\dot{x} = X(x) \tag{4.7.1}$$

的经过任一点 (t_0, x^0) ($x^0 \in E^n$, t_0 为实数)的解

$$x = \varphi(t, t_0, x^0) \tag{4.7.2}$$

唯一(根据第一章). 另外,我们假定对任一点 (t_0, x^0), 对应的解 $\varphi(t, t_0, x^0)$ 作为 t 的函数在整个实数轴 $-\infty < t < +\infty$ 上有意义.

一旦固定 t_0 的值不变,例如取 $t_0 = 0$, 则

$$x=\varphi(t,0,x^0)=f(x^0,t) \tag{4.7.3}$$

定义了一族依赖于实参数 t 的从 E^n 到它自身的双方连续的映射，它们具有下列性质:

(A) $f(x^0,0)=x^0$ (恒等性)，

(B) $f(f(x^0,t_1),t_2)=f(x^0,t_1+t_2)$ (半群性)，

(C) $f(x^0,t)$ 是 (x^0,t) 的连续函数(连续性).

(A) 是定义 (4.7.3) 的推论; (B) 则熟知是由于 (4.7.1) 为一自治系统; (C) 是由于假设 $X\in C^1$ 的结果.

具有性质(A),(B),(C)的映射族(4.7.3)称为 E^n(相空间)中关于微分系统(4.7.2)的“动力系统”(简记 d. s.).

更一般地，我们可以从距离空间 E(相空间)出发，而称满足性质(A),(B),(C)的从 E 到它自身的映射族 $x=f(x^0,t)$ 为 E 中的(推广的)动力系统. 动力系统的详细论述可在 V. V. Nemytskii-V. V. Stepanov 的书[1]和 V. V. Nemytskii [1] 中找到，因此，我们仅限于作一简短的介绍.

已给动力系统的通过给定点 $x^0\in E$ 的轨线，定义为 $f(x^0,t)$ 对一切 t 的象集合. 当 $t\leqslant 0$ 或 $t\geqslant 0$ 时，相应地有 α-半轨和 ω-半轨.

E 中任一 x 的点集 I 称为(在已知动力系统下的)**不变集**，如果通过 x 的轨线上的一切点都属于 I. 因此，不变集的并集也是不变集. 由不变集的定义容易知道，不变集的交集也是不变集. 为方便起见，在不变集中也包含空集 ϕ. 于是，任何不变集关于 E 的补集毫无例外也应是不变集. 容易证明，不变集的闭包(因而不变集的边界)也是不变集.

在已给动力系统下，空间 E 的一个**划分**，是指把 E 分解为一族互不相交且又覆盖 E 的不变集族.

下面给出划分的第一个例子. 记 $L^+[I^+]$ 为 E 中有有界(无界)的 ω-半轨的一切点所构成的集合，$L^-[I^-]$ 为 E 中有有界(无界)的 α-半轨的一切点所构成的集合. 容易证明，下面四个集合

$$I^-\cap I^+,\ I^-\cap L^+,\ L^-\cap I^+,\ L^-\cap L^+$$

(从而 L^+, I^+, L^-, I^- 也属于这四个集合）都是不变集，且它们互不相交，它们的并集与 E 重合，从而构成了一个 E 的划分(Lagrange 划分).

划分的第二个更有趣的例子是由 α-极限点和 ω-极限点概念产生的. 极限点的定义与§1中的相仿，也就是说，点 $y \in E$ 称为（关于动力系统和给定的点 $x \in E$ 的）ω-极限点，如果存在递增序列 $\{t_n\} \to +\infty$，使得 $f(x, t_n)$ 与 y 之间的距离(在 E 中的度量下)趋于零. 对于每一点 $x \in E$，对应有 α-极限点集 Ax 和 ω-极限点集 Ωx（它们中间的一个可能是空集，也可能两者都是空集)，称它们为 x 的 α-极限集和 ω-极限集；它们也分别是通过 x 的轨线上任何点的 α-极限集和 ω-极限集. 应用与§1.1基本上相同的推理，可以证明它们都是不变集. 由此得知，如果轨线与它的一个极限集有公共点，则此轨线是它的极限集的一部分.

现在可以用下面的方法来构造 E 的一个划分. 设 D^+, A^+, P^+ 分别是具有下列性质的 x 的点集: $\Omega_x = \phi$; $\Omega_x \neq \phi$; $\Omega_x \cap f(x, t) = \phi$; $\Omega_x \cap f(x, t) \neq \phi$. 这些定义对应于§1.2中给出的 ω-发散轨线，ω-渐近轨线和 ω-Poisson 稳定轨线. 我们再定义 D^-, A^-, P^-. 不难证明，由上面定义的六个集合都是不变集. 因而，下面九个集合

$$D^- \cap D^+,\ D^- \cap A^+,\ A^- \cap D^+,\ D^- \cap P^+,\ A^- \cap A^+$$
$$P^- \cap D^+,\ A^- \cap P^+,\ P^- \cap A^+,\ P^- \cap P^+$$

给出了 E 的一个(Poisson)划分. 这最后一个集合(一切 Poisson 稳定点 x 所构成的集合)是由下面的事实来刻划的: 对 $x \in P^- \cap P^+$，集合 A_x, Ω_x 与通过 x 的轨线的闭包重合.

$P^- \cap P^+$ 的闭包是给定动力系统的中心，显然它是不变集: 它的轨线称为中心轨线(这些概念是由 G. D. Birkhoff 借用超穷数来引入的，其方法与此处不同).

于是，研究动力系统的目的，在于研究不同的划分以及它们之间的相互关系，这就导致了各种不同的不变集的拓扑结构的分析. 这一理论最主要部分之一是研究中心轨线及其分类(回复轨线，概

周期轨线等等).

动力系统的概念后来由不同学者(V. V. Nemytskii, E. A. Barbachin 以及其它人)作了进一步的推广. 他们考虑了拓扑空间 E 和更一般的拓扑群, 以代替距离空间 E 和实数 t 的群. 这就产生了所谓"拓扑动力学",有关这方面的内容,我们建议读者参看最近的书 W. H. Gottschalk-G. A. Hedlund [1]. 更一般的理论最近由 G. Reeb [1] 所建立.

参考文献

AKUTOWICZ, E. J.

[1] The ergodic property of the characteristics on a torus, *Quart. Jour. Math.* (2), 9 (1958), 275–281;

ANDRONOV, A. A.

[1] Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189 (1929), 559–561.

ANDRONOV, A. A. and CHAIKIN, C. E.

[1] *Theory of oscillations*, Princeton, 1949.

BENDIXSON, I.

[1] Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 24 (1901), 1–88.

BIRKHOFF, G. D

[1] Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques, *Bull. Soc. Math. de France*, 40 (1912), 305–323.

BOHL, P

[1] Über die hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen Variabeln periodische Differentialgleichungen erster Ordnung, *Acta Math.*, 40 (1916), 321–336.

BROUWER, L. E. J.

[1] On continuous vector distributions on surfaces, *Verh. Koninkl. Ak. Wet. Amsterdam*, 11 (1909); 12 (1910).

CHECHIK, V. A.

[1] Necessary and sufficient conditions for the semistability of a limit cycle, *Uspekhi Mat. Nauk*, X. 1 (63), (1955), 183–187 (Russian).

CHERRY, T. M.

[1] Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus, *Proc. London Math. Soc.*, (2), 44 (1938), 175–215.

[2] The pathology of differential equations, *Jour. Austral. Math. Soc.*, 1 (1959), 1–16.

CHIN YUAN-SHUN

[1] Sur l'équation différentielle à la surface du tore, *Sci. Record*, 1 (1957), 7–11.

CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N.

[1] *Theory of ordinary differential equations*, New York, 1955.

DENJOY, A.

[1] Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *Jour. Math. Pures et appl.*, (9) 11 (1932), 333–375.

[2] Les systèmes d'équations différentielles périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 247 (1958), 1691–1696.

[3] Le phénomène ergodique et les trajectoires sur le tore, *ibid.*, pp. 1072–1078.

[4] Les équations différentielles périodiques. Allure asymptotique des intégrales, *ibid.*, 248 (1959), 325–330.

DIGEL, E.

[1] *Über den Verlauf der Integralkurven des Systems* $dx/dt = f(x, y)$, $dy/dt = g(x, y)$ *in der Umgebung eines singulären Punktes*, Inaugural Dissertation, Tübingen, 1934.

DILIBERTO, S. P.

[1] On systems of ordinary differential equations, *Contrib. to the theory of nonl. oscill.*, vol. 1 (1950), 1–33.

DULAC, H.

[1] Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. de France*, **51** (1923), 45–188 (p. 187).

[2] Recherche des cycles limites, *C. R. Acad. Sci. Paris.* **204** (1937), 1703–1706.

ERUGIN, N. P.

[1] Some general questions in the theory of stability of motion, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **15** (1951), 227–236 (Russian).

FROMMER, M.

[1] Die Intergralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, *Math. Annalen*, **99** (128), 222–272.

GOTTSCHALK, W. H. and HEDLUND, G. A.

[1] *Topological dynamics*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 36, Providence 1955.

GOURSAT, E.

[1] *Cours d'Analyse Mathématique*, Tome I, p. 306.

HARTMAN, PH. and WINTNER, A.

[1] On the behavior of the solutions of real binary differential systems at singular points, *Am. Jour. Math.* **75** (1953), 117–126.

KESTIN, J. and ZAREMBA, S. K.

[1] Geometrical methods in the analysis of ordinary differential equations, *Appl. Sci. Res., B*, **3** (1953), 149–189.

KNESER, H.

[1] Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math., Annalen*, **91** (1923), 135–154.

KOLMOGOROV, A. N.

[1] Dynamical systems with an integral invariant on the torus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **93** (1953), 763–766 (Russian).

LEFSCHETZ, S.

[1] *Differential equations: Geometric theory*, New York, 1957.

LEVI, E. E.

[1] Sur les équations différentielles périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **153** (1911), 799–802.

MYSHKIS, A. D.

[1] An extension of theorem on equilibrium points of a dynamical system within a closed orbit, *Matem. Sbornik*, **34** (76), (1954), 525–540 (Russian).

NEMYTSKII, V. V.

[1] Topological problems of the theory of dynamical systems. *Uspekhi. Mat. Nauk*, **IV, 6** (34), (1949), 91–153 (Russian); *Amer. Math. Soc. Translation No.* **103**, Providence, 1954.

NEMYTSKII, V. V. and STEPANOV, V. V.

[1] *Qualitative theory of differential equations*, Princeton 1960.

OLECH, C.

[1] Sur certaines propriétés des intégrales de l'équation $y' = f(x, y)$ dont le second membre est doublement périodique, *Ann. Polon, Math.*, **3** (1957), 189–199.

OPIAL, Z.

[1] La presque-périodicité et les trajectoires sur le tore, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **250** (1960), 3565–3566.

PAPUS, P. N.

[1] On the research of semistable regular limit cycles, *Uspekhi Mat. Nauk, VII*, **4** (50), (1952), 165–168 (Russian).

PERETYAGIN, B. M.

[1] On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = (cx + dy + P(x, y))/(ax + by + Q(x, y))$, with $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ homogeneous polynomials of degree n, *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **114** (1957), 29–32 (Russian).

PERRON, O.

[1] Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, *Math. Zeitschr.*, **15** (1922), 121–146.

PETROVSKII, I. G. and LANDIS, E. M.

[1] On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ where P and Q are polynomials of the second degree, *Matem. Sbornik*, **37** (79) (1955), 209–250 (Russian); *Amer. Math. Soc. Translations*, **10** (1958), 177–221;

[2] On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ where P and Q are polynomials, *Matem. Sbornik*, **43** (1957), 149–178 (Russian); *Amer. Math. Soc. Translations* **14** (1960), 181–199.

PLIS, V. A.

[1] On the structural stability of differential equations on a torus, *Vestnik Leningr. Univ.*, 1960, **13**, 15–23 (Russian).

POINCARÉ, H.

[1] Sur les courbes définies par les équations différentielles, *Jour. Math. Pures Appl.*; (4) **1** (1885), 167–244.

REEB, G.

[1] Sur la théorie générale des systèmes dynamiques. *Annales Inst. Fourier*, **6** (1955–6), 89–120.

SAKHARNIKOV, A.

[1] Qualitative behavior of the trajectories near the boundary of a region of stability containing a center-type singular point, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **15** (1951). 349–354 (Russian).

SAITO, T.

[1] On the measure preserving flow on a torus, *Jour. Math. Soc. of Japan*, **3** (1951) 279–284; *ibid.* 4 (1952), 338.

SANSONE, G.

[1] *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 1, Bologna, 1946.

SIEGEL, C. L.

[1] Note on differential equations on the torus, *Ann. of Math.* (2) **46** (1945), 423–428

SOL'NTSEV, G.

[1] On the asymptotic behavior of integral curves of a system of differential equations, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **9** (1945), 233–240 (Russian).

STERNBERG, S.

[1] On differential equations on the torus. *Am. Jour. Math.*, **79** (1957), 397–402.

STOKER, J. J.

[1] *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, New York, 1950.

TKACHEV, V. F.

[1] New sufficient conditions for stability, semistability or unstability of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, *Dokl. Akad, Nauk SSSR*, **116** (1957), 564–567 (Russian).

URA, T.

[1] Sur les courbes défines par les équations différentielles dans l'espace à n dimensions, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, (3) **70** (1953), 287–360.

[2] Sur les courbes définies à la surface du tore par des équations admettant un invariant intégral, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, (3) **69** (1952), 259–275.

URABE, M.

[1] Infinitesimal deformation of cycles, *Jour. Sci. Hiroshima Un.*, *Ser. A*, **18** (1954), 37–53.

URABE, M. and KATSUMA, S.

[1] Generalization of the Poincaré-Bendixson theorem, *Jour. Sci. Hiroshima Un., Ser. A*, **17** (1954), 365–370.

VAN KAMPEN, E. R.

[1] The topological transformations of a simple closed curve into itself, *Am. Jour. Math.* **57** (1935), 142–152.

VINOGRAD, R. E.

[1] On the behavior at infinity of unbounded integral curves, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **66** (1949), 5–8 (Russian).

WEIL, A.

[1] On systems of curves on a ring-shaped surface, *Jour. Indian Math. Soc.*, **19** (1931), 109–112.

ZAREMBA, S. K.

[1] Divergence of vector fields and differential equations, *Am. Jour. Math.*, **76** (1954), 220–234.

[2] Sur la variation de la tangente à une courbe fermée simple de Jordan. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **12** (1934), 55–56.

第五章　具有扰动项的平面自治系统

这一章研究当平面自治系统的右端加了改变项(又称扰动项)以后它的轨线的变化情况.

§1, 2, 3 将讨论孤立奇点邻域内轨线的局部变化. 这一问题的有些内容已在第二章 §3, 第三章 §3 有关解析系统的研究和 A. Wintner 关于 Briot-Bouquet 奇点的研究中讨论过了.现在重新考虑这一问题是为了确定在什么条件下所给系统的孤立奇点具有与简化系统的奇点相类似的性质. 简化系统比较简单,特别地,它可以是线性系统. 因此,我们的目的是想建立所谓"等价性态"的准则.

在§4 中我们将研究一种情况,其中简化系统不能反映原系统的性质,因为它的奇点组成一条完整的直线,而不是一个点.

这一章的最后一节将研究系统右端有扰动项时相平面内轨线集合的"大范围"变化.

§1. 齐次扰动系统

1. 一般问题

(a) 让我们再来考虑第二章 §2.2 中已研究过的系统

$$\dot{x} = X_m(x, y),\ \dot{y} = Y_m(x, y). \tag{5.1.1}$$

这一节将沿用那里用过的记号、假设和所得的结果. 回忆那时的 X_m, Y_m 表示 m 次齐次函数, m 为 ≥ 1 的整数, 它们仅在原点同时为零. X_m, Y_m 不必假定都是多项式,虽然这是人们最关心的一种情形.

在第二章 §3, 我们还讨论了系统

$$\dot{x} = X_m(x, y) + f(x, y),\ \dot{y} = Y_m(x, y) + g(x, y), \tag{5.1.2}$$

其中 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 在原点的某邻域内能展成幂级数,且在此

邻域内它们是关于 $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$ 的高于 m 级的无穷小. 另外, 存在 $r>0$, 使得

$$(X_m(x,y)+f(x,y))^2+(Y_m(x,y)+g(x,y))^2>0, \quad 0<\rho\leqslant r, \tag{5.1.3}$$

因此,原点 O 是 (5.1.2) 的孤立奇点.

现在,我们放弃 f, g 是解析函数的假设,而假定它们在原点的某邻域内连续,且保证 (5.1.2) 的解满足唯一性和关于初值的连续依赖性. 例如,可以假定 f, g 满足 Lipschitz 条件.

我们保留 f, g 是 ρ 的高于 m 级的无穷小这一假定,于是有

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)\rho^{-m}=\lim_{\rho\to 0} g(x,y)\rho^{-m}=0. \tag{5.1.4}$$

也保留假设 (5.1.3), 因此,原点 O 仍是 (5.1.2) 的孤立奇点.

(b) 若取 O 为极点, 引入通常的极坐标, 则系统 (5.1.1) 可以写为(第二章 §2)

$$\dot{\rho}=\rho^m Z(\theta), \quad \dot{\theta}=\rho^{m-1}N(\theta), \tag{5.1.5}$$

其中

$$Z(\theta)=Y_m(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta+X_m(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta,$$

$$N(\theta)=Y_m(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta-X_m(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta,$$

同时,如果定义 $\Delta(\rho,\theta)$ 与 $E(\rho,\theta)$ 如下(在解析情形 Δ 与 E 分别为 ρP 与 ρQ):

$$\left.\begin{aligned}\Delta(\rho,\theta)&=[g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta+f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta]\rho^{-m},\\ E(\rho,\theta)&=[g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta-f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta]\rho^{-m},\end{aligned}\right\} \tag{5.1.6}$$

则系统 (5.1.2) 可以写为

$$\dot{\rho}=\rho^m[Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)], \quad \dot{\theta}=\rho^{m-1}[N(\theta)+E(\rho,\theta)]. \tag{5.1.7}$$

我们立刻注意到, 假设 (5.1.4) 等价于 $\Delta(\rho,\theta)$ 和 $E(\rho,\theta)$ 是 ρ 的无穷小(关于 θ 一致), 即给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\rho_0>0$, 使得 $|\Delta(\rho,\theta)|\leqslant\varepsilon$, $|E(\rho,\theta)|\leqslant\varepsilon$, 对 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,

(c) 在对系统 (5.1.1) 的研究中, 我们考虑过方程 $N(\theta)=0$ 的三种情况: $N(\theta)$ 有孤立实零点,或者无孤立实零点, 或者恒等于零. 下面我们将按同样的方法来研究系统 (5.1.2).

2. $N(\theta)\neq 0$ 的情形

(a) 我们已经看到,当 $N(\theta)\neq 0$ 时,点O是系统(5.1.1)的中心或焦点(第二章§2),又知道,若(5.1.2)是解析系统,则O也是(5.1.2)的中心或焦点(第二章§4).

在现在的假设下,我们得到由下面定理给出的较弱的结果[1].

定理 1. 若O是(5.1.1)的中心或焦点,则它是§1.1中系统(5.1.2)的中心,焦点或中心焦点(第四章§3.1).

按照假设,存在常数 $k>0$,使得 $|N(\theta)|>k$, $0<\theta\leqslant 2\pi$. 又由(5.1.4), $E(\rho,\theta)$ 对 θ 一致地关于 ρ 趋于零. 因此我们可以确定 ρ_0,使得

$$|N(\theta)+E(\rho,\theta)|>k/2,\quad 0<\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho_0. \tag{5.1.8}$$

另一方面,存在 $M>0$,使得对 $0<\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho_0\leqslant\rho$ 有 $|Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)|<M$,因此

$$-\frac{2M}{k}<\frac{Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)}{N(\theta)+E(\rho,\theta)}<\frac{2M}{k},\quad 0<\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho_0. \tag{5.1.9}$$

设 $\bar{P}(\bar{\rho},0)$ 是以O为中心,ρ_0为半径的圆 $C(O,\rho_0)$ 内的一点. 考虑方程

$$\rho^{-1}d\rho/d\theta=-2M/k,\quad \rho^{-1}d\rho/d\theta=2M/k \tag{5.1.10}$$

的经过 $\bar{P}$ 点的两条积分曲线 C_1, C_2,它们分别是对数螺线

$$\rho_1(\theta)=\bar{\rho}\exp(-2M\theta/k),\quad \rho_2(\theta)=\bar{\rho}\exp(2M\theta/k).$$

显然,若 $\bar{\rho}$ 充分地小,则 C_1, C_2 上对应于区间 $0<\theta\leqslant 2\pi$ 的弧一定在 $C(O,\rho_0)$ 内. 事实上,只需取 $\bar{\rho}$ 满足 $\bar{\rho}<\rho_0\exp(-4M\pi/k)$ 即可.

通常,我们将 ρ, θ 看作直角坐标. 于是由熟知的比较定理(G. Sansone[1] 第94页)和(5.1.9),可知方程

---

1) 见 H. Forster [1] 第296—298页. 对 $m=1$ 的情形,这定理原先是由 O. Perron 得到的,见 O. Perron[1] 第278—288页定理5.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)}{N(\theta)+E(\rho,\theta)} \tag{5.1.11}$$

的从点 $(\bar{\rho},0)$ 出发的解 $\rho=\rho(\theta)$ 是定义在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上且满足 $\rho_1(\theta)<\rho(\theta)<\rho_2(\theta)$，$0<\theta\leqslant 2\pi$ 的曲线，特别地，

$$\rho(2\pi)<\rho_2(2\pi)<\rho_0.$$

这种情形在 ρ,θ 平面上如图 73 所示.

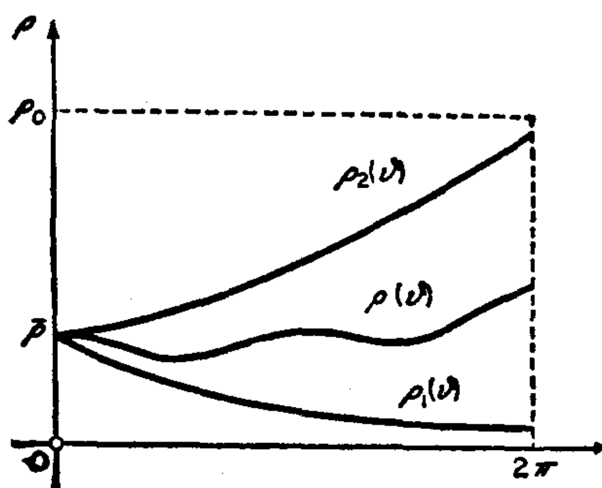


图 73

另一方面，方程 (5.1.11) 是 (5.1.2) 的轨线所满足的方程，因为只要轨线弧在圆 $C(O,\rho_0)$ 内，(5.1.8) 就成立，且轨线可用 $\rho=\rho(\theta)$ 表示，其中 $\rho(\theta)$ 是 (5.1.11) 的解.

视 ρ,θ 为极坐标，得知(5.1.2)的经过线段 $0<x<\rho_0$, $y=0$ 上的点 $\bar{P}=(\bar{\rho},0)$ 的轨线，当 $\bar{\rho}$ 充分小时，绕 O 一周后再与线段相交于 $\bar{\bar{P}}$. 若 $\bar{P}=\bar{\bar{P}}$，则此轨线为一环；若 $\bar{P}\neq\bar{\bar{P}}$，则三点 O, $\bar{P}$, $\bar{\bar{P}}$ 的次序或者为 $O,\bar{P},\bar{\bar{P}}$，或者为 $O,\bar{\bar{P}},\bar{P}$. 由 (5.1.8)，所有与线段 $\bar{P}\bar{\bar{P}}$ 相交的轨线总是从同一方向穿过 $\bar{P}\bar{\bar{P}}$. 故对这两种情况，由线段 $\bar{P}\bar{\bar{P}}$ 与轨线弧 $\bar{P}\bar{\bar{P}}$ 所构成的区域内都含有 (5.1.2) 的整条半轨（图 74），其 ω 或者 α-极限点或者为 O（因为这个区域内只有一个奇点），或者为一环. 由于 $\bar{P}$ 是任意的，从而证明了我们的论断.

(b) 对于解析系统，我们已经看到，若 O 是 (5.1.1) 的焦点，则它也是(5.1.2)的焦点（第二章§ 4）. 在现在的假设下，这结论仍然

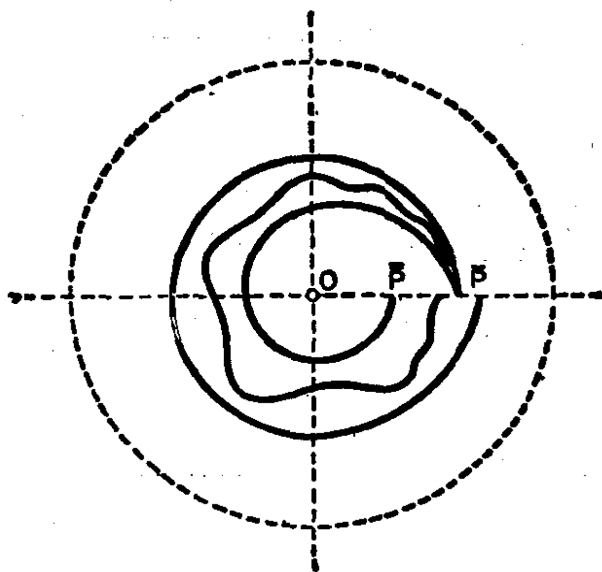


图 74

成立，于是我们有以下定理.

定理 2. 若O是齐次系统(5.1.1)的焦点，则它也是§1.1的系统(5.1.2)的焦点(见 M. Frommer[1] 第410页；也可看 H. Forster[1] 第298—299页).

O是(5.1.1)的焦点的充分必要条件是

$$N(\theta) \neq 0, \ (0 < \theta \leqslant 2\pi); \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} d\theta \neq 0$$

(第二章§2).

例如，当$I < 0$，$N(\theta) < 0$时，O为(5.1.1)的不稳定焦点(第二章§2).

这时存在两个常数$k > 0$，$K > 0$使得$|N(\theta)| > k$，$|Z(\theta)| < K$，又由(5.1.4)可确定充分小的$\rho_0 > 0$，使得在圆$C(O, \rho_0)$内有

$$|E(\rho, \theta)| < \min\left(\frac{k}{2}, \frac{-Ik^2}{12K\pi}\right), \ |\Delta(\rho, \theta)| < \frac{-Ik}{12\pi}.$$

此外，存在$M > 0$，使得$|Z(\theta) + \Delta(\rho, \theta)| < M$.

正如我们在(a)中所指出的，(5.1.2)的轨线在$C(O, \rho_0)$内可以表为$\rho = \rho(\theta)$的形式，其中$\rho(\theta)$是(5.1.11)的解；而且，当$\bar{\rho}$充分小时由点$\bar{P} = (\bar{\rho}, 0)$出发的解$\rho(\theta)$在$0 < \theta \leqslant 2\pi$

内有定义.

对 (5.1.11) 积分,得

$$\rho(2\pi)=\bar{\rho}\exp\left(\int_0^{2\pi}\frac{Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)}{N(\theta)+E(\rho,\theta)}d\theta\right). \tag{5.1.12}$$

注意上面的不等式,我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)}{N(\theta)+E(\rho,\theta)}d\theta &= \int_0^{2\pi}\frac{Z(\theta)}{N(\theta)}d\theta \\ &+\int_0^{2\pi}\left[\frac{Z(\theta)}{N(\theta)+E(\rho,\theta)}-\frac{Z(\theta)}{N(\theta)}\right]d\theta \\ &+\int_0^{2\pi}\frac{\Delta(\rho,\theta)}{N(\theta)+E(\rho,\theta)}d\theta\leqslant I \\ &+\int_0^{2\pi}\frac{|Z(\theta)|}{|N(\theta)|}\,\frac{|E(\rho,\theta)|}{|N(\theta)+E(\rho,\theta)|}d\theta \\ &+\int_0^{2\pi}\frac{|\Delta(\rho,\theta)|}{|N(\theta)+E(\rho,\theta)|}d\theta<I \\ &+\frac{2K}{k^2}\int_0^{2\pi}|E(\rho,\theta)|d\theta+\frac{2}{K}\int_0^{2\pi}|\Delta(\rho,\theta)|d\theta<\frac{I}{3}.\end{aligned}$$

由 (5.1.12) 得 $\rho(2\pi)<\bar{\rho}e^{I/3}$, 类似地, $\rho(4\pi)<\rho(2\pi)e^{I/3}<\bar{\rho}e^{2I/3}$. 一般地, $\rho(2\nu\pi)<\bar{\rho}e^{\nu I/3}$, $(\nu=1, 2,\cdots)$, 故当 $\theta\to+\infty$ 时 $\rho(\theta)$ 趋于零.

我们注意到,上面的证明也指出,若 O 是 (5.1.1) 的不稳定焦点,则它也是 (5.1.2) 的不稳定焦点;若 O 是 (5.1.1) 的稳定焦点,则它也是 (5.1.2) 的稳定焦点.

3. 趋于 O 的轨线. 例外方向

(a) 下面的引理成立 (I. Bendixson [1] 第 34 页, H. Forster [1] 第 308 页, F. Tricomi [1] 第 71 页).

引理 1. 若方程 $N(\theta)=0$ 在 $0<\theta\leqslant 2\pi$ 内的根为有限多个,则对系统 (5.1.2) 的每一条当 $t\to+\infty$ $[t\to-\infty]$ 时都趋于 O 的轨线 $\rho=\rho(t)$, $\theta=\theta(t)$, 极限 $\theta(+\infty)$ $[\theta(-\infty)]$ 存在,有限或无限.

这条引理的证明可以按与第二章 §3 引理 1 的相同的论证得到. 假定当 $t\to+\infty$ $[t\to-\infty]$ 时 $\theta(t)$ 有几个极限，设 $\theta_1<\theta_2$ 是其中的两个. 在这两个 θ 之间我们可以取 $\bar{\theta}$，使得 $N(\bar{\theta})\neq 0$. 由于 $E(\rho,\theta)$随着ρ趋于零而趋于零，故可确定 $\rho_0>0$，使得 $N(\bar{\theta})+E(\rho,\bar{\theta})\neq 0$，对 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$. 于是 (5.1.2) 的所有轨线与射线 $\theta=\bar{\theta}$，$\rho\leqslant\rho_0$ 相交时以同一方向穿过. 和第二章 §3 引理 1 的证明一样，我们就可得到与存在几个极限的假设相矛盾的结论.

注. 注意，$N(\theta)=0$ 有有限个根的假设不是必要的，因为对更一般的情形，只要 $N(\theta)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的零点集的余集是处处稠密集，同样的推理仍成立. 但是，关于 $N(\theta)$ 的零点的某些假设对此引理的成立则是必需的，这可由下面的例子来说明. 考虑我们在第四章 §3 中遇到过的系统

$$\dot{x}=x,\ \dot{y}=y+x\cos\log|x|/\log|x|,$$

其轨线振动地趋于 O，同时原点O是其简化系统（线性系统）的星形结点. 在这个例子中，我们有 $f=0$，g/ρ 关于θ一致地趋于零，但是 $N(\theta)$ 却恒等于零.

(b) 还有两条类似于第二章§3 对于解析系统所证明的引理，在这里也仍然成立. 那里的证明是以方程右端为解析这一假设作为基础的，这只不过是为了保证 (5.1.4) 成立. 这些引理如下：

引理 2. 若 $\gamma(t)$ 是§1.1中系统 (5.1.2) 的趋于O的轨线，则存在有限极限 $\theta(+\infty)$ $[\theta(-\infty)]$ 等价于存在一条过O的直线，当 $t\to+\infty$ $[t\to-\infty]$ 时，轨线 $\gamma(t)$ 的切线以该直线为极限位置.

引理 3. §1.1中系统 (5.1.2) 的每一条轨线 $\rho=\rho(t)$，$\theta=\theta(t)$ 若以有限的 $\theta(+\infty)$ $[\theta(-\infty)]$ 趋于O，则数 $\theta(+\infty)$ $[\theta(-\infty)]$ 是方程 $N(\theta)=0$ 的根.

(c) 在第四章 §3，我们定义了例外方向这一概念. 并指出，对于齐次系统 (5.1.1)，所有的例外方向，也仅仅是这些例外方向才对应于方程 $N(\theta)=0$ 的根. 对于系统 (5.1.2) 来说，容易看

出这个结论也是成立的．因此，我们有如下的引理：

引理 4. 系统 (5.1.2) 的所有例外方向都是系统 (5.1.1) 的例外方向，反之亦然，因而它们都对应于 $N(\theta)=0$ 的根．反之，方程 $N(\theta)=0$ 的根也都对应于这两个系统的例外方向．

事实上，在任一常点 P，设 α 是向径 $\overrightarrow{OP}$ 与 (5.1.2) 的轨线 γ_P 在 P 点的切线之间的夹角，则当 $\alpha\neq\pi/2+k\pi$ 时，$\mathrm{tg}\alpha$ 可表为

$$\frac{N(\theta)+E(\rho,\theta)}{Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}\right)^{-1\,*)}. \tag{5.1.13}$$

若值 $\bar{\theta}$ 满足 $N(\bar{\theta})=d\neq 0$，则存在 $\rho_0>0$，使得对 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$ 有 $|N(\bar{\theta})+E(\rho,\bar{\theta})|>|d|/2$．因此，若 $\{P_n\}$ 为趋于 O 的点列，其极角 $\theta_n\to\bar{\theta}$，$\{\alpha_n\}$ 为对应的 α 值，则因为 (5.1.13) 的分母当 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$ 时是有界的，序列 $\{\mathrm{tg}\alpha_n\}$ 就不可能趋于零．

4. 正规扇形域的不变性．第一类正规扇形域

(a) 设 θ_0 为 $N(\theta)$ 的孤立零点；因为 $Z^2(\theta)+N^2(\theta)>0$，故 $Z(\theta_0)\neq 0$，从而存在 $\delta>0$，使得对 $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$ 有 $Z(\theta)\neq 0$．此外，对 $\theta_0-\delta\leqslant\theta<\theta_0$，$\theta_0<\theta\leqslant\theta_0+\delta$，有 $N(\theta)\neq 0$．

以 O 为顶点的角域 $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$ 是系统 (5.1.1) 的正规角域（第二章 §2），在其中不含有系统 (5.1.2) 的其它异于 θ_0 的例外方向（引理 4）．

另一方面，可以找到 $\rho_0>0$，使得在整个扇形域 $S(\rho_0,\delta)$：$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$，$|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$ 内，表达式 (5.1.13) 与 $N(\theta)/Z(\theta)$ 之差小于任意正数 ε．

因此，这扇形域是系统 (5.1.2) 的正规扇形域（第二章 § 3），显然它也是系统 (5.1.1) 的正规扇形域，且对这两个系统而言正规扇形域的类型也相同．从而，我们有：

定理 3. 若 θ_0 是方程 $N(\theta)=0$ 的孤立根，则可找到数

*) 原书误为 $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}$．——译者注

$\delta>0$，$\rho_0>0$，使得扇形域 $S(\rho_0,\delta)$：$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$，$|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$ 是§1.1中的系统(5.1.1)与系统(5.1.2)的正规扇形域，且其类型对这两个系统来说也是相同的.

还须指出，若在对应于 $N(\theta)=0$ 的给定的根 θ_0 的正规扇形域中，(5.1.2)的轨线趋于 O，则其切线趋于以 $\mathrm{tg}\theta_0$ 为斜率的直线(引理2).

(b) 由第二章§2的结果，我们有如下的定理：

定理4. 若 θ_0 是方程 $N(\theta)=0$ 的 k 重零点，k 为奇数，且 $Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0)>0$，则存在一扇形域 $S(\rho_0,\delta)$：$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$，$|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$，使得满足§1.1中的假设的，从此扇形域中出发的系统(5.1.2)的轨线，当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时都趋于 O. 与此同时，它们的切线都趋于过 O 点而斜率为 $\mathrm{tg}\theta_0$ 的直线.

为此，只须指出，$S(\rho_0,\delta)$ 既是(5.1.1)的，也是(5.1.2)的第一类正规扇形域.

5. 第二类正规扇形域. 第一判定问题

(a) 回忆定理30(第四章§3)所指出的，第二类正规扇形域可能出现两种情形：唯一性情形与一般情形，对于齐次系统(5.1.1)，总是出现唯一性情形，唯一趋于 O 的轨线就是不变射线. 但是，对于系统(5.1.2)，一般情形也会出现，即在此扇形域内可能存在无穷多条趋于 O 的轨线.

作为这一情形的一个例子，考虑系统(见 O. Perron [1] 第277页)

$$\dot{x}=x-4y\sqrt{|xy|},\quad \dot{y}=-y+4x\sqrt{|xy|}.$$

($\sqrt{\ }$ 为算术根)

这系统的轨线性状如图75所示. 由图易见，存在四个第二类正规扇形域，其中每一个都对应于一般情形. 按照第四章§4.4(c)所给的定义，O 是推广意义下的鞍点，对应的系统(5.1.1)有鞍点 O.

现在我们必须解决判定问题(M. Frommer [1]). 即寻找一些

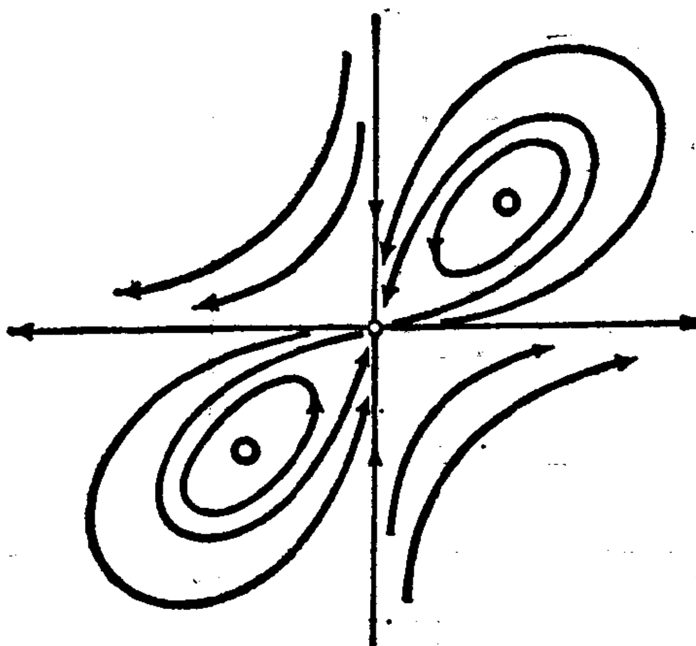


图 75

条件，以使它们与 §1.1 中的条件在一起能保证系统(5.1.2)以及对应的系统 (5.1.1) 的第二类正规扇形域属于唯一性情形.

(b) 我们指出，对于三类正规扇形域中的任何一类，每一条轨线总可以表示为 $\theta=\theta(\rho)$，其中 $\theta(\rho)$ 是方程

$$d\theta/d\rho=\rho^{-1}\phi(\rho,\theta) \tag{5.1.14}$$

的解，而

$$\phi(\rho,\theta)=[N(\theta)+E(\rho,\theta)]/[Z(\theta)+\Delta(\rho,\theta)]. \tag{5.1.15}$$

若我们再次把 ρ 与 θ 当成直角坐标，并设 ρ 为横坐标，则代替扇形域 $S(\rho_0,\delta)$ 的将是一矩形，趋于 O 的轨线变成从 $(0,\theta_0)$ 出发的曲线 $\theta=\theta(\rho)$，那些不趋于 O 而离开扇形域的轨线则变成离开矩形的水平边的曲线 $\theta=\theta(\rho)$. 第二类扇形域(一般情形)的象如图 76 所示.

现在我们引入如下假设(见 E. R. Lonn[2])：存在函数 $L(\rho)\geqslant 0$，使得在矩形(或扇形) $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$，$|\theta-\theta_0|\leqslant\rho$ 内，对每一对 θ_1 与 θ_2 有

$$\frac{\phi(\rho,\theta_1)-\phi(\rho,\theta_2)}{\theta_1-\theta_2}\leqslant L(\rho), \tag{5.1.16}$$

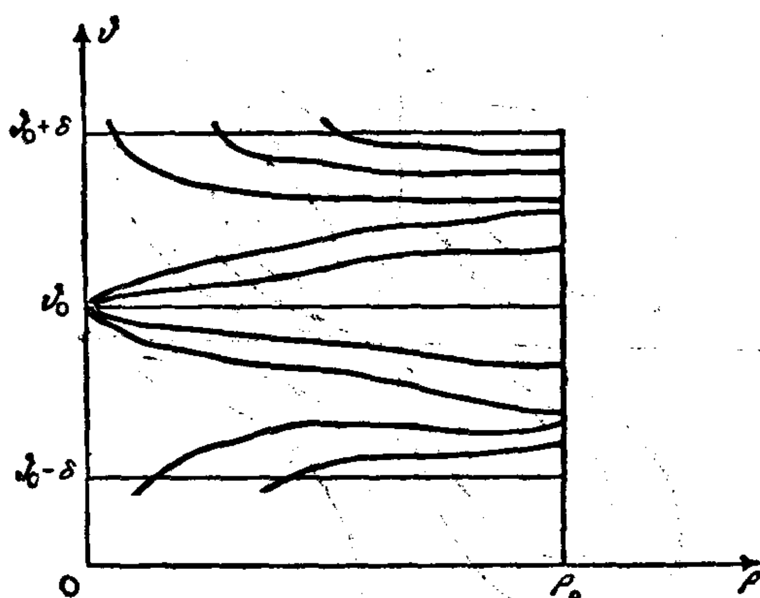


图 76

且

$$\int_0^{\rho_0} \frac{L(\rho)}{\rho} d\rho = \lim_{\sigma \to +0} \int_0^{\rho_0} \frac{L(\rho)}{\rho} d\rho = K > 0. \tag{5.1.17}$$

在这些假定下，我们立刻看出 (5.1.14)，(5.1.15) 的过点 $(0,\theta_0)$ 的解不多于一个．因此，$S(\rho_0, \delta)$ 呈现唯一性情形．

事实上，如果当 $\rho \to 0+$ 时 (5.1.14)，(5.1.15) 有两个都趋于 θ_0 的解 $\theta_1(\rho) \geqslant \theta_2(\rho)$，令

$$h = \theta_1(\rho_0) - \theta_2(\rho_0), \tag{5.1.18}$$

则存在数 $\bar{\rho}$，$0 < \bar{\rho} < \rho_0$，使得

$$\theta_1(\bar{\rho}) - \theta_2(\bar{\rho}) < he^{-K}/2. \tag{5.1.19}$$

从 $\bar{\rho}$ 到 $\rho(\bar{\rho} < \rho < \rho_0)$ 沿路径 $\theta_1(\rho)$ 和 $\theta_2(\rho)$ 积分 (5.1.14) 式，将所得方程相减，得

$$\theta_1(\rho) - \theta_2(\rho) = \theta_1(\bar{\rho}) - \theta_2(\bar{\rho}) + \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{\phi(r,\theta_1) - \phi(r,\theta_2)}{r} dr,$$

因此，由 (5.1.19) 和 (5.1.16)，我们有

$$\theta_1(\rho) - \theta_2(\rho) \leqslant \frac{h}{2e^K} + \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{L(r)}{r} [\theta_1(r) - \theta_2(r)] dr.$$

应用推广的 Gronwall 引理（第一章 §2.1）和 (5.1.17)，我们有

$\theta_1(\rho)-\theta_2(\rho)<h/2$，当 $\rho=\rho_0$ 时这个式子与(5.1.18)矛盾.

(c) 参照第二章§ 2 的结果，我们有如下定理:

定理 5. 若 θ_0 为 $N(\theta)$ 的一个 k 重孤立零点，k 为奇数，且 $Z(\theta_0)N^{(k)}(\theta_0)<0$. 则存在扇形域 $S(\rho_0,\delta)$，使得(5.1.2)的通过该扇形域内的轨线中至少有一条趋于 O. 进一步，若由(5.1.15)所定义的函数 $\psi(\rho,\theta)$ 满足条件(5.1.16)和(5.1.17)，则在 $S(\rho_0,\delta)$ 内趋于 O 的轨线唯一.

(d) 我们指出，条件(5.1.16)和(5.1.17)难于应用. 下面的定理给出了 $k=1$ 时的一个较易应用的判别准则.

定理 6. 若 θ_0 是方程 $N(\theta)=0$ 的一个单根，且有 $Z(\theta_0)N'(\theta_0)<0$，又函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 满足不等式

$$\left.\begin{aligned}&|f(\rho\cos\theta_1,\rho\sin\theta_1)-f(\rho\cos\theta_2,\rho\sin\theta_2)|\leqslant K(\rho)|\theta_1-\theta_2|,\\&|g(\rho\cos\theta_1,\rho\sin\theta_1)-g(\rho\cos\theta_2,\rho\sin\theta_2)|\leqslant K(\rho)|\theta_1-\theta_2|.\end{aligned}\right\}\tag{5.1.20}$$

其中 $K(\rho)$ 随 ρ 趋于零时是 ρ 的高于 m 级的无穷小(m 为 X_m，Y_m 的次数)，且它对某个 ρ_0 及 $\delta>0$，在 $0<\rho\leqslant\rho_0$，$|\theta_i-\theta_0|<\delta(i=1,2)$ 内有定义. 则在扇形域 $S(\rho_0,\delta)$ 内，§1.1 中的系统(5.1.2)的趋于 O 的轨线唯一.

为证此定理，只需指出，在本定理的条件下，定理 5 中诸条件都成立，其中的 $L(\rho)=0$.

若以 f_1 代替 $f(\rho\cos\theta_1,\rho\sin\theta_1)$ 等等. 由(5.1.15)，我们有以下恒等式

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1-\psi_2}{\theta_1-\theta_2}=P_{1,2}\Bigg[\frac{N_1-N_2}{\theta_1-\theta_2}Z_1+\Bigg\{&-N_1\frac{Z_1-Z_2}{\theta_1-\theta_2}+\Delta_1\frac{N_1-N_2}{\theta_1-\theta_2}\\&-N_1\frac{\Delta_1-\Delta_2}{\theta_1-\theta_2}+Z_1\frac{E_1-E_2}{\theta_1-\theta_2}-E_1\frac{Z_1-Z_2}{\theta_1-\theta_2}\\&+\Delta_2\frac{E_1-E_2}{\theta_1-\theta_2}-E_2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{\theta_1-\theta_2}\Bigg\}\Bigg],\end{aligned}$$

其中 $P_{1,2}=(Z_1+\Delta_1)^{-1}(Z_2+\Delta_2)^{-1}$.

若 ρ_0 充分地小，则 $P_{1,2}$ 的符号与 $Z_1^{-1}Z_2^{-1}$ 的相同，故为正.

现在指出:

(1) N_1 可任意接近于 $N(\theta_0)$; (2) N 和 Z 是 θ 的 Lipschitz 函数; (3) 由 (5.1.4), Δ_1 与 E_1 随 ρ 一起而成为无穷小; (4) 由 (5.1.20),比式 $(\Delta_1-\Delta_2)/(\theta_1-\theta_2)$ 和 $(E_1-E_2)/(\theta_1-\theta_2)$ 也随 ρ 而成为无穷小.

由此可知,取 ρ_0 与 δ 充分小,可设{ }内的表达式的绝对值在整个扇形域 $S(\rho_0, \delta)$ 内小于任意正数.另一方面,

$$(N_1-N_2)/(\theta_1-\theta_2)=N'(\theta_0)+O(\theta_1-\theta_2)+O(\theta_2-\theta_0),$$

又因为当 $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$ 时 $|Z(\theta)|$ 大于一正数,且 $N'(\theta_0)\cdot Z(\theta_0)<0$,故对 $|\theta-\theta_0|\leqslant\delta$ 有 $Z_1(N_1-N_2)/(\theta_1-\theta_2)<0$. 因此,在 $S(\rho_0, \delta)$ 内 $(\psi_1-\psi_2)/(\theta_1-\theta_2)$ 为负.

(e) 显然,定理 6 的条件对于解析系统来说是满足的(第二章 §3),这时我们有

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)=\rho^{m+1}f_{m+1}(\theta)+\rho^{m+2}f_{m+2}(\theta)+\cdots,$$

$$g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)=\rho^{m+1}g_{m+1}(\theta)+\rho^{m+2}g_{m+2}(\theta)+\cdots.$$

然而,这并不意味着现在不可能存在非唯一性的一般情形的第二类扇形域(第四章定理 30, II). 回想一下,我们在这一节的开始时曾假设了 X_m 与 Y_m 没有公因子(§1.1).如果没有这一假定,就可能出现非唯一性,这可由下面的例子看出 (M. Frommer[1] 第 266

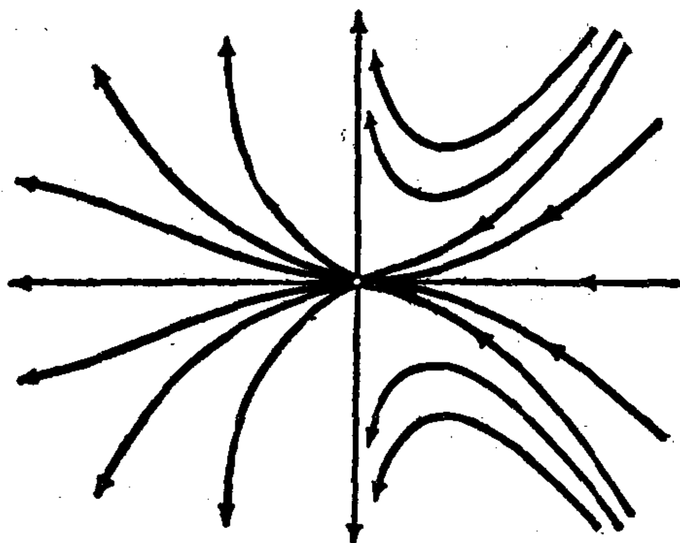


图 77

页)，系统

$$\dot{x}=-x^6,\quad \dot{y}=y^3-x^4y$$

(其中 $X_m=X_3=0$，$Y_m=Y_3=y^3$)，其轨线如图 77 所示.

6. 第三类正规扇形域. 第二判定问题

(a) 剩下来要分析 θ_0 是 $N(\theta)$ 的 k 重零点，k 为偶数的情形. 这时射线 $\theta=\theta_0$ 是系统(5.1.1)的第三类正规角域的角平分线. 因此，它是(5.1.1)，从而也是(5.1.2)的第三类正规扇形域 $S(\rho_0,\delta)$ 的角平分线. 但是，当 (5.1.1) 肯定有一条趋于 O 的轨线(不变射线)时，而对 (5.1.2) 却未必肯定有. 事实上，我们在 (d) 的例子中将看到，对于 (5.1.2)，可能没有一条轨线通过 $S(\rho_0,\delta)$ 而趋于 O(第四章定理 30，III).

现在我们面临着另一个不同于前面已考虑过的判定问题. 前面的问题是唯一性问题，这里是存在性问题. 我们仍象前面一样，在 ρ，θ 平面上考察扇形 $S(\rho_0,\delta)$ 的象. 这时有如图 78 (a) 与 (b) 的两种形状. 它们分别对应于双曲情形(无轨线趋于 O)和存在趋于 O 的轨线的一般情形.

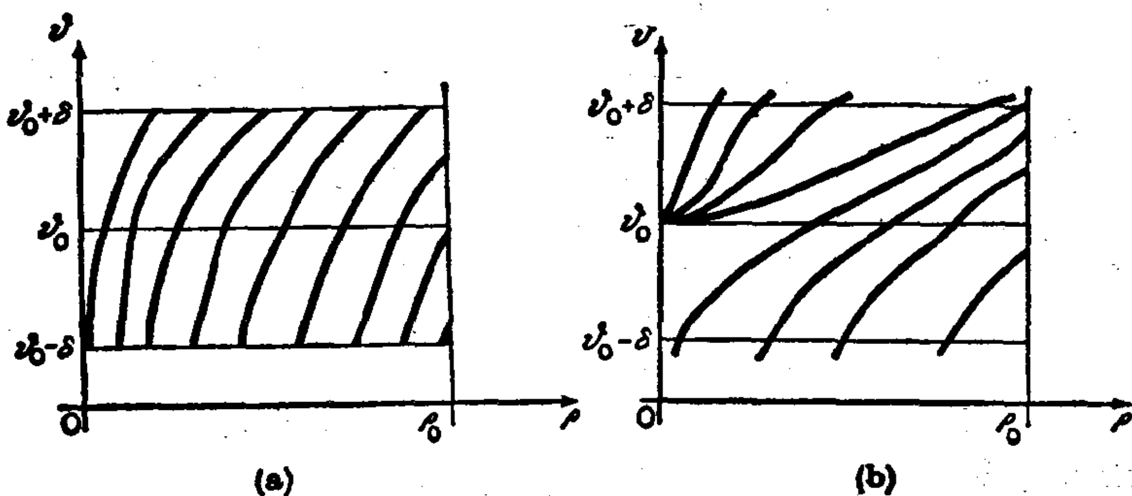


图 78

参照 O. Perron 的比较定理 (G. Sansone [1] 第 106 页)，我们看到，若存在定义于 $S(\rho_0,\delta)$ 的函数 $\psi_1(\rho,\theta)$，使得 $\psi_1(\rho,\theta)\leqslant\psi(\rho,\theta)$，其中 $\psi(\rho,\theta)$ 由 (5.1.15) 定义，且方程 $\rho d\theta/$

$d\rho = \phi_1(\rho, \theta)$ 没有当 $\rho \to 0^+$ 时趋于 θ_0 的解，则将出现双曲情形．另一方面，若存在定义于 $S(\rho_0, \delta)$ 的函数 $\phi_2(\rho, \theta)$，使得 $\phi(\rho, \theta) \leqslant \phi_2(\rho, \theta)$，且方程 $\rho d\theta/d\rho = \phi_2(\rho, \theta)$ 至少有一个当 $\rho \to 0^+$ 时趋于 θ_0 的解．则存在趋于 O 的轨线的一般情形．

(b) 刚才所举出的准则是很一般的，但也难于应用．不过可以从它推导出比较易于应用的准则．

改 t 为 $-t$，总可把问题化为以下两种情况之一：

$$Z(\theta_0) > 0,\ N^{(k)}(\theta_0) > 0; \tag{5.1.21}$$

或者 $Z(\theta_0) > 0$，$N^{(k)}(\theta_0) < 0$．但由于在这两种情况，扇形域中的图象互相对称(第二章 §2)，因此只需考虑情况 (5.1.21)．从而，我们有如下的定理(见 E. R. Lonn [2])：

定理 7. 设 θ_0 是方程 $N(\theta) = 0$ 的 k 重根，k 为偶数，且假定条件 (5.1.21) 满足．若令

$$A(\rho) = |\log \rho|^{-k/(k-1)},$$

$$D = (Z(\theta_0)/k)^{k/(k-1)}[N^{(k)}(\theta_0)(k-1)/k!]^{-1/(k-1)},$$

又设函数 $E(\rho, \theta)$ 在适当的扇形 $S(\rho_0, \delta)$: $\rho \leqslant \rho_0$, $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$ 内满足条件

$$E(\rho, \theta) \leqslant C_1 A(\rho),\ 0 < C_1 < D, \tag{5.1.22}$$

则在此扇形域内，(5.1.2) 至少有一条趋于 O 的轨线；另一方面，若 $E(\rho, \theta)$ 满足条件

$$E(\rho, \theta) \geqslant C_2 A(\rho),\ C_2 > D(>0), \tag{5.1.23}$$

则在此扇形域内 (5.1.2) 没有趋于 O 的轨线．

为了证明这一定理，我们指出，由于

$$Z(\theta) = Z(\theta_0) + o(|\theta - \theta_0|),$$

$$N(\theta) = N^{(k)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^k/k! + o(|\theta - \theta_0|^k),$$

存在 $\sigma > 0$，使得只要 ρ_0 与 δ 充分地小，就有

$$\rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{N(\theta) + E(\rho, \theta)}{Z(\theta) + \Delta(\rho, \theta)}$$

$$< \frac{N^{(k)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^k/k! + E(\rho, \theta)}{Z(\theta_0)}(1 + \sigma).$$

由 (5.1.22)，这时优方程 $\rho d\theta/d\rho = \psi_2$ 是

$$\rho d\theta/d\rho = L(\theta - \theta_0)^k + M(\rho), \qquad (5.1.24)$$

其中 k 为偶数，$L > 0$。

若取 $A(\rho)$ 为定理所述的形式，则 E. R. Lonn [2] 证明了 $M(\rho)$ 将使 (5.1.24) 有趋于 θ_0 的解 $\theta(\rho_0)$，从而方程 $\rho d\rho/d\theta = \psi$ 也有趋于 θ_0 的解.

但也存在 σ'，$0 < \sigma' < 1$，使得只要 ρ_0 与 δ 充分地小，总有

$$\rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{N(\theta) + E(\rho, \theta)}{Z(\theta) + \Delta(\rho, \theta)}$$

$$> \frac{N^{(k)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^k/k! + E(\rho, \theta)}{Z(\theta_0)}(1 - \sigma').$$

于是由 (5.1.23)，我们有形如 (5.1.24) 的方程，这时它是劣方程 ($\rho d\theta/d\rho = \psi_1$)。若 $A(\rho)$ 如上所述，则 $M(\rho)$ 将使方程(5.1.24) 没有趋于 θ_0 的解 $\theta(\rho)$，从而 $\rho d\theta/d\rho = \psi$ 也没有趋于 θ_0 的解 (见 E. R. Lonn[2])。

(c) E. R. Lonn 的条件(也可参看 H. Forster [1] 的相类似的条件)被 M. Hukuhara 大大地改进了，他得到了使形如(5.1.24) 的方程当 $\rho \to 0+$ 时有 (正) 解趋于 θ_0 的充分必要条件 (见 M. Hukuhara [1])。

(d) 系统

$$\dot{x} = x - y(\log\rho)^{-2}, \quad \dot{y} = x + y, \quad (\rho^2 = x^2 + y^2)$$

以原点 O 为其不稳定焦点，仅以半轴 $x = 0$，$y \leqslant 0$，($\theta_0 = \pm\pi/2$) 为例外方向.

其中每一个例外方向是一个第三类正规扇形域的平分角线，在该域中都不含趋于 O 的轨线．这可借助于定理 7 的第二部分看出，其中

$$\theta_0 = \pm\pi/2, \quad A(\rho) = (\log\rho)^{-2},$$

$$Z(\pm\pi/2) = \frac{1}{2}N''(\pm\pi/2) = 1, \quad D = 1/4.$$

为使

$$E(\rho,\theta) = \sin^2\theta(\log\rho)^{-2} \geqslant \frac{1}{2}(\log\rho)^{-2*)},$$

只须取 $\sin^2\theta > 1/2$，即取 $\delta = \pi/4$ 即可。

与这个系统对应的简化系统 $\dot{x} = x$，$\dot{y} = x + y$ 以原点为单切结点.

7. $N(\theta)$ 恒等于零的情形

当(5.1.2)的右端为解析函数时，对 $N(\theta)$ 恒等于零的情况我们已作了广泛的讨论（第二章 §2），在那里自然假定 X_m，Y_m 为 m 次齐次多项式，现在只保持这最后的假定，而让 f，g 满足 §1.1 的条件(5.1.4).

我们回忆一下（第二章 § 2），由于 $N(\theta)$ 恒等于零，X_m，Y_m 可写为 $X_m(x,y) = xA_{m-1}(x,y)$，$Y_m(x,y) = yA_{m-1}(x,y)$，其中 $A_{m-1}(x,y)$ 是 $m-1$ 次齐次多项式，它对 $\rho > 0$ 符号不变.

为确定起见，假定对 $\rho > 0$，有 $A_{m-1}(x,y) > 0$. (5.1.2)的轨线与系统 $\dot{x} = x + F(x,y)$，$\dot{y} = y + G(x,y)$ 的轨线相同，由(5.1.4)，$F = f/A_{m-1}$，$G = g/A_{m-1}$ 满足

$$\lim_{\rho\to 0+} F(x,y)\rho^{-1} = \lim_{\rho\to 0+} G(x,y)\rho^{-1} = 0. \qquad (5.1.25)$$

因此，若 $A_{m-1} > 0$，则(5.1.2)在 O 点邻域内的轨线的性态可由系统 $\dot{x} = x$，$\dot{y} = y$ 的性态推得，后者以 O 为不稳定星形结点.

换句话说，我们势必要考虑 $m = 1$ 的情形，这在 § 2 中将予以讨论.

但是，只有假设(5.1.25)并不足以保证点 O 对(5.1.2)也是星形结点. 这可由下面的例子看出. 系统 $\dot{x}=x$，$\dot{y}=y+x\cos\log|x|/\log|x|$ 已在第四章 §3 遇见过了. 或者例如系统（见 O. Perron[1] 第 128 页）

$$\dot{x} = x - y/\log\rho,\quad \dot{y} = y + x/\log\rho,\quad (\rho^2 = x^2 + y^2),$$

---

*) 原书这段有计算错误，现已改正. ——译者注

其轨线是螺线 $\rho=\rho_0 e^t,\ \theta=\theta_0+\log(\log\rho_0+t),\ t>-\log\rho_0$，原点是焦点．

8. 一些说明

这一节进行的分析有其明显的局限性，对于 $N(\theta)$ 不恒等于零，但有无穷多个零根，从而有非孤立根的情况未加讨论．此外，当 $X_m,\ Y_m$ 有实公因子时，系统 (5.1.2) 在原点 O 的性态也未进行分析，其特殊情况 $(m=1)$ 将在§4 中进行研究．

§2. C^1 类系统的孤立奇点．初等奇点

1. 引言

这一节我们将着手研究系统

$$\dot{x}=X(x,y),\quad \dot{y}=Y(x,y) \tag{5.2.1}$$

的孤立奇点．这时，假设 X,Y 是 C^1 类函数，亦即它们在这奇点的邻域内有连续偏导数 $X_x,\ X_y,\ Y_x,\ Y_y$．

不失一般性，可设此奇点为 O．因此，系统 (5.2.1) 可写为形式

$$\dot{x}=X_x^0x+X_y^0y+f(x,y),\quad \dot{y}=Y_x^0x+Y_y^0y+g(x,y), \tag{5.2.2}$$

其中 $X_x^0,\ X_y^0,\ Y_x^0,\ Y_y^0$ 为 X,Y 的各偏导数在 O 点的值，而 $f(x,y),\ g(x,y)$ 也是 C^1 类函数．从而，在 O 的邻域内它们有连续的偏导数．此外，在点 O 应有

$$\begin{aligned} f(0,0)=g(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)\\ =g_x(0,0)=g_y(0,0)=0. \end{aligned}$$

进一步，假设存在 $r>0$，使得对 $0<x^2+y^2<r^2$ 有

$$(X_x^0x+X_y^0y+f(x,y))^2+(Y_x^0x+Y_y^0y+g(x,y))^2>0, \tag{5.2.3}$$

亦即 O 是一个孤立奇点．

这一节我们讨论所谓**初等奇点** O，即在这种点处

$$\Omega^0=X_x^0Y_y^0-X_y^0Y_x^0\neq 0. \tag{5.2.4}$$

在§4，我们将讨论**非初等奇点**，即在那些点处 $\Omega^0=0$．

除 Ω^0 以外，我们还将用到

$$I^0 = X_x^0 + Y_y^0.$$

如同我们在第二章§1已经看到的，非退化变换（x, y 平面中的仿射变换）将不改变(5.2.2)轨线图形的性态，并且(5.2.2)经变换后的系统其右端仍是 C^1 类函数. 因此我们可以假设其线性部分已化为第二章§1中所导出的几种标准形式之一.

2. 焦点与弱焦点

(a) 由 X, Y 所满足的，从而 f, g 也满足的假设可推知

$$\lim_{\rho\to 0} f(x, y)/\rho = \lim_{\rho\to 0} g(x, y)/\rho = 0. \tag{5.2.5}$$

因此，由定理1和定理2得下面定理的第一部分：

定理 8. 若 $(I^0)^2 - 4\Omega^0 < 0$，且 $I^0 < 0\ [> 0]$，又点 O 是简化系统

$$\dot{x} = X_x^0 x + X_y^0 y,\quad \dot{y} = Y_x^0 x + Y_y^0 y \tag{5.2.2′}$$

的稳定[不稳定]焦点，则 O 也是系统(5.2.2)的稳定[不稳定]焦点. 但若 $(I^0)^2 - 4\Omega^0 < 0$，而 $I^0 = 0$，则简化系统的中心 O，对(5.2.2)来说，可能是焦点(稳定的或不稳定的)，也可能是中心-焦点或者中心.

然而，若 $(I^0)^2 - 4\Omega^0 < 0$，$I^0 = 0$，且在 O 点的邻域(O 本身除外)内有

$$H = (X_x^0 x + X_y^0 y)g(x, y) - (Y_x^0 x + Y_y^0 y)f(x, y) \neq 0, \tag{5.2.6}$$

则 O 一定是(5.2.2)的焦点.

定理第二部分的证明如下(见 O. Perron [1], Satz IX)：

若以 $Y_x^0 x + Y_y^0 y$ 乘(5.2.2)的第一个方程，$X_x^0 x + X_y^0 y$ 乘第二个方程，并将所得的方程对应项相减，得 $d[X_y^0 y^2 + 2X_x^0 xy - Y_x^0 x^2]/dt = 2H$*). 由(5.2.6)，方括号内的表达式沿着 O 的邻域内的每一条轨线弧是 t 的单调函数. 因此，这样的邻域内就不可能存在(5.2.2)的环，从而 O 不可能是中心焦点或中心.

---

*) 原书该式有错. ——译者注

若对点O有$(I^0)^2-4\Omega^0<0$，$I^0=0$，则称O为系统(5.2.2)的弱焦点.我们已经看到，弱焦点可以是焦点，也可以是中心-焦点或者是中心点.

(b) 我们指出，如果只假定$f(x,y)$，$g(x,y)$满足(5.2.2)，且它们在O的邻域内连续，并保证(5.2.2)解的唯一性，则定理8仍然成立.

3. 吸引点.星形结点

(a) 在这一节的以下各段，将研究$(I^0)^2-4\Omega^0\geqslant 0$的情况，为此考虑如下的定义是有用的(见 A. Wintner [1].该文中的定义仅在f，g连续且满足本书的(5.2.5)的假设下给出的).

定义. 我们说点O是(5.2.2)的吸引点，如果存在以O为圆心，r为半径的圆$C(O,r)$，使得通过其中每一点P的(5.2.2)的轨线γ_P，当$t\to+\infty$或$t\to-\infty$时都趋于O. 例如，线性系统的结点，焦点都是吸引点.

现在我们可以证明:

定理 9. 若对系统(5.2.2)，$X_x^0=Y_y^0\neq 0$，$X_y^0=Y_x^0=0$，从而$(I^0)^2-4\Omega^0=(X_x^0-Y_y^0)^2=0$，即$O$是简化系统(5.2.2′)的星形结点，则$O$是(5.2.2)的吸引点.

在§1.1中曾对$m\geqslant 1$引入了记号Δ，E. 现在记($m=1$)

$$\left.\begin{aligned}\Delta(\rho,\theta)&=[f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta+g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta]\rho^{-1},\\E(\rho,\theta)&=[g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta-f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta]\rho^{-1}.\end{aligned}\right\}\tag{5.2.7}$$

改为极坐标，在现在的假设下，系统(5.2.2)可以写为

$$\dot\rho=\rho[\lambda+\Delta(\rho,\theta)],\quad \dot\theta=E(\rho,\theta),\quad \lambda=X_x^0=Y_y^0\tag{5.2.8}$$

但由(5.2.5)，存在$r>0$，使得在$C(O,r)$内，$|\Delta(\rho,\theta)|\leqslant|\lambda|/2$，从而$\lambda-|\lambda|/2\leqslant\dot\rho/\rho\leqslant\lambda+|\lambda|/2$. 积分后，可得$\rho(0)\exp[(\lambda-|\lambda|/2)t]\leqslant\rho(t)\leqslant\rho(0)\exp[(\lambda+|\lambda|/2)t]$.由此得知，通过$C(O,r)$内的一切轨线当$\lambda<0$，$t\to+\infty$或当$\lambda>0$，$t\to-\infty$时都趋于$O$.

(b) 在定理 9 的假设下，趋于 O 的轨线的切线有可能不趋于确定的方向(如§ 1.7 的例子所示).

称 O 为 (5.2.2) 的星形结点，如果它是吸引点，且：(1) 每一条趋于 O 的轨线都沿着确定的方向；(2) 对每一条过 O 的射线，相应地只有一条轨线沿着此方向趋于 O. 上面的例子说明，简化系统(5.2.2′)的星形结点并不一定是(5.2.2)的星形结点.

如果 f, g 是解析函数，则当 O 是简化系统的星形结点时，它也一定是(5.2.2)的星形结点 (第二章§ 3.6(c)). 看上去对 f, g 还要加上另外的条件，才能保证在 O 点，这两个系统具有相同的性态. 下面的定理将指出这一点.

定理 10. 若定理 9 的条件满足，且存在 $\alpha > 0$，使得

$$\lim_{\rho\to 0} f(x, y)/\rho^{1+\alpha} = \lim_{\rho\to 0} g(x, y)/\rho^{1+\alpha} = 0, \qquad (5.2.9)$$

$$(\rho^2 = x^2 + y^2)$$

则 O 是 (5.2.2) 的星形结点.

让我们再次考虑系统 (5.2.8). 由于在 $C(O, r)$ 内 $\dot\rho$ 与 λ 具有相同的符号，在 $C(O, r)$ 中的轨线可以由方程 $\rho d\theta/d\rho = E(\rho, \theta)/[\lambda + \Delta(\rho, \theta)]$ 的解 $\theta(\rho)$ 来表示. 若引入新变量 $\sigma = \rho^\alpha$，则此方程化为

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{\alpha}\frac{E(\sigma^{1/\alpha}, \theta)}{\sigma}\cdot\frac{1}{\lambda + \Delta(\sigma^{1/\alpha}, \theta)}. \qquad (5.2.10)$$

由(5.2.9)，上述方程的右端是 σ, θ 的连续函数，即使 $\sigma = 0$ 也如此.

此外，由于 f 与 g 的偏导数在 O 的邻域内有界，故存在常数 $L > 0$，使得对 $0 \leqslant \sigma \leqslant r^\alpha$ 和任一对 θ_1, θ_2，有

$$|f(\sigma^{1/\alpha}\cos\theta_1, \sigma^{1/\alpha}\sin\theta_1) - f(\sigma^{1/\alpha}\cos\theta_2, \sigma^{1/\alpha}\sin\theta_2)| \leqslant L|\theta_1 - \theta_2|,$$

对 g 类似.

由 (5.2.7) 得知，(5.2.10) 的右端对 $0 \leqslant \sigma \leqslant r^\alpha$ 是 θ 的 Lipschitz 函数，故对每一固定的 $\bar\theta$，(5.2.10) 对应地恰有一个定义在 $0 \leqslant \sigma \leqslant r^\alpha$ 上，且满足 $\theta(0) = \bar\theta$ 的解，这就证明了本定理.

(c) 下面的定理给出了比定理 10 更为一般的结果，我们仅予

叙述而不加证明(见 G. Hoheisel [1]; E. R. Lonn [2] 第525—528页，这定理的证明也可参看 Coddington-Levinson [1] 第378页).

定理 11. 若定理9的假设满足,又 $|f(x, y)|$, $|g(x, y)| \leqslant \phi(\rho)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, 其中 $\phi(\rho)$ 在 $0 \leqslant r \leqslant r_0$ 内连续，且使得

$$\lim_{\rho \to 0} \phi(\rho)/\rho = 0, \int_0^{r_0} \frac{\phi(\rho)}{\rho^2} d\rho < +\infty,$$

则 O 是 (5.2.2) 的星形结点.

在定理 11 中取 $\phi(\rho) = C\rho^{1+\alpha}$, 即得定理 10，其中 C 为常数.

4. 单切结点

(a) 要对 (5.2.2) 的初等奇点继续进行分析,现在就必须考察情况 $(I^0)^2 - 4\Omega^0 = 0$, $(X_y^0)^2 + (Y_x^0)^2 > 0$. 此时点 O 是简化系统 (5.2.2′) 的单切结点(第二章§1).

经非退化仿射变换，(5.2.2′) 可化为标准型 $\dot{x} = \lambda x + \lambda y$, $\dot{y} = \lambda y$, $\lambda \neq 0$. 用同一变换,系统 (5.2.2) 化为

$$\dot{x} = \lambda x + \lambda y + f(x, y), \quad \dot{y} = \lambda y + g(x, y). \qquad (5.2.11)$$

当然，这里出现的 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 一般不同于 (5.2.2) 中的 $f(x, y)$, $g(x, y)$. 但是,正如§2.1末尾所指出的，它们彼此具有相同的可微性. 利用方程(5.2.11),就可以证明下面的定理.

定理 12. 若 $\Omega^0 \neq 0$, $(I^0)^2 - 4\Omega^0 = 0$, $(X_y^0)^2 + (Y_x^0)^2 > 0$, 从而 O 是简化系统 (5.2.2′) 的单切结点，则 O 是 (5.2.2) 的吸引点.

引入极坐标,系统(5.2.11)可以写为

$$\dot{\rho} = \rho\left[\lambda + \frac{\lambda}{2}\sin 2\theta + \Delta(\rho, \theta)\right], \quad \dot{\theta} = -\lambda \sin^2\theta + E(\rho, \theta). \qquad (5.2.12)$$

由(5.2.5),存在 $r > 0$, 使得在 $C(O, r)$ 内有 $|\Delta(\rho, \theta)| \leqslant |\lambda|/4$,

故在 $C(O, r)$ 内有

$$\lambda - 3|\lambda|/4 \leqslant \dot{\rho}/\rho \leqslant \lambda + 3|\lambda|/4. \tag{5.2.13}$$

从 0 到 t 积分上式,得知,若 $\lambda < 0$, 则当 $t \to +\infty$ 时 $\rho(t) \to 0$, 若 $\lambda > 0$, 则当 $t \to -\infty$ 时 $\rho(t) \to 0$.

(b) 称 O 为 (5.2.2) 的单切结点,如果它是吸引点, 且所有趋于 O 的轨线其切线都趋于从原点出发的具相反方向的两射之一. 现在必须确定,在上面的定理中应再加上什么条件,才能保证当 O 是(5.2.2′)的单切结点时,它也是(5.2.2)的单切结点.

§1.6(d) 中的例子(交换一下 x, y)说明某些附加条件是必需的. 对此,我们来证明下面的定理:

(更一般的准则是由 E. R. Lonn [1] 给出的).

定理 13. 若定理 12 的假设满足, 另外, 存在 $\alpha > 0$, 使得 (5.2.9) 成立,则 O 也是 (5.2.2) 的单切结点.

回忆定理 12 的证明, 直线 $x = 0$ 将 $C(O, r)$ 分成两个扇形域, 它们都是 (5.2.11) 以及对应的简化系统的第三类正规扇形域(定理 3).

现在考虑扇形域 $|\theta| < \pi/2$. 我们指出, 在该域内, (5.2.11) 有无穷多条轨线趋于 O, 它们的切线必趋于属于该扇形域中的唯一例外方向, 即射线 $\theta = 0$. 我们的分析归结为解第二判定问题(§1.6). 对此, 只须注意,由于存在常数 $M > 0$, 使得 $E(\rho, \theta) \leqslant M\rho^{\alpha}$, 故该定理(指定理 7——译者注)的第一部分的条件满足,对第二个扇形域也用这定理,本定理得证.

5. 双切结点

我们说 O 是系统 (5.2.2) 的双切结点,如果 (1) 它是吸引点; (2) 有两条趋于 O 的轨线, 它们的定向切线趋于从 O 出发的具相反方向的两条射线(孤立轨线); (3) 通过 $C(O, r)$ 内的所有其它轨线都趋于 O, 它们的切线都趋于从 O 出发的另外两条具相反方向的射线中的一条.

于是,我们有如下定理:

定理 14. 若 $(I^0)^2 > 4\Omega^0 > 0$，从而 O 是简化系统 (5.2.2′) 的双切结点，则 O 也是 (5.2.2) 的双切结点，且 (5.2.2) 的两条孤立轨线趋于对应的简化系统的两条孤立射线.

可以假定，系统(5.2.2)已写为标准型：

$$\dot{x} = \lambda x + f(x, y), \quad \dot{y} = \mu y + g(x, y). \qquad (5.2.14)$$

为确定起见，设 $\mu < \lambda < 0$. 于是简化系统分别以半轴 $x = 0$, $y \leqslant 0$ 为孤立轨线 (第二章§1).

如果引入极坐标，则立刻看到，从 $C(O, r)$ 内出发的所有轨线，当 r 充分小时有 $3\mu/2 \leqslant \dot{\rho}/\rho \leqslant \lambda/2$，从而 O 是吸引点.

用直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 将 $C(O, r)$ 分为四个扇形域，我们可以只考虑其中的两个，即 $3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$ 和 $5\pi/4 < \theta < 7\pi/4$. 其中第一个是简化系统的，从而也是 (5.2.14) 的第一类正规角域，通过其中的轨线沿半轴 $y = 0$, $x < 0$ 趋于 O. 第二个扇形域是简化系统的，从而也是(5.2.14)的第二类正规角域. 要完成这定理的证明，现在只需指出，在这扇形域中只有一条轨线趋于 O.

假定存在两条，则对充分大的 t，可将这两条轨线表示为

$$x = x_1(y), \quad x = x_2(y).$$

于是，由(5.2.14)，$x(y) = x_1(y) - x_2(y)$ 满足

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{\lambda x(y) + [f(x_1(y), y) - f(x_2(y), y)]}{\mu y + g(x_1(y), y)} + \frac{[\lambda x_2(y) + f(x_2(y), y)][g(x_2(y), y) - g(x_1(y), y)]}{[\mu y + g(x_1(y), y)][\mu y + g(x_2(y), y)]}. \qquad (5.2.15)$$

由唯一性定理，对任何 y，$x(y) \neq 0$，于是对一切 y，可设 $x(y) > 0$. 此外，当 $y \to 0$ 时，$x(y)/y = [x_1(y) - x_2(y)]/y \to 0$.

因为

$$f(x_1(y), y) - f(x_2(y), y) = f_x(\tilde{x}_1(y), y)x(y),$$

$$x_2(y) < \tilde{x}_1(y) < x_1(y),$$

$$g(x_1(y), y) - g(x_2(y), y) = g_x(\tilde{x}_2(y), y)x(y),$$
$$x_2(y) < \tilde{x}_2(y) < x_1(y),$$
且由于当 $\rho \to 0$ 时 $f_x, g_x \to 0$，故由 (5.2.15) 得知

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{\lambda x(y)}{\mu y}(1 + \varepsilon(y)),\ \varepsilon(y) \to 0,\ 当\ y \to 0.$$

因此，若 y 充分小，则当 $\gamma < \lambda/\mu$ 时 $yx^{-1}dx/dy < \gamma < 1$. 故 $x(y)/y > c_1 y^{\gamma-1}$, $c_1 > 0$ 为常数，于是，当 $y \to 0$ 时 $x(y)/y \to +\infty$，而这是不可能的.

6. 鞍点

(a) 要完成对 (5.2.2) 的初等奇点的分析，现在只需考虑 $\Omega^0 < 0$ 的情形，这时 O 是简化系统的鞍点. 点 O 称为 (5.2.2) 的**鞍点**，如果：(1) 当 $t \to +\infty$ 时有两条轨线趋于 O，它们的切线趋于过原点的方向相反的两条射线；(2) 当 $t \to -\infty$ 时有两条轨线趋于 O，其切线趋于两条方向相反的射线，但它们异于 (1) 中所指的两条射线的任一条；(3) 存在 r_0，使得对 $0 < r < r_0$ 中的一切 r，通过 $C(O, r)$ 内的所有轨线皆为双曲型的，即它们在 $C(O, r)$ 内只停留有限时间. 换句话说，在 O 的邻域内有双曲轨线*)（第四章 §3.2）. 把区域分成四个双曲轨线区域的曲线叫做**分界线**（参看第四章 §4.3(c) 中推广意义下鞍点的定义）.

与定理 14 的证明方法相同，可证：

定理 15. 若 $4\Omega^0 \leqslant 0 \leqslant (I^0)^2$**)，于是 O 是简化系统 (5.2.2′) 的鞍点，则它也是 (5.2.2) 的鞍点，其分界线对应地趋于简化系统的四条分界线.

(b) 我们指出，若 f, g 在 O 点不可求导，则 O 可以是简化系统的鞍点，但不是 (5.2.2) 的鞍点，这可以从 §1.5(a) 的例子看出. 但是，如果我们仅仅要求 O 是推广意义下的鞍点（见第四章 § 4），则有比定理 15 更为一般的充分条件（看 S. K. Zaremba [1]）.

---

*) 原书误为抛物轨线. ——译者注

**) 原书为 $\Omega^0 \leqslant 0 \leqslant (I^0)^2$. ——译者注

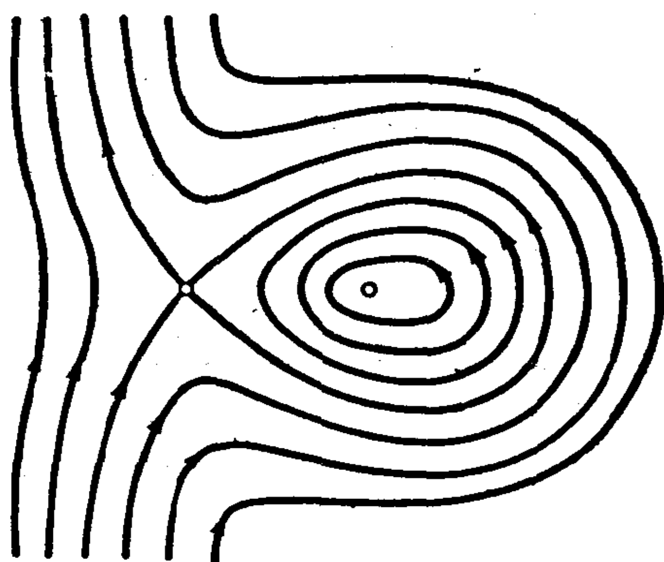


图 79

(c) 我们还得指出，(5.2.2) 的同一条轨线既可作为当 $t\to+\infty$ 时趋于O的分界线，又可作为当 $t\to-\infty$ 时趋于O的分界线，这是与线性系统的情况不相同的，这可用下面的例子来加以说明。系统

$$\dot{x}=x-3y^2,\ \dot{y}=-y+3x^2$$

的轨线是三次曲线 $x^3+y^3-xy=$ 常数，其性态如图 79 所示。

7. 注

(a) 从这一节的分析我们知道，C^1 类系统 (5.2.2) 的初等奇点属于下面几种类型之一：鞍点，中心-焦点（特殊情况为焦点），吸引点（特别地，它可为焦点、星形结点、单切结点与双切结点）。

若 f,g 为 C^2 类函数，则 (5.2.9) 满足，因此，吸引点只能是焦点或结点。

最后，若 f,g 为解析函数（即在O的邻域内可表为 x,y 的幂级数），则每一中心-焦点都是中心（第二章定理 10）。因此，解析系统的初等奇点只能是中心，焦点，结点，鞍点，这刚好与线性系统一样，这是 Poincaré 的经典结论之一。

(b) 参照第四章定理 41，对 C^1 类系统 (5.2.2) 的初等奇点来说，鞍点的指标是 -1，其它类型奇点的指标是 $+1$。

(c) 由定理 8, 9, 12, 14 得知，若O是简化系统的焦点或结点,从而为吸引点,则它也是 (5.2.2) 的吸引点. 如我们在§ 2.3 中所指出的,吸引点的定义可以仅仅在 f, g 连续且满足 (5.2.5) 的假设下给出. 刚才所提到的结果在这些更一般的假设下也是成立的(见 A. Wintner [1]).

(d) 检查证明的过程,我们发现,关于 f, g 所给的无穷小性质的假设,对星形结点和单切结点来说是相同的,对双切结点和鞍点来说也是相同的.

后两种情况的类似性,在下面§ 3 对双切结点和鞍点进行分析时可以看得更清楚. § 3 的假设与 § 2.1 的假设有明显的差异，不过它们都是属于 C^2 类系统.

§ 2.5 与 § 2.6 对双切结点和鞍点的定义纯属于几何性质， 它们不依赖于对 f 和 g 的假设条件,因此可以将它们推广到§ 3 所讨论的系统中去.

§ 3. H. Weyl 对双切结点和鞍点的渐近性研究[1)]

1. 问题的叙述、记号

(a) 考虑系统

$$\dot{x} = -kx + f(x, y), \quad \dot{y} = -ly + g(x, y) \tag{5.3.1}$$

其中 k, l 为常数, $|k| + |l| > 0$, 且 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 是正方形 $Q(R_0)$: $|x| \leqslant R_0$, $|y| \leqslant R_0$ 内的连续函数，它们在点O都等于零. 以 p 记点 (x, y), $\|p\| = \max(|x|, |y|)$. 因此，$Q(R_0)$ 中的点可由关系式 $\|p\| \leqslant R_0$ 来刻划.

设 $p = (x, y)$, $p^* = (x^*, y^*)$, 定义 $\|p - p^*\| = \max(|x - x^*|, |y - y^*|)$. 又假设在 $[0, R_0]$ 上存在连续函数 $\chi(r)$, 它满足条件:

$$\chi(0) = 0, \ \chi(r) \text{ 在 } [0, R_0] \text{ 内非减}, \tag{5.3.2.1}$$

1) 这节材料参看 H. Weyl [1].

$$\int_0^{R_0} \chi(r)\frac{dr}{r} = \lim_{r\to 0+}\int_r^{R_0} \chi(s)\frac{ds}{s} < +\infty. \qquad (5.3.2.2)$$

又若 $\|p\| \leqslant r$, $\|p^*\| < r$, $(0 < r < R_0)$ 时下列条件成立:

$$|f(p) - f(p^*)|,\ |g(p) - g(p^*)| \leqslant \chi(r)\|p - p^*\|. \quad (5.3.3)$$

(试比较这些假设和定理 11 与定理 12 的假设).

条件(5.3.3)保证了(5.3.1)存在单个解 $p(t) = (x(t), y(t))$, 使得对 $Q(R_0)$ 中的每一点 (x^0, y^0) 有

$$x(0) = x^0,\ y(0) = y^0. \qquad (5.3.4)$$

(b) 系统 (5.3.1) 可以写为

$$d(e^{kt}x)/dt = e^{kt}f(x, y),\ d(e^{lt}y)/dt = e^{lt}g(x, y),$$

并且满足(5.3.4)的解也满足积分方程组

$$\left.\begin{aligned} e^{kt}x(t) &= x^0 + \int_0^t e^{k\tau}f(x(\tau), y(\tau))d\tau, \\ e^{lt}y(t) &= y^0 + \int_0^t e^{l\tau}g(x(\tau), y(\tau))d\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.5)$$

反之亦然.

这里我们要提出来进行研究的问题,是在所给的假设下,系统(5.3.1)或等价系统(5.3.5)的趋于O的解的渐近估值问题.

因此,我们想导出(5.3.1)的轨线与简化系统 $\dot{x} = -kx$, $\dot{y} = -ly$, $k, l \neq 0$ 的轨线关于O有相同性态的定理. 具体地说,当 k 与 l 为同号而不相等时,O 为双切结点;当 k 与 l 异号时 O 为鞍点;对结点情形,不失一般性,可设 $0 < l < k$. 因此,O是稳定结点.

(c) 我们将用逐次逼近法来积分方程组 (5.3.5). 为方便起见,引入下列记号:

(i) 设 (x, y), $(x^*, y^*) \in Q(R_0)$, 定义

$$\Delta x = x - x^*,\ \Delta f = f(x, y) - f(x^*, y^*).$$

类似地定义 Δy, Δg.

(ii) 设 $\{(x_n, y_n)\}$ 为一点列,定义

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1},\ \Delta f_n = f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

类似地定义 Δy_n, Δg_n.

最后，约定

$$x_{-1}=y_{-1}=0,\ f_{-1}=g_{-1}=0. \tag{5.3.6}$$

我们有

$$x_n=\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\Delta x_\nu,\quad y_n=\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\Delta y_\nu.$$

2. 结点情形($0<l<k$). H. Weyl 第一定理

对 $t>0$，我们用以下的递推关系式来定义函数序列$\{x_n(t)\}$，$\{y_n(t)\}$:

$$x_0(t)=x^0e^{-kt},\ y_0(t)=y/e^{-lt}, \tag{5.3.7}$$

$$\left.\begin{aligned}e^{kt}x_n(t)&=x^0+\int_0^t e^{k\tau}f(x_{n-1}(\tau),y_{n-1}(\tau))d\tau,\\ e^{lt}y_n(t)&=y^0+\int_0^t e^{l\tau}g(x_{n-1}(\tau),y_{n-1}(\tau))d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{5.3.8}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

初始点 $p^0=(x^0,y^0)\in Q(r_0)$，$\|p^0\|\leqslant r^0$，其中 r^0 满足下面两个条件

$$0<r_0\leqslant R_0, \tag{5.3.9.1}$$

$$\chi(r_0)/l=Q_0<1, \tag{5.3.9.2}$$

这是可允许的，因为我们假定 $l>0$.

由(5.3.9.2)，当 $r\to 0+$ 时，积分

$$\int_r^{r_0}\frac{1}{l-\chi(r)}\frac{ds}{s}$$

发散. 故式子

$$t=t(r)=\int_r^{r_0}\frac{1}{l-\chi(r)}\frac{ds}{s} \tag{5.3.10}$$

在$(0,r_0]$内定义了一个连续减函数，由于 $l>0$，这个函数把区间$(0,r_0]$映成从$+\infty$到 0 的区间$[0,+\infty)$. 设 $r=r(t)$ 是 $t(r)$的反函数，以关系式

$$r(t)=r_0\rho(t) \tag{5.3.11}$$

定义 $\rho(t)$. 于是，当 t 在$[0,+\infty)$内变化时，$\rho(t)$ 从 1 减少到

0. $\rho(0)=1$, $\rho(+\infty)=0$, $0<\rho(t)\leqslant 1$*).

最后,以关系式

$$\varphi(t)=lt+\log\rho(t) \tag{5.3.12}$$

来定义 $\varphi(t)$.

我们将证明,对 $t\in[0,+\infty)$, $\varphi(t)$ 满足下面两个条件:

$$\varphi(t)\geqslant 0,\ \varphi(t)\leqslant lt. \tag{5.3.13}$$

由于

$$0<\rho(t)\leqslant 1, \tag{5.3.14.1}$$

上面第二个关系式可由第一个得到.

由 (5.3.12), (5.3.11), (5.3.10) 得

$$\dot{\varphi}=l+\dot{r}r^{-1}=l-[l-\chi(r(t))]=\chi(r(t)),$$

$$\dot{\varphi}=\chi(r(t)). \tag{5.3.15}$$

因此, $\varphi(t)$ 是递增的,又因 $\varphi(0)=0$, 即得(5.3.13)的第一式,且

$$\varphi(t)=\int_r^{r_0}\frac{\chi(s)}{l-\chi(s)}\frac{ds}{s}. \tag{5.3.16}$$

由 (5.3.16), 又得

$$lt+\log\rho(t)=\varphi(t)\leqslant\int_r^{r_0}\frac{\chi(r_0)}{l-\chi(r_0)}\frac{ds}{s}$$

$$=\frac{\theta_0}{1-\theta_0}\log\frac{r_0}{r}=\frac{\theta_0}{1-\theta_0}\log\frac{1}{\rho(t)}.$$

因此,

$$\rho(t)\leqslant\exp(-lt(1-\theta_0)). \tag{5.3.14.2}$$

而且,因 $\varphi(t)$ 递增,故有

$$\log\rho(t)\leqslant -lt+\int_r^{r_0}\frac{\chi(s)}{l-\chi(s)}\frac{ds}{s}.$$

由此,若记

$$m=m(r_0)=\int_0^{r_0}\frac{\chi(r)}{l-\chi(r)}\frac{dr}{r},\ M=e^m, \tag{5.3.17}$$

---

*) 原书为 $0\leqslant\rho(t)\leqslant 1$, 下同. ——译者注

则有

$$\rho(t) \leqslant M e^{-lt}. \tag{5.3.14.3}$$

现在，令

$$\Delta p_\nu(t) = \max(|\Delta x_\nu|, |\Delta y_\nu|), \ (\nu = 0, 1, \cdots) \tag{5.3.18}$$

对 $t > 0$，我们将证明有不等式

$$e^{lt}\Delta p_\nu(t) \leqslant \|p^0\|\varphi^\nu(t)/\nu! \ (\nu = 0, 1, \cdots). \tag{5.3.19}$$

对 $\nu = 0$，我们有

$$e^{lt}\Delta p_0(t) = e^{lt}\max(|\Delta x_0|, |\Delta y_0|) \leqslant e^{lt}\max(|x^0|e^{-kt}, |y^0|e^{-lt}) \leqslant \|p^0\|,$$

故(5.3.19)对 $\nu = 0$ 成立．现在按归纳法，假设(5.3.19)对 $\nu = 0, 1, \cdots, n$ 成立，由(5.3.8)得

$$e^{kt}\Delta x_{n+1}(t) = \int_0^t e^{k\tau}\Delta f_n(\tau)d\tau, \quad e^{lt}\Delta y_{n+1}(t) = \int_0^t e^{l\tau}\Delta g_n(\tau)d\tau,$$

因此，

$$e^{kt}|\Delta x_{n+1}(t)| \leqslant \int_0^t e^{k\tau}|\Delta f_n(\tau)|d\tau,$$

$$e^{lt}|\Delta g_{n+1}(t)| \leqslant \int_0^t e^{l\tau}|\Delta g_n(\tau)|d\tau,$$

而由(5.3.3)及(5.3.15)得

$$e^{lt}|\Delta y_{n+1}(t)| \leqslant \int_0^t e^{l\tau}\chi(r(\tau))|\Delta p_n(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant \|p^0\|\int_0^t \frac{\varphi^n(\tau)}{n!}d\varphi(\tau) = \|p^0\|\frac{\varphi^{n+1}(t)}{(n+1)!},$$

$$e^{lt}|\Delta x_{n+1}(t)| \leqslant e^{lt}\int_0^t e^{-k(t-\tau)}\chi(r(\tau))|\Delta p_n(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant e^{lt}\int_0^t e^{-l(t-\tau)}\chi(r(\tau))\cdot|\Delta p_n(\tau)|d\tau$$

$$= \int_0^t e^{l\tau}\chi(r(\tau))|\Delta p_n(\tau)|d\tau \leqslant \|p^0\|\varphi^{n+1}(\tau)/(n+1)!,$$

这就得到了 (5.3.19).

由(5.3.19)，对每一区间 $[0, t]$ 有

$$\|p_\nu(t)\| \leqslant \|p^0\|e^{-lt+\varphi(t)} \leqslant r_0 e^{-lt+\varphi(t)} \leqslant r_0, \ (r = 0, 1, \cdots),$$

因此，由(5.3.7)与(5.3.8)所构成的点 $p_\nu(t)=(x_\nu(t),\ y_\nu(t))$ 属于 $Q(r_0)$.

进一步,在每一区间 $[0,t]$ 上,级数

$$\sum_0^\infty{}_\nu\ \Delta x_\nu,\quad \sum_0^\infty{}_\nu\ \Delta y_\nu$$

都绝对且一致收敛,因此,若记

$$x(t)=\sum_0^\infty{}_\nu\Delta x_\nu(t),\quad y(t)=\sum_0^\infty{}_\nu\Delta y_\nu(t),\qquad (5.3.20)$$

则由于(5.3.8)可以在积分号下取极限，故 $x(t),y(t)$ 满足(5.3.5)，从而也满足系统 (5.3.1).

由(5.3.19)得 $e^{lt}\|p(t)\|\leqslant\|p^0\|e^{\varphi(t)}$，因而由(5.3.12)

$$\|p(t)\|\leqslant\|p^0\|\rho(t).\qquad (5.3.21)$$

为以后引用方便起见，我们将(5.3.14.1),(5.3.14.2),(5.3.14.3) 放在一起

$$0<\rho(t)\leqslant 1,\ \rho(t)<e^{-lt(1-\theta_0)},\ \rho(t)\leqslant Me^{-lt}.\qquad (5.3.14)$$

(b) 现在来作出当初始点变动时,系统 (5.3.1) 的解的变化的一个估计：即可证明,若 $p(t)$, $\tilde{p}(t)$ 是 (5.3.1) 的从 $Q(r_0)$ 内的点 (x^0, y^0), $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0)$ 出发的两个解,记

$$\Delta p(t)=\max(|\tilde{x}(t)-x(t)|,\ |\tilde{y}(t)-y(t)|),$$
$$\Delta p^0=\max(|\tilde{x}^0-x^0|,\ |\tilde{y}^0-y^0|),$$

则有

$$\Delta p(t)\leqslant\Delta p^0\rho(t),\ (t\geqslant 0).\qquad (5.3.22)$$

(5.3.22)是(5.3.21)的推广，后者是前者当 $\tilde{x}^0=\tilde{y}^0=0$ 时的特殊情况.

除了(5.3.5)以外,我们还有

$$\left.\begin{aligned} e^{kt}\tilde{x}(t)&=\tilde{x}^0+\int_0^t e^{k\tau}f(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))d\tau,\\ e^{lt}\tilde{y}(t)&=\tilde{y}^0+\int_0^t e^{l\tau}g(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))d\tau,\end{aligned}\right\}\qquad (5.3.5')$$

对应项相减,得

$$
\left.\begin{aligned}
e^{kt}\Delta x(t) &= \Delta x^0 + \int_0^t e^{k\tau}\Delta f(\tau)d\tau,\\
e^{lt}\Delta y(t) &= \Delta y^0 + \int_0^t e^{l\tau}\Delta g(\tau)d\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.23}
$$

由于 $l<k$，故

$$
e^{lt}|\Delta x(t)| \leqslant |\Delta x^0| + \int_0^t e^{l\tau}|\Delta f(\tau)|d\tau,
$$

$$
e^{lt}|\Delta y(t)| \leqslant |\Delta y^0| + \int_0^t e^{l\tau}|\Delta g(\tau)|d\tau.
$$

因此，再由(5.3.3)得

$$
e^{lt}\Delta p(t) \leqslant \Delta p^0 + \int_0^t \chi(r(\tau))e^{l\tau}\Delta p(\tau)d\tau. \tag{5.3.24}
$$

应用推广的 Gronwall 引理(第一章 § 2.1)，有

$$
e^{lt}\Delta p(t) \leqslant \Delta p^0 \exp\left(\int_0^t \chi(r(\tau))d\tau\right)
$$

或

$$
\begin{aligned}
\Delta p(t) &\leqslant \Delta p^0 \exp\left(\int_0^t \chi(r(\tau))d\tau - lt\right)\\
&= \Delta p^0 \exp(\varphi(t) - lt),
\end{aligned}
$$

利用(5.3.12)即得(5.3.22).

(c) (5.3.14)指出了 $\rho(t)$ 关于 t 的变化情况，现在我们可以断言，当 $t\geqslant 0$ 时 $\Delta p(t)/\rho(t)$ 是 t 的减函数(从而，对应于 $\tilde{p}(t)=0$ 的情况，$\|p(t)\|/\rho(t)$ 也是 t 的减函数).

若 $t>t_1$，则由(5.3.10)我们有

$$
t - t_1 = \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{l-\chi(r)}\frac{dr}{r}.
$$

又由 (5.3.22)，可写为 $\Delta p(t)\leqslant \Delta p^0 r(t)/r_0$，若取 t_1 为初值以代替取 $t=0$，则有

$$
\Delta p(t) \leqslant \Delta p(t_1)r(t)/r_1 = \Delta p(t_1)\rho(t)/\rho(t_1),
$$

这就证明了我们的论断.

(d) 现在来给出

$|e^{lt}x(t) - e^{kt_1}x(t_1)e^{-(k-l)t}|$，$|e^{lt}y(t) - e^{lt_1}y(t_1)|$ 的上界.

用前面的记号

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \Delta x_{\nu} = x_n - x_0 = x_n - x^0 e^{-kt},$$

由此，利用(5.3.19)，有

$$|x_n(t) - x^0 e^{-kt}| \leqslant \sum_{1}^{n}{}_{\nu} |\Delta x_{\nu}| \leqslant \|p^0\| e^{-lt} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \varphi^{\nu}(t)/\nu!,$$

令 $n \to \infty$ 并取极限，对 $y(t)$ 进行类似的计算，就得到

$$|x(t) - x^0 e^{-kt}|,\ |y(t) - y^0 e^{-lt}| \leqslant \|p^0\| e^{-lt}(e^{\varphi(t)} - 1)$$
$$= \|p^0\|[e^{-lt+\varphi(t)} - e^{-lt}].$$

再由(5.3.12)，(5.3.11)，我们有上界

$$|x(t) - x^0 e^{-kt}|,\ |y(t) - y^0 e^{-lt}| \leqslant \|p^0\|[r(t)/r_0 - e^{-lt}]. \tag{5.3.25}$$

如果取 $(x(t_1), y(t_1))$ 为初始点，则由(c)的断言，对 $t \geqslant t_1$，有上界

$$|x(t) - x(t_1)e^{-k(t-t_1)}| \leqslant \|p(t_1)\|[r(t)/r_1 - e^{-l(t-t_1)}],$$

$$|x(t)e^{lt} - e^{kt_1}x(t_1)e^{-(k-l)t}| \leqslant \frac{\|p(t_1)\|}{r_1}[re^{lt} - r_1 e^{lt_1}]$$
$$< \frac{\|p^0\|}{r_0}[re^{lt} - r_1 e^{lt_1}],$$

对 $y(t)$ 可类似地进行计算，故有

$$\begin{aligned}&[x(t)e^{lt} - e^{kt_1}x(t_1)e^{-(k-l)t}],\\ &|y(t)e^{lt} - y(t_1)e^{lt_1}| \leqslant \frac{\|p^0\|}{r_0}[re^{lt} - r_1 e^{lt_1}].\end{aligned} \tag{5.3.25'}$$

但是，由(5.3.11)，(5.3.12)，(5.3.15)．我们有

$$\frac{r}{r_0}e^{lt} = \rho(t)e^{lt} = e^{\varphi(t)} = \exp\left(\int_0^t \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right),$$

$$\frac{r_1}{r_0}e^{lt_1} = \exp\left(\int_0^{t_1} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right).$$

又由(5.3.25′)得

$$|x(t)e^{lt} - e^{kt_1}x(t_1)e^{-(k-l)t}|, \tag{5.3.25''}$$

$$|y(t)e^{lt} - y(t_1)e^{lt_1}| \leqslant \|p^0\|[\exp(\int_0^t \chi(r_0\rho(\tau))d\tau)$$

$$- \exp\left(\int_0^{t_1} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right)],$$

这就是我们所要求的上界.

(c) 现在我们可以证明:

定理 16. (H. Weyl 第一定理) 假设

$$\dot{x} = -kx + f(x, y), \quad \dot{y} = -ly + g(x, y) \tag{5.3.1}$$

满足 § 3.1(a) 中所述的一切条件, 且 $0 < l < k$. 则存在正方形 $Q(r_0)$, 使得 (5.3.1) 的满足初值条件 $x(0) = x^0$, $y(0) = y^0$, $(x^0, y^0) \in R(r_0)$ 的解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 在$[0, +\infty)$内有定义,且满足

$$\lim_{t\to+\infty} e^{lt}x(t) = 0, \tag{5.3.26.1}$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{lt}y(t) = b, \tag{5.3.26.2}$$

其中 b 为有限数.

由(5.3.16)

$$\exp\left(\int_0^t \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right) - \exp\left(\int_0^{t_1} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right)$$
$$= \exp\left(\int_r^{r_0} \frac{\chi(s)}{l-\chi(s)}\frac{ds}{s}\right) - \exp\left(\int_{r_1}^{r_0} \frac{\chi(s)}{l-\chi(s)}\frac{ds}{s}\right),$$

当 $r \to 0$, $r_1 \to 0 (t \to +\infty, t_1 \to +\infty)$ 时,这个差趋于零. 对固定的 $\varepsilon > 0$, 存在 t_1 使得对 $t \geqslant t_1$, 我们有

$$r^0\left[\exp\left(\int_0^t \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right) - \exp\left(\int_0^{t_1} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.3.27}$$

又因 $l < k$, 故存在 $t_0 \geqslant t_1$, 使得对 $t \geqslant t_0$ 有 $e^{kt_1}|x(t_1)|e^{-(k-l)t} < \varepsilon/2$. 于是, 由 (5.3.25″), 对 $t \geqslant t_0$ 有 $e^{lt}|x(t)| < \varepsilon$, 即为 (5.3.26.1).

此外,对任意两个值 t', $t'' > t_1$, 由(5.3.25″)中关于 $y(t)$ 的不等式,有 $|y(t')e^{lt'} - y(t'')e^{lt''}| < \varepsilon$, 由极限存在的 Cauchy 准则,可知 (5.3.26.2) 成立.

3. 关于 $|e^{lt}y(t) - b|$, $|x(t) - x^0e^{-kt}|$ 的上界

在(5.3.25″)的关于 y 的那个式子中,令 $t \to +\infty$, 再改 t_1 为

t，即得

$$|y(t)e^{lt}-b| \leqslant \|p^0\| \left[\exp\left(\int_0^{+\infty} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right) - \exp\left(\int_0^t \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right)\right]. \tag{5.3.28}$$

由 (5.3.17)

$$\exp\left(\int_0^{+\infty} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right) = \exp\left(\int_0^{r_0} \frac{\chi(s)}{l-\chi(s)} \frac{ds}{s}\right) = M,$$

我们有

$$\exp\left(\int_0^{+\infty} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right) - \exp\left(\int_0^t \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right)$$
$$= M\left[1-\exp\left(-\int_t^{+\infty} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau\right)\right] < M\int_t^{+\infty} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau,$$

又由 (5.3.28) 得

$$|y(t)e^{lt}-b| \leqslant \|p^0\| M\int_t^{+\infty} \chi(r_0\rho(\tau))d\tau,$$

由 (5.3.14.3)，$\rho(t) < Me^{-lt}$，于是可得第一个上界

$$|y(t)e^{lt}-b| \leqslant \|p^0\| M\int_t^{+\infty} \chi(r_0Me^{-l\tau})d\tau. \tag{5.3.29.1}$$

至于 $x(t)$，我们指出，由 (5.3.5) 的第一式得

$$|x(t)-x^0e^{-lt}| \leqslant e^{-kt}\int_0^t e^{k\tau}|f(x(\tau), y(\tau))|d\tau,$$

又由 (5.3.21)，(5.3.14.3) 得

$$|f(x(\tau), y(\tau))| \leqslant \chi(r_0\rho(\tau))\|p^0\|\rho(\tau) \leqslant \chi(r_0\rho(t))\|p^0\|Me^{-l\tau}$$
$$\leqslant \chi(r_0Me^{-l\tau})\|p^0\|Me^{-l\tau},$$

于是，我们得到另一个上界

$$|x(t)-x^0e^{-kt}| \leqslant e^{-kt}\|p^0\|M\int_0^t e^{(k-l)\tau}\chi(r_0Me^{-l\tau})d\tau. \tag{5.3.29.2}$$

4. $\chi(r) = Cr^\delta$ 的情形．关于 $|y(t)-be^{-lt}|$，$|x(t)|$ 的上界

现在我们来考虑一个特殊情况 $\chi(r) = Cr^\delta$，$\delta > 0$.

由于 (5.3.9.2)，$\chi(r_0) = l\theta_0$，于是，由 (5.3.17)，我们有

$$M = \exp\left(\int_0^{r_0} \frac{Cr^{\delta-1}}{l - Cr^\delta} dr\right) = (1-\theta_0)^{-1/\delta},$$

或者

$$\begin{aligned}\chi(r_0 M e^{-l\tau}) &= C r_0^\delta M^\delta e^{-l\delta\tau} = C r_0^\delta e^{-l\delta\tau}/(1-\theta_0) \\ &= l\theta_0 e^{-l\delta\tau}/(1-\theta_0),\end{aligned}$$

而由 (5.3.29.1)，得

$$|y(t)e^{lt} - b| \leqslant \|p^0\| M\theta_0 e^{-l\delta t}/\delta(1-\theta_0).$$

最后，记

$$l' = (1+\delta)l, \tag{5.3.30}$$

可得公式

$$|y(t) - be^{-lt}| \leqslant \|p^0\| M \frac{\theta_0}{\delta(1-\theta_0)} e^{-l't}. \tag{5.3.31}$$

类似地，由 (5.3.29.2) 与 (5.3.30)，得

$$\begin{aligned}|x(t) - x^0 e^{-kt}| &\leqslant e^{-kt}\|p^0\| M \frac{l\theta_0}{1-\theta_0} \int_0^t e^{(k-l')\tau} d\tau \\ &= \|p^0\| M \frac{l\theta_0}{1-\theta_0} \frac{e^{-l't} - e^{-kt}}{k - l'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x(t) - x^0 e^{-kt}| &\leqslant \|p^0\| M \frac{l\theta_0}{1-\theta_0} t \\ &\times \int_0^t \exp[-l't\mu - kt(1-\mu)] d\mu.\end{aligned}$$

如果设

$$L = \min(l', k), \tag{5.3.32}$$

则得

$$|x(t) - x^0 e^{-kt}| \leqslant \|p^0\| M l\theta_0 t e^{-Lt}/(1-\theta_0),$$

又因

$$|x^0| e^{-kt} \leqslant \|p^0\| e^{-Lt},$$

故有

$$|x(t)| \leqslant \|p^0\| \left[1 + \frac{M\theta_0}{1-\theta_0} lt\right] e^{-Lt}. \tag{5.3.33}$$

公式 (5.3.31)，(5.3.33) 给出了在 $\chi(r) = Cr^\delta$，$\delta > 0$ 的情

况下，$x(t)$ 与 $y(t)$ 的渐近性态.

5. $k\geqslant l$, $k>0$ 的情形. H. Weyl 第二定理

(a) 现在我们来证明：

定理 17. (H. Weyl 第二定理) 对于给定的常数 a，系统 (5.3.1) 存在唯一的解 $x(t)$，$y(t)$，使得

$$\lim_{t\to+\infty} e^{kt}x(t)=a,\quad \lim_{t\to+\infty} e^{kt}y(t)=0,\tag{5.3.34}$$

其中 $k\geqslant l$，$k>0$.

为了证明这一定理，只需指出积分方程组

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=ae^{-kt}-\int_t^{+\infty}e^{k(\tau-t)}f(x(\tau),y(\tau))d\tau,\\ y(t)&=-\int_t^{+\infty}e^{l(\tau-t)}g(x(\tau),y(\tau))d\tau\end{aligned}\right\}\tag{5.3.35}$$

有唯一解.

首先证明唯一性，假定 $(x(t),y(t))$，$(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ 是 (5.3.35) 的两个解，记

$$\Delta x=x(t)-\tilde{x}(t),\quad \Delta y=y(t)-\tilde{y}(t),$$
$$\Delta p=\max(|\Delta x|,|\Delta y|),\quad r(t)=e^{kt}\Delta p.$$

注意到 (5.3.34)，当 $t\to+\infty$ 时 $r(t)\to 0$，因此，对给定的 $r_0>0$，$r(t)<r_0$，当 t 充分大时，有 $\Delta p<r_0e^{-kt}$*).

由于 $l\leqslant k$，由 (5.3.35) 及 (5.3.3) 得

$$\Delta p\leqslant\int_t^{\infty}e^{k(\tau-t)}\chi(\Delta p)\Delta p d\tau^{**)},\ (A\text{ 为某常数})$$

因而

$$0\leqslant r(t)\leqslant\int_t^{+\infty}\chi(r_0e^{-k\tau})r(\tau)d\tau.$$

又因积分

$$\int_t^{+\infty}\chi(r_0e^{-k\tau})d\tau$$

---

*) 原书为 $\Delta p<r_0e^{kt}$. ——译者注

**) 原书这段算式的反常积分中均为 $\chi(\Delta p)$. ——译者注

收敛（在(5.3.2.2)中令 $r = r_0 e^{-k\tau}$ 即可看出），由 Gronwall 引理(第一章 §2),即得 $r(t) \equiv 0$.

关于存在性，若 $a = 0$，则解由 $x = 0$，$y = 0$ 所组成．若 $a \neq 0$，可设 $a > 0$，因为若 $a < 0$，可改 x 为 $-x$.

记

$$\beta = l/k \quad (\leqslant 1), \tag{5.3.36}$$

作自变量代换,将 t 变为 s:

$$s = ae^{-kt}. \tag{5.3.37}$$

引入这个参数 s 后,我们有

$$x = \xi(s), \; y = \eta(s), \; \pi(s) = (\xi(s), \eta(s)). \tag{5.3.38}$$

在积分方程组(5.3.35)中,也作变量代换 $\sigma = ae^{-k\tau}$，得到关于函数 $\xi(s)$，$\eta(s)$ 的积分方程组

$$\left.\begin{aligned} \xi(s) &= s - k^{-1}\int_0^s \frac{s}{\sigma} f(\xi(\sigma), \eta(\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma}, \\ \eta(s) &= -k^{-1}\int_0^s \left(\frac{s}{\sigma}\right)^\beta g(\xi(\sigma), \eta(\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.35'}$$

要完成定理的证明，现在只需指出(5.3.35′)有满足条件(当 $s \to 0$ 时——译者注)

$$\xi(s) = s + O(s), \; \eta(s) = O(s) \tag{5.3.38'}$$

的解．因若取

$$x = \xi(ae^{-kt}) = X_a(t), \; y = \eta(ae^{-kt}) = Y_a(t), \tag{5.3.39}$$

则(5.3.34)满足.

注意到对 $0 < R \leqslant R_0$，积分 $\int_0^R \frac{\chi(u)du}{[k + \chi(u)]u}$ 收敛,以

$$\log R - \int_0^R \frac{\chi(u)du}{[k + \chi(u)]u} = \log s \tag{5.3.40}$$

和

$$\log R_0 - \int_0^{R_0} \frac{\chi(u)du}{[k + \chi(u)]u} = \log s_0 \tag{5.3.40'}$$

来定义函数 $s = s(R)$ 和数 s_0.

由于 $s^{-1}ds = [k + \chi(R)]^{-1}R^{-1}kdR$，$s = s(R)$ 是R的连续增函数，它将区间$(0, R_0)$映到$(0, s_0)$，又若 $R = R(s)$ 表示 s 的反函数，则当 $s \to 0$ 时 $\lim R(s) = R(0) = 0$。因此，由(5.3.40)，当 $s \to 0$ 时 $\log R(s)/s \to 0$，从而

$$\lim_{s \to 0} R(s)/s = 1,\ dR/ds = \frac{R}{s}\frac{k + \chi(R)}{k} > \frac{R}{s}^{*)}. \quad (5.3.41)$$

如果我们以

$$\phi(0) = 0,\ \phi(s) = \log R(s)/s,\ s \neq 0 \qquad (5.3.42.1)$$

来定义函数 $\phi(s)$，则

$$R = R(s) = se^{\phi(s)},\ \phi(0) = 0,\ R(s)/s > 1, \quad (5.5.42.2)$$

$$d\phi/ds = k^{-1}\chi(R(s))/s. \qquad (5.3.42.3)$$

所以，$\phi(s)$ 是连续增函数，又由(5.3.42.2)与(5.3.41)，得$R(s)/s$与 $R'(s)$ 也同样是连续增函数.

现在用下面的递推关系式形式地定义两个函数列 $\{\xi_n(s)\}$，$\{\eta_n(s)\}$:

$$\xi_{-1}(s) = \eta_{-1}(s) = 0, \qquad (5.3.43)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_n(s) &= s - k^{-1}\int_0^s \frac{s}{\sigma} f(\xi_{n-1}(\sigma), \eta_{n-1}(\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma}, \\ \eta_n(s) &= -k^{-1}\int_0^s \left(\frac{s}{\sigma}\right)^\beta g(\xi_{n-1}(\sigma), \eta_{n-1}(\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma}. \end{aligned}\right\} \quad (5.3.44)$$

引入记号(参看 §3.1(c)) $\Delta\xi_{n+1}(s)$，$\Delta\eta_{n+1}(s)$，$n = -1, 0, 1, \cdots$，以及 $\Delta f_n(\sigma)$，$\Delta g_n(\sigma)$ 和 $\pi_\nu(s) = (\xi_\nu(s), \eta_\nu(s))$，$\Delta\pi_\nu(s) = \max(|\Delta\xi_\nu(s)|, |\Delta\eta_\nu(s)|)$，我们有 $\xi_0(s) = s$，$\eta_0(s) = 0$，$\Delta\xi_0(s) = s$，$\Delta\eta_0(s) = 0$. 又因 $\beta \leq 1$，故

$$|\Delta\xi_{n+1}(s)| \leq k^{-1}\int_0^s \frac{s}{\sigma}|\Delta f_n(\sigma)|\frac{d\sigma}{\sigma},$$

$$|\Delta\eta_{n+1}(s)| \leq k^{-1}\int_0^s \frac{s}{\sigma}|\Delta g_n(\sigma)|\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

---

*) 原书为 $\frac{dR}{ds} = \frac{R}{s}\frac{k + \chi(R)}{\chi(R)} > \frac{R}{s}$. ——译者注

因此，若 $\|x_{\nu-1}(s)\|$，$\|x_\nu(s)\| \leqslant R(s)$，则由(5.3.3)，我们有

$$\Delta x_{n+1}(s) \leqslant k^{-1}\int_0^s \frac{s}{\sigma}\chi(R(\sigma))\Delta x_n(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma},$$

又由 (5.3.42)，$k^{-1}\chi(R(\sigma)) = k^{-1}\chi(\sigma e^{\psi(\sigma)}) = \sigma d\psi/d\sigma$，故得

$$\Delta x_{n+1}(s) \leqslant s\int_0^1 \Delta x_n(\sigma)\frac{d\psi(\sigma)}{\sigma}. \qquad (5.3\ 45)$$

现在可以证明

$$\Delta x_\nu(s) \leqslant s\psi^\nu(s)/\nu!\ (\nu = 0, 1, \cdots), \qquad (5.3.46)$$

由于 $\xi_0 = s$，$\eta_0 = 0$，故 $\Delta x_0(s) = s$，这就得到关于 $\nu = 0$ 的关系式. 按归纳法，假设 (5.3.46) 对 $\nu = 0, 1, \cdots$成立，由 (5.3.45) 我们有

$$\Delta x_{n+1}(s) \leqslant s\int_0^{\psi(s)}\frac{\psi^\nu}{\nu!}d\psi = s\frac{\psi^{(n+1)}(s)}{(n+1)!},$$

这正是当 $\nu = n+1$ 时的(5.3.46).

由于 $\xi_n(s) = \sum_0^n{}_\nu \Delta\xi_\nu(s), \eta_n(s) = \sum_0^n{}_\nu \Delta\eta_\nu(s)$，由(5.3.46)得 $|\xi_n(s)|$，$|\eta_n(s)| \leqslant se^{\psi(s)} = R(s) \leqslant R_0$，因此，(5.3.44)的递推定义有意义. 此外，若定义 s 的函数如下：

$$\xi(s) = \sum_0^\infty{}_\nu \Delta\xi_\nu(s),\ \eta(s) = \sum_0^\infty{}_\nu \Delta\eta_\nu(s), \qquad (5.3.47)$$

$$x(s) = (\xi(s), \eta(s)),$$

则由 (5.3.45)，我们有

$$\|x(s)\|,\ |\xi(s)|,\ |\eta(s)| \leqslant se^{\psi(s)} = R(s) \leqslant R_0. \qquad (5.3.48)$$

现在易于验证，由 (5.3.47) 定义的函数 $\xi(s)$，$\eta(s)$ 满足方程组 (5.3.35′).

事实上

$$\xi(s) = s - k^{-1}\sum_0^\infty{}_\nu\int_0^s\frac{s}{\sigma}\Delta f_\nu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}. \qquad (5.3.49)$$

又因 (5.3.37)，

$$k^{-1}\sum_0^\infty{}_\nu|\Delta f_\nu(\sigma)|\frac{1}{\sigma^2} \leqslant \frac{k^{-1}}{\sigma}\chi(R(\sigma))e^{\psi(\sigma)} = e^{\psi(\sigma)}\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma},$$

这个级数可以逐项积分，(5.3.49) 中的积分之和等于和的积分，从而得到 (5.3.35) 的第一式.

由于 $\beta \leqslant 1$，用同样的推理可建立 (5.3.35′) 的第二式.

由 (5.3.38) 以及关系式 $\xi_0(s)=s$，$\eta_0(s)=0$，得

$$|\xi(s)/s^{-1}|,\ |\eta(s)/s| \leqslant e^{\psi(s)}-1=\frac{R(s)}{s}-1. \quad (5.3.50)$$

又由 (5.3.41) 的第一式，得

$$\lim_{s\to 0}\xi(s)/s=1,\quad \lim_{s\to 0}\eta(s)/s=0. \quad (5.3.51)$$

这等价于 (5.3.38′). 于是定理完全得到了证明.

(b) 现在我们又可考察特殊情况 $\chi(r)=Cr^{\delta}$，$\delta>0$.

这时方程(5.3.40)为 $R=s(1-k^{-1}Cs^{\delta})^{-\delta'}$，其中 $\delta'=1/\delta$. 因此，$dR/ds=(R/s)^{1+\delta}$，又因 $Cs^{\delta}=kCR^{\delta}/(k+CR^{\delta})$，设 $\theta_0=CR_0^{\delta}$，则 (a) 中所遇到的对应值 s_0 在目前的情况下可以由 $Cs_0^{\delta}=k\theta_0/(k+\theta_0)$ 明确地计算出来.

6. 参数化系统

(a) 对 s 与 σ 的负值，也可考虑系统 (5.3.35′)，解 $x=\xi(t)$，$y=\eta(t)$ 在区间 $[-s_0, 0]$ 内也存在. 这可用 $R(-s)=R(s)$ 重复上面的论证来得到.

注意，若在 (5.3.1) 中作自变量代换 $s=ae^{-kt}$，就得系统

$$\left.\begin{aligned} &sdx/ds=x-k^{-1}f(x,y),\\ &sdy/ds=\beta y-k^{-1}g(x,y),\ \beta=l/k<1. \end{aligned}\right\} \quad (5.3.52)$$

这系统称为 (5.3.1) 的**参数化系统**. 我们有下面的定理:

定理 18. 若 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 满足 §3.1(a) 中的假设，又 $\beta \leqslant 1$，$R=R(s)$ 是由(5.3.40)所定义的反函数，s_0 是由(5.3.40′)所定义的数，则系统，(5.3.52)有定义在 $[-s_0, s_0]$ 上，且满足条件 $\lim_{s\to 0}\xi(s)/s=1$ 和 $\lim_{s\to 0}\eta(s)/s=0$ 的解 $x=\xi(s)$，$y=\eta(s)$.

反之，对每一常数 $a\neq 0$，(5.3.39) 给出了 (5.3.1) 的满足条件 $\lim_{t\to+\infty}e^{kt}X_a(t)$，$\lim_{t\to+\infty}e^{kt}Y_a(t)=0$ 的解.

(b) 其次来估计 $\xi'(s)$, $\eta'(s)$ 在 $s=0$ 的邻域内的上界.

由于 $|f(\xi(s),\eta(s))|=|f(\xi(s),\eta(s))-f(0,0)|\leqslant\chi(R(|s|))R(|s|)$, $|g(\xi(s),\eta(s))|\leqslant\chi(R(|s|))R(|s|)$, 由(5.3.52)的第一式及(5.3.50), 得

$$|\xi'(s)-1|\leqslant|\xi(s)/s-1|+k^{-1}|s|^{-1}\chi(R(|s|))R(|s|)$$
$$\leqslant[R(|s|)/|s|-1]+k^{-1}|s|^{-1}\chi(R(|s|))R(|s|),$$

对(5.3.52)的第二式进行类似的计算,可得

$$|\xi'(s)-1|\leqslant\left(\frac{R(|s|)}{|s|}-1\right)+\frac{1}{k}\frac{\chi(R(|s|))R(|s|)}{|s|}, \tag{5.3.53.1}$$

$$|\eta'(s)|\leqslant|\beta|\left(\frac{R(|s|)}{|s|}-1\right)+\frac{1}{k}\frac{\chi(R(|s|))R(|s|)}{|s|}, \tag{5.3.53.2}$$

由此,利用(5.3.41)就得到

$$\lim_{s\to0}\xi'(s)=\xi'(0)=1,\quad \lim_{s\to0}\eta'(s)=\eta'(0)=0.$$

由于(5.3.40),对 $s>0$,

$$\frac{dR}{ds}-1=\frac{[k+\chi(R(s))]R(s)}{ks}-1$$
$$=\left(\frac{R(s)}{s}-1\right)+\frac{1}{k}\frac{\chi(R(s))R(s)}{s}.$$

又由(5.3.42.2), $R(s)/s>1$, 因此,若记

$$\gamma=\max(1,|\beta|),\ (\beta=l/k). \tag{5.3.54}$$

则(对 $0<s<s_0$, 类似地,对 $-s_0<s<0$, 从而对 $|s|<s_0$) 有

$$|\xi'(s)-1|\leqslant dR/ds-1, \tag{5.3.55}$$
$$|\eta'(s)|\leqslant\gamma(|dR/ds|-1),\ 对\ |s|<s_0.$$

(c) 现在来考察对应于(a)中确定的解的轨线, 所述轨线满足方程

$$[x-k^{-1}f(x,y)]dy/dx=\beta y-k^{-1}g(x,y), \tag{5.3.56}$$

我们将由此推出后面所需要的一些性质.

由于 $\xi'(s)$ 在 $s=0$ 的邻域内为正,故 $\xi(s)$ 在原点的邻域 $(-s_1,s)$ 内递增,其中 $s_1\leqslant s_0$, 其反函数 $s=\sigma(x)$ 在区间$(-R_1,$

R_1)内存在，其中 $R_1 \leqslant R_0$，且满足不等式 $|\sigma(x)| \leqslant s_1$.

曲线

$$\Lambda: y = \Phi(x) = \eta(\sigma(x)) \tag{5.3.57}$$

在 $|x| \leqslant R_1$ 上有定义，且在 O 点有水平切线，这切线是由(5.3.1)的三条轨线所组成．其中之一是奇点 O，另外两条分别对 $x > 0$ 和 $x < 0$ 有定义．正如我们将在 §3.7 中看到的，这两条轨线对应于两条趋于 O 的轨线，在双切结点情形，它们是两条孤立轨线．下面证明，当 R_1 充分小时，对 $|x| \leqslant R_1$，有 $|\Phi(x)| \leqslant |x|$.

由(5.3.50)，$|\xi(s_1)/s_1 - 1| \leqslant R(s_1)/s_1 - 1 \leqslant R'(s_1) - 1 \leqslant 1/(1+\gamma)$，由此，$\xi(s_1)/s_1 \geqslant 1 - (1+\gamma)^{-1} = \gamma(1+\gamma)^{-1}$，$\xi(s_1) \geqslant \gamma s_1(1+\gamma)^{-1} = R_1$.

因 $R'(s)$ 递增，由 (5.3.55)，对 $|s| \leqslant s_0$，有

$$|\xi'(s)| > \gamma(1+\gamma)^{-1},\ |\eta'(s)| < \gamma(1+\gamma)^{-1},$$

因此

$$|\Phi'(x)| = |\eta'(s)/\xi'(s)| < 1,$$

从而有 $|\Phi(x)| \leqslant |x|$.

7. 双切结点情形．H. Weyl 第三定理

我们需要两条引理．

(a) 设 $0 < l < k$，且令 $\mathscr{L}: p(t) = (x(t), y(t))$ 是(5.3.1)当 $t = 0$ 时从 $Q(r_0)$ 中的点 $p^0 = (x^0, y^0)$ 出发的解．

由 §3.2，这个解当 $t \in [0, +\infty)$ 时的存在性是有保证的，只要我们取 $r_0 \leqslant R_0$，$\chi(r_0)/l = \theta < 1$ (参看 (5.3.9.1)，(5.3.9.2))，也可取 $r_0 < R_1$，其中 R_1 是§ 3.6(c) 中的常数．

参照(5.3.21)，(5.3.14.2)，并以 $b(\mathscr{L})$ 记定理 16 中的常数 b，则 (5.3.26.2) 可以写为

$$\lim_{t \to +\infty} e^{lt} y(t) = b(\mathscr{L}). \tag{5.3.26.2}$$

在 §3.6 中所定义的曲线 $\Lambda: y = \Phi(x)$ 上，考察点 $x(t)$，$y_1(t) = \Phi(x(t))$．换句话说，我们比较 $\mathscr{L}$ 与 Λ 上具相同横坐标的两点的纵坐标(图 80)，由于 $|x(t)| \leqslant \|p(t)\| \leqslant \|p^0\| < r_0 < R_1$，这是可以办到的．

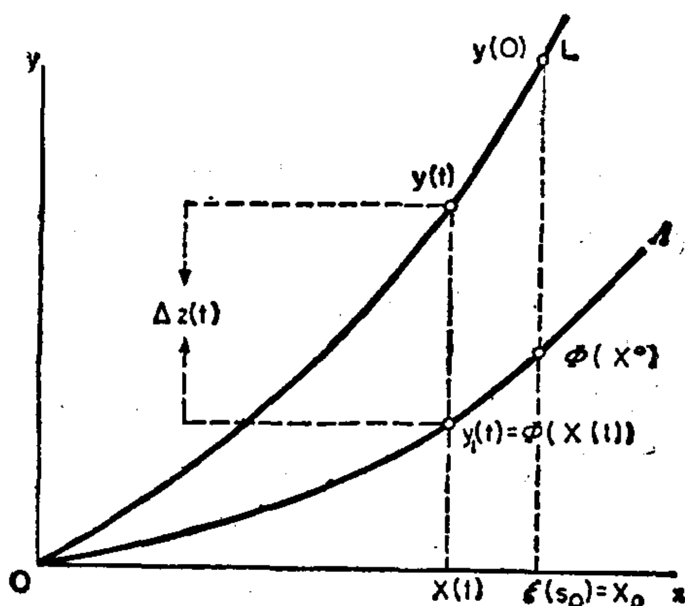


图 80

Λ 上的点 $(x^0, \Phi(x^0))$ 与 $\mathscr{L}$ 上的点 (x^0, y^0) 相对应，(x^0, y^0) 对应于 $t=0$. 由于 $x^0=\xi(s_0)$,或者等价地,由于 $s_0=\sigma(x^0)$,故 Λ 上的点 $(x^0, \Phi(x^0))$ 对应于 $t=s_0$.

(b) 现在我们能够证明所需要的两个引理中的第一个.

引理. 当 $t>0$ 时，$|y(t)-y_1(t)|\rho^2(t)e^{3lt}$ 是 t 的非减函数.

设 $y(t)-y_1(t)=\Delta_1 y(t)=z(t)$, $\Delta_1 f(t)=f(x(t), y(t))-f(x(t), y_1(t))$，对 g 也建立类似的关系式. 注意到，$z(t)$ 表示 $\mathscr{L}$ 与 Λ 上两个对应点的距离，它可用 $\mathscr{L}$ 的参数 t 的函数来表达.

我们有 $\dot{y}_1=\Phi'(x(t))\dot{x}=\Phi'(x(t))[-kx(t)+f(x(t), y(t))]$，将此式与 (5.3.1) 的第二式相减，可得

$$d(\Delta_1 y)/dt=\{-ly+g(x, y)\}-\Phi'(x)\{-kx+f(x, y)\}.$$

但是，由(5.3.56)，$0=\{-ly_1+g(x, y_1)\}-\Phi'(x)\{-kx+f(x, y_1)\}$，相减即得

$$\dot{z}=-lz+S. \tag{5.3.58}$$

其中

$$S=S(t)=\Delta_1 g(t)-\Phi'(x(t))\Delta_1 f(t), \tag{5.3.59}$$

由于 §3.6(c)，$|\Phi(x)|\leqslant|x|$，且 $|y_1|=|\Phi(x)|\leqslant|x|$，故

若令 $p_1(t)=(x(t),y(t))$，则得 $\|p_1(t)\|\leqslant\|p(t)\|$，因此也有

$$\|p_1(t)\|\leqslant\|p^0\|\rho(t). \tag{5.3.21'}$$

我们还有

$$|\Delta_1 f(t)|\leqslant\chi(r(t))|\Delta_1 y(t)|,\quad |\Delta_1 g(t)|\leqslant\chi(r(t))|\Delta_1 y(t)|,$$

又因 $|\Phi'(x(t))|\leqslant 1$(§ 3.6(c))，由 (5.3.59) 就得到

$$|S(t)|\leqslant 2\chi(r(t))|\Delta_1 y(t)|=2\chi(r(t))|z(t)|, \tag{5.3.59'}$$

其中 $r(t)=r_0\rho(t)$.

现在由 (5.3.58) 得到

$$\frac{1}{2}dz^2/dt=-lz^2+Sz, \tag{5.3.60}$$

但由 (5.3.59')，$|Sz|\leqslant 2\chi(r(t))z^2$，因此

$$\frac{1}{2}d\log z^2/dt\geqslant-(l+2\chi(r)). \tag{5.3.61}$$

由 (5.3.12) 及 (5.3.15)，对函数

$$\begin{aligned}U&=\exp(lt+2\varphi)=\exp(3lt+2\log\rho)\\&=\rho^2\exp(3lt),\end{aligned}$$

我们有 $(1/2)d(\log v^2)/dt=l+2\chi(r(t))$，将此式与(5.3.61)相加，得 $d\log(z^2U^2)/dt>0$. 因此，$zU=z\rho^2(t)e^{3lt}$ 是非减函数，引理得证.

(c) 由第一个引理立刻得到下面的第二个引理：

引理. 下面的不等式成立

$$|y(0)-y_1(0)|\leqslant M^2|b(\mathscr{L})|. \tag{5.3.62}$$

事实上，由定理 16，当 $t\to+\infty$ 时，$y_1(t)=\Phi(x(t))=O(|x(t)|)=o(e^{-lt})$，由此，按照 (5.3.26.2)，有

$$\lim_{t\to+\infty}\{y(t)-y_1(t)\}e^{lt}=b(\mathscr{L}),$$

再由 (5.3.16)，(5.3.17)，得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}z(t)U(t)&=\lim_{t\to+\infty}\{y(t)-y_1(t)\}e^{lt}e^{2\varphi(t)}\\&=b(\mathscr{L})\exp\left(2\int_0^{r_0}\frac{\chi(r)}{l-\chi(r)}\frac{dr}{r}\right)=b(\mathscr{L})M^2,\end{aligned}$$

由此即得 (5.3.62).

(d) 现在我们能够证明下面的定理:

定理 19. (H. Weyl 第三定理)若 $0<l<k$, 则由定理 16 所得到的系统 (5.3.1) 的解,恰为那样的解,对于它, (5.3.26.2) 中的常数 $b=b(\mathscr{L})$ 等于零.

事实上,可取常数 a, 使得 $X_a(0)=\xi(0)=x(0)=x^0$, $a=\sigma(x^0)$, 且设 $Y_a(0)=\Phi(X_a(0))=y_1(0)$. 如果我们记 $\Delta x(t)=x(t)-X_a(t)$, $\Delta y(t)=y(t)-Y_a(t)$, 则 $\Delta x(0)=0$, $\Delta y(0)=y(0)-y_1(0)$. 由 (5.3.22), (5.3.14.3) 以及 (5.3.62) 得 $\Delta p(t)\leqslant |y(0)-y_1(0)|Me^{-lt}\leqslant b(\mathscr{L})M^3e^{-lt}$. 因此,若 $b(\mathscr{L})=0$, 则 $\Delta p(t)$ 恒等于零,从而曲线$\mathscr{L}$与曲线 $(X_a(t), Y_a(t))$ 重合.

(e) 上面的定理有一个值得注意的推论.

假定对系统 (5.3.1), $0<l<k$. 又 §3.1 中所述的假设满足, 则曲线 $y=\Phi(x)$ 是由两条趋于 O 且在该点有水平切线 $(\Phi'(0)=0)$ 的轨线所组成.对于其它每一条轨线的参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, 我们有

$$\lim_{t\to+\infty} e^{lt}x(t)=0, \quad \lim_{t\to+\infty} e^{lt}y(t)=b\neq 0,$$

由此,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)/x(t)=+\infty.$$

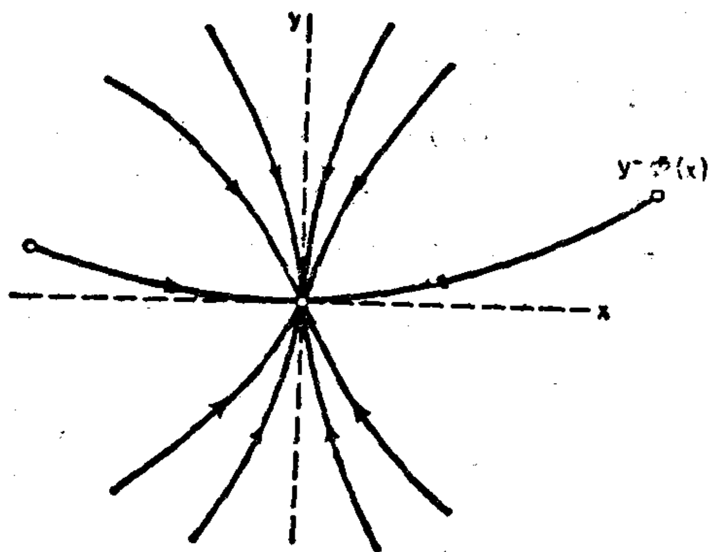


图 81

换句话说，其它每一条轨线在到达原点时都与 y 轴相切. 从而，原点是双切结点，曲线 $y=\Phi(x)$ 是由两条孤立轨线所组成.

因此，若 $0<l<k$，且满足§3.1的假设，则 (5.3.1) 的轨线与简化系统 $\dot{x}=-kx, \dot{y}=-ly$ 的轨线具有相同的性态(图81).

8. 鞍点情形 ($l<0<k$). H. Weyl 第四定理

(a) 我们来证明下面的定理:

定理 20. (H. Weyl 第四定理) 假设§3.1中的条件满足，又 $l<0<k$. 则(a)当 $t\to+\infty$ 时，(5.3.1)的趋于O的轨线只有(5.3.39)的曲线 $x=X_a(t)$, $y=Y_a(t)$ (切于x轴);(b) 类似地，当 $t\to-\infty$ 时，只有两条趋于O的轨线(切于y轴); (c) 其它任一轨线 $(x(t), y(t))$ 在 $Q(r_0)$内只停留有限时间 T. 因此，点O与简化系统一样是 (5.3.1) 的鞍点 (§2).

取 $r_0>0$，使得 $\chi(r_0)<|l|/2$，$r_0\leqslant R_1$，其中 R_1 是§3.6 (c) 中的常数. 我们来证明: 如果 $\mathscr{L}$: $p(t)=(x(t), y(t))$ 是 (5.3.1) 的解，则当 $t\to+\infty$ 时不可能同时有

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=0, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t)=0,$$

除非这解与 $Y_a(t)$ 重合.

如同 §3.7(a) 中一样，比较曲线$\mathscr{L}$与 Λ，并采用相同的记号，我们就有$|\Delta_1 f|, |\Delta_1 g|<\chi(r_0)|z|$. 且由于$2\chi(r_0)/|l|=\theta<1$，由 (5.3.59′) 得 $|S(t)|\leqslant 2\chi(r_0)|z|=\theta|l||z|$. 现因 $l<0$，由 (5.3.60) 得$\frac{1}{2}dz^2/dt\geqslant(1-\theta)|l|z^2$，由此，$|z(t)|\geqslant z(t_0)\cdot \exp(|l|(1-\theta)(t-t_0))$，这说明距离 $|y-y_1|=|z|$ 关于时间按指数式增加，但这是不可能的，故必有 $z(t_0)=0$. 从而，可取常数 a 使得 $ae^{-kt_0}=\sigma(x(t_0))$，即 $\xi(ae^{-kt_0})=x(t_0)$. 于是，两个解 $(x(t), y(t))$, $(X_a(t), Y_a(t))$ 在 t_0 具有相同的初值，由唯一性定理，它们处处重合.

改 t 为$-t$并交换 l 与 k. 则可与 §3.5 一样来构造当 $t\to-\infty$ 时趋于O(切于y轴)的相应的曲线$(X_a(t), Y_a(t))$，它们是具

有这种性质的仅有的曲线(这段话的意思是说,前面对 x 轴的结论也适用于对 y 轴,只是进入 O 点现在要换成离开 O 点. ——译者注).

(b) 最后,我们可以改进定理 20 所得的结果.

考虑 (5.3.1) 的在 $t=0$ 时离开正方形 $Q(r)(r<r_0)$ 的解 $\mathscr{L}: p(t)=(x(t), y(t))$. 设 T 是使 $p(t)$ 属于 $Q(r)$ 内的 t 的上确界. 再定义常数 a, 使得 $\Delta x(t)=x(t)-X_a(t)$ 在 $t=0$ 处等于零. $\Delta y(0)=[y(t)-Y_a(t)]_{t=0}$ 是 $\mathscr{L}$ 与 Λ 上两对应点之间的距离 $y(t)-y_1(t)$.

由于这个距离的绝对值在 $t=T$ 时不超过 $2r_0$, 故

$$2r_0>|\Delta y_0|\exp(-(1-\theta)lT),\ |\Delta y_0|<2r_0\exp((1-\theta)lT)^{*)}.$$

因此,若 $l<0<k$, $(x(t), y(t))$ 是 (5.3.1) 的解,它在 $Q(r_0)$ 内停留的时间为 T, 则可确定数值 a, 使得 $|x(t)-X_a(t)|$, $|y(t)-Y_a(t)|$ 在 $t=0$ 处小于 $2r_0\exp((1-\theta)lT)$.

§4. C^1 类系统的孤立奇点.非初等奇点

1. 引言

在 §2, 我们讨论了系统 $\dot{x}=X(x, y)$, $\dot{y}=Y(x, y)$ 的奇点. 其中 X, Y 是 C^1 类函数, 即在此点的邻域内它们具有连续的偏导数.

在这些假设下,若取此奇点为 $O=(0, 0)$, 则此系统可以写为

$$\dot{x}=X_x^0x+X_y^0y+f(x, y),\quad \dot{y}=Y_x^0x+Y_y^0y+g(x, y), \tag{5.4.1}$$

其中 X_x^0, X_y^0, Y_x^0, Y_y^0 为各偏导数在 O 点的值, f, g 是 O 点邻域内的 C^1 类函数.

此外,对 $0<x^2+y^2<r^2$, 我们假定

$$(X_x^0x+X_y^0y+f(x, y))^2+(Y_x^0x+Y_y^0y+g(x, y))^2>0, \tag{5.4.2}$$

---

*) 原书这里以及下面的指数中有符号错误. ——译者注

亦即O是孤立奇点. 整个这一节我们都保留这些假设. 而在§2中关于初等奇点的假设 $\Omega^0 = X_x^0 Y_y^0 - X_y^0 Y_x^0 \neq 0$，现在由假设

$$\Omega^0 = X_x^0 Y_y^0 - X_y^0 Y_x^0 = 0, X_x^{02} + X_y^{02} + Y_x^{02} + Y_y^{02} > 0 \quad (5.4.3)$$

所代替. 因此,这一节将考虑曾被 K. A. Keil [1] 研究过的所谓**非初等奇点**. 我们的讨论以他的处理方法为基础. 下面将按 $I^0 = X_x^0 + Y_y^0 \neq 0$ 和 $I^0 = 0$ 而分成两种情况.

在第二章 §1 我们已经看到，借助于非退化的仿射变换，系统 (5.4.1) 在刚才所述的两种情况下可相应地化为标准型 $\dot{x} = \lambda x + f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, $\lambda \neq 0$ 和 $\dot{x} = \lambda y + f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, $\lambda \neq 0$. 进一步还可以假定 $\lambda = 1$，这相当于以 λt 代替 t. 于是这一节考虑的系统就是

$$\dot{x} = x + f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y); \quad (5.4.4)$$

$$\dot{x} = y + f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \quad (5.4.5)$$

其中：(1) f, g 在O的邻域内是 C^1 类函数；(2) f, g 以及它们的一阶偏导数 f_x, f_y, g_x, g_y 在O点皆等于零. 且对系统 (5.4.4) 有

$$[x + f(x, y)]^2 + g^2(x, y) > 0, \quad 0 < x^2 + y^2 \leqslant r^2, \quad (5.4.2')$$

对系统 (5.4.5) 则有

$$[y + f(x, y)]^2 + g^2(x, y) > 0, \quad 0 < x^2 + y^2 \leqslant r^2. \quad (5.4.2'')$$

下面我们将对系统 (5.4.4) 在O的邻域内的性态作详细的研究,对 (5.4.5) 则仅仅限于叙述某些结果.

2. 对于系统 $\dot{x} = x + f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$ 的 K. A. Keil 第一定理

定理 21. **若系统**

$$\dot{x} = x + f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (5.4.4)$$

中的 f, g 满足§4.1中的假设，则有且仅有两条分别定义在 $x = 0$ 的右方和左方的轨线 $y = y(x)$，它们在点O都相切于 x 轴.

首先，我们指出，对给定的 $m > 0$，存在 $a > 0$，使得在区域 B: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant m|x|$ (图 82) 中,有

$$|x + f(x, y)| > 0, \quad 对 \ x \neq 0 \quad (5.4.6)$$

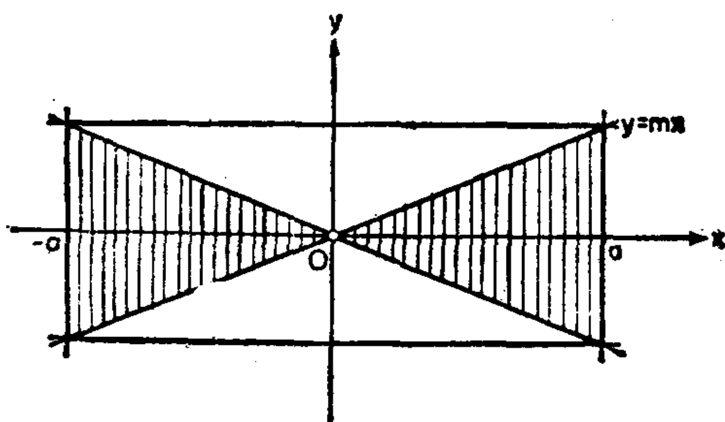


图 82

其次，我们指出，

$$|x+f(x,y)| \geqslant |x|\left[1-\frac{|f(x,y)|}{(x^2+y^2)^{1/2}}\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{|x|}\right],$$

$$(x^2+y^2)^{1/2}|x| = [1+(y/x)^2]^{1/2} \leqslant (1+m^2)^{1/2},$$

又由于 $f(0,0)=0$，且由§ 4.1 中的假设，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续，故存在 $\rho_0>0$．使得对 $0<(x^2+y^2)^{1/2}<\rho_0$，有

$$|f(x,y)|/(x^2+y^2)^{1/2}<\left(\frac{1}{2}\right)(1+m^2)^{1/2}.$$

因此，若取

$$a=\rho_0/\sqrt{1+m^2},$$

则有 $|x+f(x,y)|>|x|/2>0$，对 $x\neq 0$.

因而，若 $x(t)$, $y(t)$ 是(5.4.4)的解，取 t 使 $(x(t),y(t))\in B$，且 $x(t)\neq 0$，则 $|\dot{x}(t)|\neq 0$，故(5.4.4)的属于 B 中的轨线满足方程

$$dy/dx=g(x,y)/[x+f(x,y)]. \tag{5.4.7}$$

现在我们在带域 $|x|<a$ 中定义函数 $F^*(x,y)$ 如下：

$$\left.\begin{array}{l}F^*(x,y)=g(x,y)/[x+f(x,y)]，若 (x,y)\in B, x\neq 0,\\ F^*(0,y)=0,\\ F^*(x,y)=F^*(x,m|x|)，若 y\geqslant m|x|,\ |x|\leqslant a,\\ F^*(x,y)=F^*(x,-m|x|)，若 y\leqslant -m|x|,\ |x|\leqslant a.\end{array}\right\} \tag{5.4.8}$$

由于 $\rho_0>0$，对 $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}<\rho_0$，令 $|f(x,y)|/\rho<\delta$，$|g(x,y)|/\rho<\delta$，其中 $\delta<1/(1+m^2)^{1/2}$，于是，对 $(x,y)\in B$，

$x \neq 0$，有

$$|F^*(x, y) - F^*(0, 0)| = \frac{|g(x, y)|}{|x + f(x, y)|}$$

$$\leqslant \frac{|g(x, y)|\rho^{-1}}{|x/\rho| - |f(x, y)|/\rho} < \frac{\delta}{(1 + m^2)^{-1/2} - \delta}.$$

由于对充分小的 ρ_0，可以假定 δ 小于任意正数，故 $F^*(x, y)$ 在包含 O 在内的 B 中连续，再由 (5.4.8)，它在带域 $|x| \leqslant a$ 中也连续.

若 $x \neq 0$，则对带域 $|x| \leqslant a$ 中每两点 (x, y_1)，(x, y_2)，我们有

$$|F^*(x, y_1) - F^*(x, y_2)| = |y_1 - y_2||F_y^*(x, \eta)|, \ y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2.$$

如果这两点 (x, y_1)，(x, y_2) 属于 B，则

$$|F^*(x, y_1) - F^*(x, y_2)| = |y_1 - y_2| \left|\frac{(x + f)g_y - gf_y}{(x + f)^2}\right|_{y=\eta}$$

$$= \left|\frac{g_y - f_y F^*}{x + f}\right|_{y=\eta} |y_1 - y_2|$$

$$= \frac{1}{|x|}|g_y/(1 + f/x) - f_y F^*/(1 + f/x)|_{y=\eta}|y_1 - y_2|,$$

由此，

$$|x||F^*(x, y_1) - F^*(x, y_2)| \leqslant [|g_y|/|1 - |f/x||$$
$$+ |f_y||F^*|/|1 - |f/x||]_{y=\eta}|y_1 - y_2|,$$

如有必要可取 a 足够小，故可设[　]< 1，于是

$$|x||F^*(x, y_1) - F^*(x, y_2)| \leqslant |y_1 - y_2|.$$

由 (5.4.8) 知道，即使这两点不都属于 B 或没有一点属于 B，上述关系式仍然成立.

对上述的每一种情况，上面所得的不等式导致方程

$$dy/dx = F^*(x, y)$$

有定义在 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 上，且满足 $y(0) = 0$ 的唯一解 $y = y(x)$（由 Nagumo-Perron 唯一性定理，参看 G. Sansone [1] 第 111 页）．由条件 $y(0) = 0$ 及微分方程本身也得知 $y'(0) = 0$．因此，存在 ε'，$0 < \varepsilon' < \varepsilon$，使得对 $-\varepsilon' < x < \varepsilon'$，这条积分曲线属于

B，因而(5.4.7)的积分曲线也属于 B，定理得证.

3. 关于等倾线的引理

(a) 对于参数 p 的每一值，以 J_p 记曲线

$$G(x, y, p) = x + f(x, y) - pg(x, y) = 0. \qquad (5.4.9)$$

在 J_p 上异于 O 的每一点，由(5.4.7)所定义的方向 dy/dx 都等于 $1/p$. 因此，每一条 J_p 曲线都是等倾线.

(b) 这些等倾线的性质可由下面的引理来表达.

引理 1. 沿着每一条 J_p 曲线，当 $x^2 + y^2 > 0$ 时 $g(x, y) \neq 0$. 此外，若 $p \neq q$，则 J_p 与 J_q 仅有一个公共点 O.

如果在 J_p 上异于 O 的点处有 $g(x, y) = 0$，则由(5.4.9)知 $x + f(x, y) = 0$，这与(5.4.2′)矛盾. 若 $p \neq q$，则在 J_p 与 J_q 的公共点 (x, y) 处有 $g(x, y) = 0$，从而 (x, y) 与 O 重合.

引理 2. 所有的 J_p 曲线都与 y 轴相切于 O 点.

取 $p_0 > 0$，$\varepsilon > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得对于满足 $|p| \leqslant p_0$ 的每一条 J_p 曲线都可表为定义在 $|y| \leqslant \delta$ 内的函数 $x = x_p(y)$，这函数及其导数 $x'_p(y) = dx_p/dy$ 在 $|y| \leqslant \delta$ 内连续，且对 $|p| \leqslant p_0$，$|y| \leqslant \delta$ 有 $|x'_p(y)| < \varepsilon$. 事实上，由于 $G(0, 0, p) = 0$，$G_x(x, y, p) = 1 + f_x - pg_x > 1 - |f_x| - p|g_x| > 0$，对一切 $|p| \leqslant p_0$. 对适当的矩形 R：$|x| \leqslant a$，$|y| \leqslant \delta$ 内的一切点，由熟知的隐函数存在定理，方程 $G(x, y, p) = 0$ 在 $|y| \leqslant \delta$ 内所确定的函数 $x = x_p(y)$，在 $|y| \leqslant \delta$ 内连续可微且满足 $x_p(0) = 0$. 如有必要可把 δ 取得更小一些，故可断言

$$|x'_p(y)| = \left|-\frac{G_y}{G_x}\right| = \left|\frac{-f_y + pg_y}{1 + f_x - pg_x}\right|$$

$$\leqslant \frac{|f_y| + p_0|g_y|}{1 - |f_x| - p_0|g_x|} < \varepsilon,$$

引理得证.

注意到，由于 $G_x(x, y, p) > 0$，故从两个不同点 (x, y)，$(\bar{x}, y)$ 处出发的两条曲线 J_p 与 $J_{\bar{p}}$ 有 $p \neq \bar{p}$.

(c) 对给定的 $p_0>0$，如同在(b)中那样，存在 $\delta>0$. 考虑一区域，它包括 J_{-p_0} 与 J_{p_0} 之间的纵坐标满足 $|y|\leqslant\delta$ 的点以及 J_{-p_0} 与 J_{p_0} 上的点，将其中纵坐标满足 $0<y\leqslant\delta$ 和 $-\delta\leqslant y<0$ 的区域依次记为 E_0^+ 和 E_0^-.

若 $p_0=1$，这两个区域就简单地记为 E^+ 和 E^-.

现在来证明:

引理 3. 对给定的 $p_0>0$，满足 $|p|\leqslant p_0$ 的等倾线必在区域 E_0^+, E_0^- 之内. 而且，对固定的 c, $0<c<\delta$, 函数 $x_p(c)$ 是 p 的连续函数，且关于 p 严格单调；对于满足 $-\delta<c<0$ 的 c 有类似的结论.

在所有使表达式 $g(x,y)/[x+f(x,y)]$ 和 $[x+f(x,y)]/g(x,y)$ 有意义的地方，记

$$F(x,y)=g(x,y)/[x+f(x,y)],$$
$$p(x,y)=[x+f(x,y)]/g(x,y).$$

注意，(5.4.4) 在点 (x,y) 处的轨线的斜率等于

$$F(x,y)=1/p(x,y).$$

由定理 21 的证明,

$$\lim_{x\to0}F(x,\pm mx)=\lim_{x\to0}F^*(x,\pm mx)=0.$$

我们可以假设 δ 充分地小，使得对 $0<c\leqslant\delta$, $y=c$ 与直线 $y=mx$ 和 $y=-mx$ 分别相交于两点 P_1, P_2, 且满足

$$|F(x,y)|<1/p_0,\quad \text{在 } \overline{OP_1} \text{ 与 } \overline{OP_2} \text{ 上}.$$

以 s 记线段 $\overline{P_1P_2}$ (见图 83).

由引理 2，等倾线 J_0 与 s 交且仅交于一点 S，在 S 上 $p=0$. 由此，依 (5.4.9)，在 S 上 $x+f=0$，由 (5.4.2′)，在 S 上 $g\neq0$. 由于 $p(x,y)$ 在 s 上连续，故在 S 的左右存在两点 Q_1, Q_2，使得在 Q_1 与 Q_2, $|F|>1/p_0$. 由此 $Q_2\neq p_2$, $Q_1\neq p_1$. 而在两条直线段 $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$ 上，$x+f\neq0$. 因为如果 $x+f=0$，从而 $g\neq0$，这就得到 $p=0$，但 J_0 仅在 S 与 s 相交.

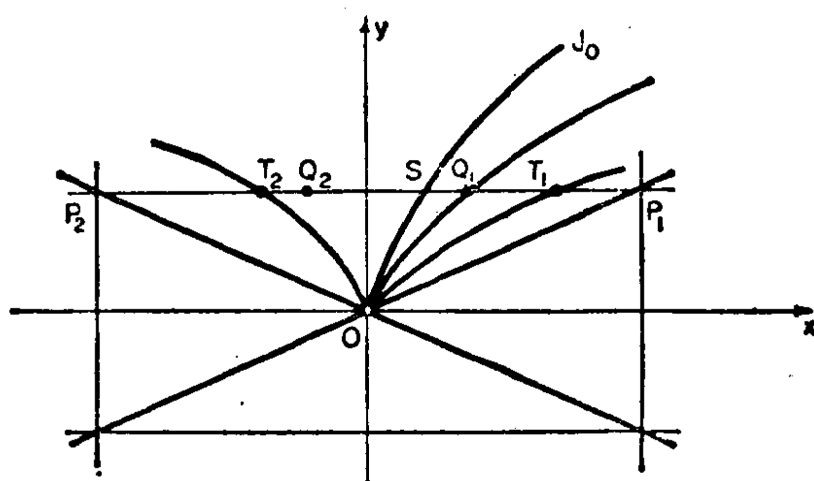


图 83

$|F(x, y)|$ 在 $\overline{P_1Q_1}$ 和 $\overline{P_2Q_2}$ 上有限且连续，又因为假定 $|F(x, y)|$ 在 P_1 和 P_2 处的值 $<1/p_0$，故在 $\overline{P_1Q_1}$ 和 $\overline{P_2Q_2}$ 的内部至少存在两点，使得在这两点处 $|F| = 1/p_0$，从而 $|p| = p_0$. 这两点中的一点属于 J_{p_0}，另一点属于 J_{-p_0}. 它们就是 J_{p_0} 和 J_{-p_0} 与 s 的两个交点，记右边的一点为 T_1，左边的一点为 T_2.

接下来，我们证明在 $\overline{T_2Q_2}$ 与 $\overline{T_1Q_1}$ 上的每一点都有 $g \neq 0$. 因为如果在 $\overline{T_2Q_2}$ 上有点使 $g = 0$，由于在该点的邻域内 $x + f \neq 0$，故存在该点的邻域，使得在其中 $0 < |F| < 1/p_0$，由此，$|p| > p_0$，于是，在开区间 $\overline{T_2Q_2}$ 内至少存在一点，使得在该点有 $|p| = p_0$，亦即 J_{p_0} 或 J_{-p_0} 上至少有这样一点，但这是不可能的. 因此，在 $\overline{T_2Q_2}$（类似地，在 $\overline{T_1Q_1}$）上，从而在 T_1T_2 上有 $g \neq 0$，且 $|p| \leqslant p_0$. 这说明从 T_1T_2 上每一点出发都有满足 $|p| \leqslant p_0$ 的等倾线 J_p.

当 x 在点 T_1 和 T_2 的横坐标间变化时，函数 $p(x, c)$ 是 x 的严格单调的连续函数. 连续性是显然的. 又若对 $x' \neq x''$ 有 $p(x', c) = p(x'', c)$，由(b)末了的证明，这是不可能的. 因此，对固定的 c，反函数 $x_p(c)$ 关于 p 有同样的性质.

上面的论述显然对 $-\delta \leqslant c < 0$ 也同样成立.

4. 关于系统 $\dot{x}=x+f(x, y)$, $\dot{y}=g(x, y)$ 的 K. A. Keil 第二定理与第三定理

(a) 若 f 和 g 满足§ 4.1 中的假设. 则对系统(5.4.4), 下列定理 22 和定理 23 成立.

定理 22. 存在原点 O 的一个邻域 ω, 过其中的每一点,有且仅有一条轨线通过;定理 21 中过原点 O 的两条轨线所组成的曲线 L 分 ω 成 ω_1 和 ω_2 两部分. 使得:(1) 属于 ω_1 或 ω_2 的所有轨线都是抛物型的,即它们都趋于 O,且它们的切线都切于 y 轴;或者(2)只有一条抛物型的轨线,其切线趋于 y 轴,其余的所有轨线都是双曲型的,即在 ω_1 (或 ω_2) 内只停留有限时间.

换句话说,若情形 (1) 对 ω_1 和 ω_2 都成立,则点 O 呈双切结点形状;若情形 (2) 对 ω_1 和 ω_2 都成立,则点 O 是鞍点型的;最后,若对 ω_1 成立情形(1),对 ω_2 成立情形 (2) 或者相反,则点 O 是鞍-结点. 例题见 (g).

下面的定理 23, 使我们可以确定,对 ω_1 和 ω_2 定理 22 中的两种情况究竟哪一种成立.

定理 23. 设 ω_1 表示 ω 在 L 上方的那一部分, $\omega_{1,1}(\omega_{1,2})$ 表示 ω_1 中由曲线 L 上横坐标为负(正)的弧段和等倾线 J_0 属于上半平面 $y \geqslant 0$ 的弧段所围成的部分. 如果当点从 $\omega_{1,1}$ 经过 J_0 到 $\omega_{1,2}$ 时, 函数 $p(x, y)=[x+f(x, y)]/g(x, y)$ 由负值变到正值,则对 ω_1 有定理 22 的情形 (1); 反之,若 $p(x, y)$ 由正值变到负值,则对 ω_1 有情形(2). 对曲线 L 下方的 ω 的另一部分 ω_2,情况刚好相反.

现在我们来证明定理 22 与定理 23.

(b) 按引理 2, 可以选取矩形 $R: |x| \leqslant a$, $|y| \leqslant \delta$, 对此, 当 $p_0=1$ (即 $\varepsilon=1$, $p_0=1$) 时有 $|x_p'(y)|<1$, 且如有必要可将 a 缩得足够小, 使得 L 与 R 的两条铅直边相交. R 中的所有等倾线与水平线仅相交于一点, 且关于 y 轴的斜率的绝对值处处小于 1.

在R中我们考虑用下面方式定义的区域D：在R中L的上方作一线段AB平行于x轴，使它与x轴有正的距离，它与J_{-1}和J_1的交点为A与B。即A为AB的左端点，B为AB的右端点。

如果A与B充分接近于O，则可以从A和B作两条分别平行于直线$y=x$和$y=-x$的线段，它们的第二个端点在L上。等倾线J_{-1}与J_1同这两线段除A和B以外不会再有其它公共点。以D表示由L与刚才所说的三条线段所围的区域，L本身除外，但这三线段包括在内。

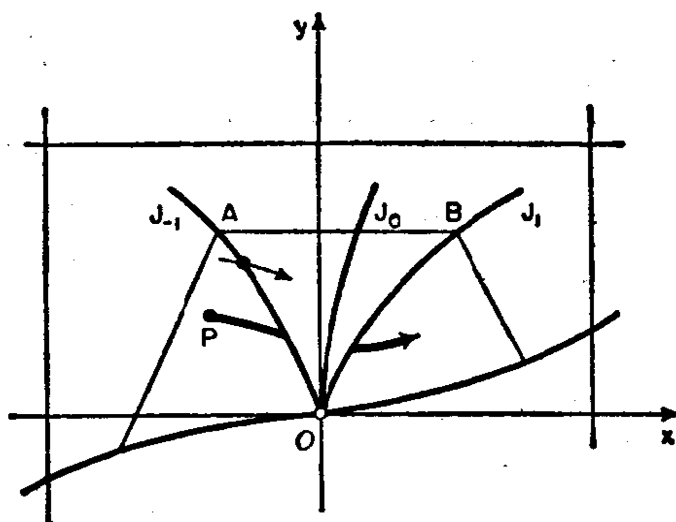


图 84

作为引理3的推论，可以按照函数$p(x,y)=[x+f(x,y)]/g(x,y)$在E^+(§ 4.3(c))中对固定的y，当x增加时常为单调增加或常为单调减小而分为两种情况，其特点分别是：情况(1)，当x增加而经过J_0时，函数$p(x,y)$由负值变到正值；情况(2)，当x增加而经过J_0时，$p(x,y)$由正值变到负值。

(c) 对情况(1)的分析可由下面的讨论来完成。图84中J_{-1}位于J_1的左方。由于对$|p|\leqslant 1$的所有J_p都属于E^+，在整个集合$D-E^+$中有$|g/x+f|<1$，亦即所有在$D-E^+$中的轨线$y(x)$均有$|y'(x)|<1$(在E^+中的轨线有$|y'(x)|>1$)。

由此可知，当x增加时，从J_{-1}左方的点$P\in D$出发的轨线不可能与过A点平行于直线$y=x$的线段相交，由唯一性它也不可

能与L相交．因此，或者轨线不与J_1相交而趋于O，或者在进入E^+时与J_{-1}相交，在相交处轨线的斜率为 $y'(x) = -1$．

对第二种情况则有，当y减少时轨线（在E^+中轨线上的每一点有$|x'(y)| < 1$）不可能与J_{-1}相交再离开E^+，也不可能与J_1相交再离开E^+，因为在J_1有 $x'(y) = 1$，J_1关于y轴的斜率的绝对值小于1．因此，由于y减少，所考虑的轨线必须停留在E^+中而趋于O．对从J_1右方的点P出发的所有轨线可类似地进行论证．

(d) 现在必须证明，从D中出发而趋于O的轨线L'，其切线趋于y轴．

由定理21的证明，对任意的m，特别地，对 $m > 1$，集合 B：$|x| \leqslant a$，$|y| \leqslant m|x|$ 中只有两条轨线（它们构成L）趋于O，它们的切线趋于x轴．因此，异于这些轨线的轨线L'在O的邻域内必须通过满足$|y| > m|x|$的点(x, y)．且若这些轨线趋于O，则它关于x轴的斜率在某点就必须充分大，使得对每一满足$0 < p \leqslant 1$的p_0有 $|x'(p)| < p_0$．

现在依据引理2，对满足$0 < p_0 \leqslant 1$的p_0，选取矩形R_0，对此$\varepsilon = p_0$．在R_0中由于满足 $|p| < p_0$ 的每一条J_p曲线只属于区域E_0^+（位于J_{-p_0}与J_{p_0}之内），并且如果轨线L'上有E^+中的点，则当y减少时轨线L'既不与J_{-p_0}相交，也不与J_{p_0}相交．对充分小的y，在L'上恒有$|x'(y)| < p_0 (y'(x) > 1/p_0)$．因此，当$L'$趋于$O$时其切线趋于$y$轴．

(e) 现在再来研究情况(2)(图85)．

这时J_1位于J_{-1}的左方．由于(d)中的论证仍然成立，故每一条不是曲线L的一部分而趋于O的轨线 L'（在O点的邻域内）必满足下述不等式

$$|x'(y)| < p_0, \tag{5.4.10}$$

对每一个满足$0 < p_0 \leqslant 1$的p_0．因此，特别地我们有$|x'(y)| < 1$．

每一条这样的L'必都进入E^+．设P是J_1上异于O的一点，通过P的轨线在P点的斜率等于1，因此它的绝对值小于J_1在P点的斜率($\varepsilon = 1$)，从而，当y增加时它进入E^+．由于在E^+中

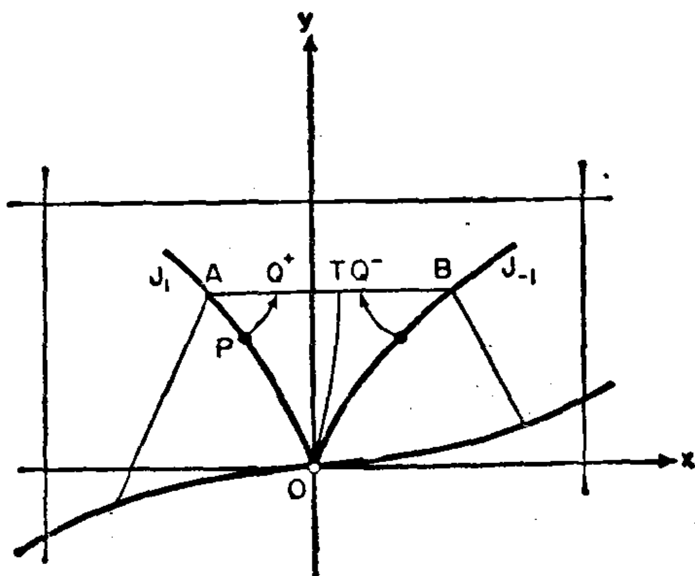


图 85

$|x'(y)|<1$,再由$|p(x,y)|\leqslant 1$ 这一事实得知，当 y 增加时，轨线既不可能与 J_1 相交而离开 E^+，也不可能与 J_{-1} 相交而离开它，因为在 J_{-1} 上有 $y'(x)=-1$.

对于从 J_{-1} 上异于 O 的点出发的轨线 L',同样的结论也成立. 因此,其上有点属于 D 和 E^+ 的轨线将与线段 AB 相交.

现在考察从 J_1, J_{-1} 上出发的轨线，并以 Q^+, Q^- 分别记它们与线段 AB 的交点. 由唯一性,每个点 Q^+ 必位于每个点 Q^- 的左方.

鉴于轨线作为 J_1 和 J_{-1} 上初始点的函数是连续变化的,Q^+ 点集充满 AB 右方的一个开区间,Q^- 点集充满 AB 左方的一个开区间. 在它们中间必存在一点 T，它既不是 Q^+ 也不是 Q^-. 过 T 的轨线趋于 O,因为它既不可能与 J_{-1} 相交,又不可能与 J_1 相交.

我们证明，具有这种性质的轨线不可能多于一条，如果有两条 $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, $x_1(\eta)<x_2(\eta)$, 则对 $0<y\leqslant\eta$ 有 $x_1(y)<x_2(y)$. 因此,$x_1'(y)<x_2'(y)$(情况(2)),在 y 与 η 之间积分就得到 $x_2(y)-x_1(y)>x_2(\eta)-x_1(\eta)$, 故当 $y\to 0$ 时此两曲线岔开,从而它们不可能都趋于 O.

下面我们证明，上述的唯一的趋于 O 的轨线，其切线趋于 y

轴．取 p_0，$0 < p_0 \leqslant 1$，并依引理 2 取矩形 R_0，其中 $\varepsilon = p_0$．在现在的情况（情况(2)）下 J_{p_0} 位于 J_{-p_0} 的左方．

在 J_{p_0} 上取异于 O 的点，类似于 $p_0 = 1$ 的情形，在这点进入 E_0^+ 的轨线，当 y 增加时既不能与 J_{p_0} 相交而离开 R_0，也不能与 J_{-p_0} 相交而离开 R_0，因此必与 R_0 的上边界相交而离开 R_0．另一方面，(5.4.10)指出，当 y 足够小时有属于 E^+ 的轨线，又由 p_0 的任意性，它整个地属于 E^+．从而，对于曲线 L 上方的 O 的邻域，定理 22 与 23 就得到了证明．

(f) 对于在曲线 L 下方的点，我们指出，若令 $\bar{y} = -y$，则轨线要作关于 x 轴的反射，系统 (5.4.4) 变成了 $\dot{x} = x + f(x, -\bar{y})$，$\dot{\bar{y}} = -g(x, -\bar{y})$，亦即函数 g 变成了 $-g$．由此得知，关于在 L 下方的点的情况，(1)与(2)的两个准则正好互相交换．

(g) 上述情形可以用第二章§3.2 中的例 1, 4, 5 和如下的系统来说明：

$$\dot{x} = x - y^2,\quad \dot{y} = y^2.$$

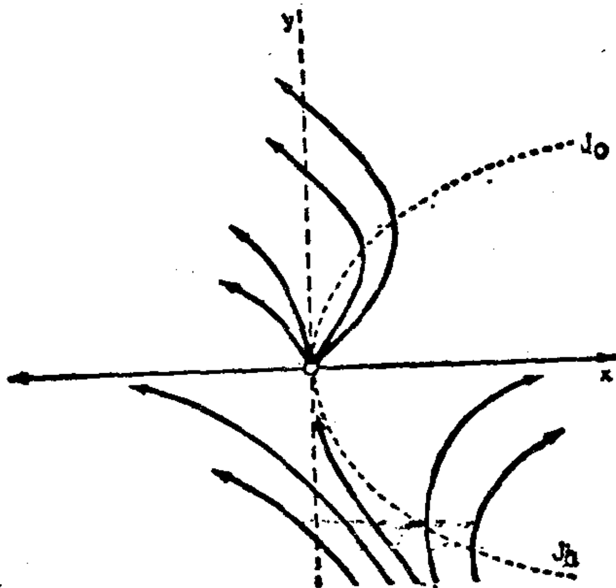


图 86

对最后这个例子，L 是 $y = 0$，J_0 是 $x = y^2$．点 O 是鞍-结点（图 86），这可由定理 22，23 或直接把这系统写为微分方程 $dx/dy - x/y^2 = -1$ 来验证．积分之，立刻得

$$x = e^{-1/y}\int_y^{y_0} e^{1/u}du + ce^{-1/u},\ 0 < y < y_0,$$

c 为常数.

$$x = -e^{-1/y}\int_y^{y_0} e^{1/u}du + ce^{1/u},\ y_0 \leqslant y < 0,$$

由这两个方程就可确定轨线的性态.

5. K. A. Keil 对于系统 $\dot{x} = y + f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ 的进一步结果

(a) 如 (5.4.4) 所进行的,本段将继续研究系统

$$\dot{x} = y + f(x, y),\ \dot{y} = g(x, y). \qquad (5.4.5)$$

其中 f, g 满足§ 4.1 中的假设. 这一情况下的等倾线 J_p 将由方程

$$H(x, y, p) = y + f(x, y) - pg(x, y) = 0$$

所确定,而不是由 (5.4.9) 所确定. 记 $p(x, y) = [y + f(x, y)]/g(x, y)$, 可以证明,存在 O 的邻域 $C(O, r)$,使得当 y 增加而经过位于 $C(O, r)$ 内 J_0 的那部分时, 对于横坐标 $x > 0$ 的一切点, $p(x, y)$ 或从负变到正, 或者从正变到负. 对 $x < 0$ 也类似. 我们将分两种情况进行考察: 情况(1),若 $x > 0$ 时 p 从负变到正, 又若 $x < 0$ 时 p 从正变到负; 情况(2),若 $x > 0$ 时 p 从正变到负,又若 $x < 0$ 时 p 从负变到正.

下面的定理我们只叙述而不予证明(参看 K. A. Keil [1] 第 126 页).

定理 24. 对于情况(1)且 $x > 0$, 在 O 附近位于半平面 $x > 0$ 内而趋于 O 的轨线,其切线趋于 x 轴;对 $x > 0$, 在等倾线 J_0 上方至少有一条趋于 O 的轨线;在 O 附近与 J_0 相交的轨线不趋于 O. 对 $x < 0$ 类似.

(b) 系统

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = 4|y - x^2|^{3/2} + 2xy$$

满足§ 4.1 中的假设. 对 $x > 0$ 我们来说明情况 (1). 当 $x > 0$ 时该系统满足定理 24 的假设, J_0 现在是 x 轴. 在 J_0 的上方至少存在两条趋于 O 的轨线, 即抛物线 $y = x^2$, $x > 0$ 和 $y = 2x^2$,

$x > 0$.

这例子说明了在定理24的条件下,对 $x > 0$, 在 J_0 的上方趋于 O 的轨线有可能多于一条.

对定理的假设作些修改,就可以证明,当 $x > 0$ 时,在 J_0 的上方和下方恰好各存在一条趋于 O 的轨线(见 K. A. Keil[1] 第 129 页).

系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 2x^2$$

就可以说明这一点. 这系统的轨线是四次曲线弧 $y^2 - x^4 =$ 常数(图 87).

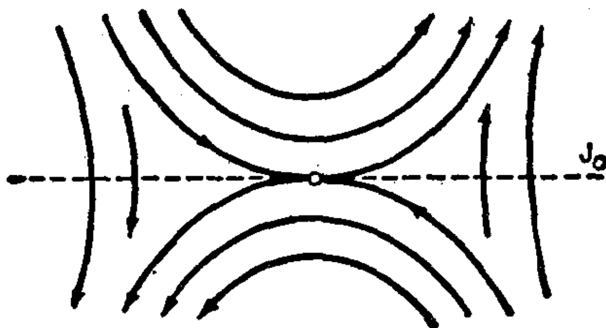


图 87

(c) **定理 25.** 对情况(2)且 $x > 0$, 则或者无轨线趋于 O, 或者有无穷多条轨线趋于 O, 且它们的切线趋于 x 轴. 对 $x < 0$

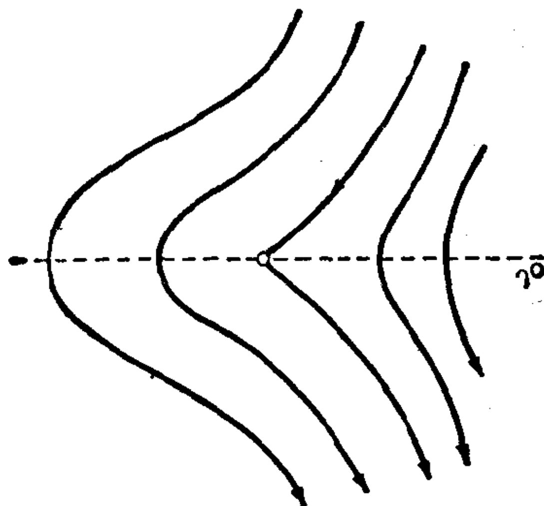


图 88

类似．如果没有轨线趋于 O，则 O 是中心或焦点．

(d) 第二章 §3.2 的例 6，7 可以说明定理 25，O 分别是这两个例子中的中心与焦点．

系统

$$\dot{x} = 2y,\ \dot{y} = 3x^2$$

可以说明 $x > 0$ 时的情况 (1) 和 $x < 0$ 时的情况 (2)．该系统的轨线是三次曲线弧 $y^2 - x^3 =$ 常数 (图 88)．

6.1,2,4 节的文献注记

最近几年，有关平面扰动系统的奇点又有一些文章，Frommer 方法已被大大推广． 有关解析系统的文献可到第三章末尾去找．这里我们列举一些有关非解析系统的其它文献：

A. F. Andreyev [1], [2]; M. Hukuhara [1]; I. S. Kukles [1]—[7]; I. S. Kukles-A. M. Suyarchayev [1], [2]; G. Sansone-R. Conti [2], [3]; P. Santoro [1]; R. E. Vinograd-D. M. Grobman [1].

§5. 结构稳定系统．含参数的系统

1. 结构稳定系统

(a) 物理问题往往需要对系统

$$\dot{x} = X(x, y),\ \dot{y} = Y(x, y) \tag{5.5.1}$$

进行分析，而其中函数 X 与 Y 只能近似地确定．因此有必要研究这样的系统，其轨线的性态在即将阐明的某种意义下不起本质的变化．

这种系统曾被 A. A. Andronov 与 L. S. Pontryagin [1] 研究过．我们在这里只是介绍一下结构稳定系统(“粗系统”)概念的定义和叙述一些定理．

由于 x, y 的物理解释，它们必须受到某些限制，因此可设函数 X, Y 仅仅定义在 x, y 平面的有界区域内而不是在整个平面

上.

特别,假定 X, Y 定义在集合 $\bar{G} = G + FG$ 上,即 $\bar{G}$ 是由具连续转动切线的闭 Jordan 曲线 FG 以及 FG 的内部区域所构成.此外,我们假定向量 (X, Y) 在 FG 的任一点既不与 FG 相切,也不等于零向量.

我们这里的结构稳定性定义最先是由 Andronov 与 Pontryagin 给出的. 他们假设 X, Y 在 $\bar{G}$ 中解析. 但整个这一理论可在仅设 X, Y 在G中为 C^1 类函数的情况下进行讨论, 如 H. F. DeBaggis [1] 给出的.

后来, M. M. Peixoto [1] 也给出了结构稳定性的另一等价定义,虽然外表上看上去限制是少了一些.他还把这一定义推广到 n 维系统中去,沿着这一方向进一步的研究工作有 M. M. Peixoto [2] 和 Ph. Hartman [1] 和 L. Marhus [1].

(b) **定义**.系统(5.1.1),其中 X, Y 在G内是 C^1 类函数,称为结构稳定系统,如果给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, 使得对 $\bar{G}$ 中任一对 C^1 类函数 $p(x, y)$, $q(x, y)$, 它们在 $\bar{G}$ 内满足条件

$$\left.\begin{array}{l} |p(x, y)| < \sigma, \quad |q(x, y)| < \sigma; \\ |p_x(x, y)| < \sigma, \quad |p_y(x, y)| < \sigma, \\ |q_x(x, y)| < \sigma, \quad |q_y(x, y)| < \sigma; \end{array}\right\} \quad (5.5.2)$$

必存在依赖于 p, q 与 ε 的, 将 $\bar{G}$ 变成其自身的双方连续的变换 T,使得: (α) T 将 (5.5.1) 的轨线变成系统

$$\dot{x} = X(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) + q(x, y) \quad (5.5.3)$$

的轨线.

(β) $\bar{G}$ 中每一点与它的象点之间的欧几里得距离 $\leqslant \varepsilon$.

满足上述条件的每对函数 p, q 称为(5.5.1)的容许扰动.

由于T将奇点变成奇点,环变成环, 开轨线变成开轨线, 故当 p, q 为容许扰动时,(5.5.3)的轨线的整体图形与(5.5.1)的无本质差别.

(c) 结构稳定系统由下面的定理来刻划, 这里只叙述而不予证明,其中所用述语已见§ 2.

定理 26. 若 FG，X，Y 满足 (a) 中的条件，则(5.5.1)是结构稳定系统的充分必要条件是(i)奇点只有有限个，且都为初等奇点；(ii) 它们不包括弱焦点；(iii) 从鞍点出发的分界线不回到同一鞍点，也不是另一鞍点的分界线；(iv) 极限环为有限个；(v) 每个环的特征指数 $\neq 0$ *⁾.

(d) 在对其规律可化为(5.5.1)的物理现象的研究中，我们常常必须从一个结构稳定系统连续地过渡到另一个结构稳定系统，中间要经过一个或几个非结构稳定系统. 这就要求对结构不稳定系统根据其对右端扰动项的敏感程度进行分析和分类. 在这方面，A. A. Andronov 与 E. A. Lentovich 于1938年在它们的论文[1] 中，对 X，Y 均在 G 内为解析的一类系统(5.5.1)作了研究，他们称这类系统为一阶稳定系统，并给出了刻划它们的许多结构方面的性质.

2. 结构不稳定系统. 极限环的产生

(a) 设 O 是(5.5.1)的弱焦点，且假设右端 X，Y 在 O 的邻域 $C(O, r)$ 内解析. 因此

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= a_{1,0}x + a_{0,1}y + \sum_{i+k>1} a_{i,k}x^i y^k = X(x, y),\\ \dot{y} &= b_{1,0}x + b_{0,1}y + \sum_{i+k>1} b_{i,k}x^i y^k = Y(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{5.5.4}$$

其中 $a_{i,k}$，$b_{i,k}$ 是实常数，且

$$\Omega = a_{1,0}b_{0,1} - b_{1,0}a_{0,1} > 0,\quad I = a_{1,0} + b_{0,1} = 0. \tag{5.5.5}$$

若第二章 §4 的假设满足，沿用§ 4 的记号，对通过 $(0, \rho_0)$ 的轨线 $\rho = \rho(\theta, \rho_0)$，我们有表达式

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho_0 = [u_1(2\pi) - 1]\rho_0 + u_2(2\pi)\rho_0^2 + \cdots + u_i(2\pi)\rho_0^i + \cdots$$

在假设(5.5.5)下，容易验证 $u_1(2\pi) - 1 = 0$，$u_2(2\pi) = 0$，

---

*⁾ 定理 26 的证明可参看叶彦谦著《极限环论》，第 184—198 页，上海科学技术出版社，1965 年。——译者注

$u_3(2\pi)$ 可为零也可不为零. 若 $u_3(2\pi) \neq 0$，则O称为一阶弱焦点；若 $u_3(2\pi) = 0$，则必有 $u_4(2\pi) = 0$. 一般，若

$$u_2(2\pi) = u_3(2\pi) = \cdots = u_{2k+1}(2\pi) = 0,$$

则 $u_{2k+2}(2\pi) = 0$. 若 $u_{2k+1}(2\pi)$ 是 $u_i(2\pi)$ 中第一个不为零者，则O称为k阶弱焦点.

(b) 在考虑以O为弱焦点的系统(5.5.4)的同时，我们还考虑扰动系统

$$\dot{x} = X(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) + q(x, y), \qquad (5.5.6)$$

其中 p, q 在O点等于零，且在 $C(O, r)$ 内解析.

系统(5.5.6)称为在 $C(O, r)$ 中属于系统(5.5.4)的 $(\delta)^s$ 邻域，如果在 $\bar{G}$ 中有

$$|p(x, y)| < \delta, \ |q(x, y)| < \delta, \ |\partial^{i+k}p/\partial x^i\partial y^k| < \delta,$$
$$|\partial^{i+k}q/\partial x^i\partial y^k| < \delta, \ 对\ i + k \leqslant s.$$

由于(5.5.4)不是结构稳定系统(定理26)，自然会期望对任意的 $\delta > 0$，存在属于(5.5.4)的某 $(\delta)^s$ 邻域，且在 $C(O, r)$ 内有环的扰动系统(5.5.6)，即使 $C(O, r)$ 内不含(5.5.4)的环. 事实上，我们有如下定理：

定理 27. 若O是系统(5.5.4)的k阶弱焦点，则(a)存在数 r_0, $\delta_0 > 0$，使得每一个在 $C(O, r_0)$ 内属于(5.5.4)的 $(\delta_0)^{2k+1}$ 邻域的系统(5.5.6)，在 $C(O, r_0)$ 内有不多于k个的环；(b)对所有满足 $0 < r < r_0$ 和 $0 < \delta < \delta_0$ 的 r 与 δ，确实有在 $C(O, r)$ 中属于(5.5.4)的 $(\delta)^{2k+1}$ 邻域的系统(5.5.6)，它在 $C(O, r)$ 内有k个环.

这定理见于 A. A. Andronov-E.A. Leontovich 的文章[2]，该文只有定理的叙述. 当(5.5.4)中的X与Y为二次多项式时，N. N. Bautin [1]，[2]作了详尽的研究. (5.5.4)中的X与Y为 $n \geqslant 2$ 次多项式的情形已被 N. F. Otrokov [1] 研究过.

(c) 弱焦点并不是产生极限环的唯一泉源. 极限环也可由变更以下系统的右端来得到：(a)具零特征指数系统的极限环(弱极限环)，特别地，具半稳定极限环的系统(见 A. A. Andronov-E. A.

Lentovich [2], N. F. Otrokov [2]), 或者(b)具鞍点的系统,它的两条分界线组成了奇轨线的一部分 (见 E. A. Leontovich [1], A. A. Andronov-E. A. Leontovich [3]).

由定理 26, 这种系统都是结构不稳定的, 因此上述情况是可能会出现的.

3. 含参数系统的极限环*)

(a) 在应用中常常出现如下形式的系统

$$\dot{x} = X(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Y(x, y, \lambda), \tag{5.5.7}$$

即 X, Y 不仅依赖于 x, y, 而且也依赖于在某个区间内变化的参数 λ, 此区间可以是有界的,也可以是无界的.

特别有兴趣的是这样一个问题: (5.5.7)的环随 λ 变化而变化的程度如何,以及是如何变化的.

对于解析系统,这个问题 M. Urabe [1] 曾作了完整的分析. 他对柱面上第二类环随参数变化的情况作了彻底的研究(见 M. Urabe [2], 除解析系统以外, 这问题的研究是困难的. G. F. D. Duff 和 T. Uno 在这方面找到了更一般的条件), G. F. D. Duff [1] 去掉解析性条件,改为假设

$$X(x, y, \lambda + 2\pi) = X(x, y, \lambda), \quad Y(x, y, \lambda + 2\pi) = Y(x, y, \lambda)$$

以及

$$X(x, y, \lambda + \pi) = -X(x, y, \lambda),$$
$$Y(x, y, \lambda + \pi) = -Y(x, y, \lambda).$$

T. Uno 在他的三篇文章中 (见 T. Uno [1], [2], [3]) 得到了类似的条件.

(b) 当(5.5.7)中的 λ 连续地变动而通过某一值 λ_0 时,这个系统的极限环的数目有可能突然增加一个或几个, 或是突然减少一个或几个. 这样的 λ 值称为**分歧值**. 系统(5.5.7)当 $\lambda = \lambda_0$ 时必

*) 有关极限环随参数变化的情况,更为详细的讨论,可参看叶彦谦著《极限环论》第 45—89 页,或秦元勋编著《微分方程所定义的积分曲线》下册第四章,科学出版社, 1959 年.——译者注

须是结构不稳定的． 环的数目的变化与下面一种或几种情况有关：(1) 系统

$$\dot{x}=X(x,y,\lambda_0),\quad \dot{y}=Y(x,y,\lambda_0) \tag{5.5.7$_0$}$$

有弱焦点；(2) 系统 (5.5.7$_0$) 有特征指数为零的极限环（弱极限环)，特别，有半稳定极限环；(3) 系统 (5.5.7$_0$) 有鞍点，它的两条分界线构成了奇轨线的一部分，或者构成两个不同鞍点的分界线；(4) 系统 (5.5.7$_0$) 有一非初等奇点；(5) 当 λ 变化而经过 λ_0 时，(5.5.7) 的奇点数目发生了变化．

在这些可能性方面，只有第一种情况有人对解析系统作了详细的研究（A. A. Andronov-C. E. Chaikin [1] 第六章 §2 考虑了一阶弱焦点的情况)．其它各种可能情况只有一些零碎的结果，且多数是举例而已．

由具参数系统的弱极限环产生环的情况见 M. Urabe [1] 与 A. A. Andronov-E. A. Leontovich [1]．

(c) 作为说明 (b) 的一个例子，下面的系统是很有意思的．

$$\dot{x}=y^2-(x+1)[(x-1)^2+\lambda],\quad \dot{y}=-xy. \tag{5.5.8}$$

T. Uno 和 R. Yokomi 对参数 λ 的某些值作了图象研究（参看 T. Uno-R. Yokomi [1])；由全面分析得知，当 λ 变化时，这系统出现 (b) 中除 (2) 以外的一切可能情况（见 G. Sansone-R. Conti [1])．

特别地，λ 的分歧值为 $\lambda=0$，$\lambda=1$；当 $\lambda\leqslant 0$ 及 $\lambda\geqslant 1$ 时这系统没有环，当 $0<\lambda<1$ 时该系统正好有两个都为稳定的环． 对于比 (5.5.8) 更一般的系统，N. Virgopia [1] 证明了类似的结果也成立． G. Villari [1] 研究了一个方程族，这时只有当两条不同的分界线重合时才会产生环．

参 考 文 献

ANDREYEV, A. F.

[1] On the first decision problem in Frommer's theory, *Vestnik Leningr Univ.*, **13** (1958), 84–86; *ibid.* **7** (1959), 18–25 (Russian).

[2] Frommer's method and one of its applications, *ibid. 19* (1960), 37–51 (Russian).

ANDRONOV, A. A. and CHAIKIN, C. E.

[1] *Theory of oscillations*, Princeton, 1949, Ch. VI.

ANDRONOV, A. A. and LEONTOVICH, E. A.

[1] Sur la théorie de la variation de la structure qualitative de la division du plan en trajectoires, *C. R. (Dokl.) Ac. Sci. URSS*, **21** (1938), 423–426.

[2] The generation of limit cycles from a weak focus or center or from a weak limit cycle, *Matem. Sbornik*, **40** (1956), 179–224 (Russian).

[3] On the generation of limit cycles from a loop separatrix and from a separatrix of a saddle-node, *ibid.* **48** (1959), 335–376 (Russian).

ANDRONOV, A. A. and PONTRYAGIN, L. S.

[1] Systèmes grossiers, *C. R. (Dokl.) Ac. Sci. URSS*, **14** (1937), 247–250.

BAUTIN, N. N.

[1] On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type, *Mat. Sbornik*, **30** (72), (1952) 181–196 (Russian); *Am. Math. Soc. Translation* No. 100 (1954).

[2] On periodic solutions of a system of differential equations, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **18** (1954), 128 (Russian).

BENDIXSON, I.

[1] Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta. Math.* **24** (1901), 1–88 : p. 34.

CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N.

[1] *Theory of ordinary differential equations*, New York, 1955, p. 378.

DEBAGGIS, H. F.

[1] *Dynamical systems with stable structures, Contr. to the theory of nonl. oscill.*, Vol. 2 (1952), 37–59. A Russian translation with Notes was made by M. I. MINKEVICH in *Uspekhi Mat. Nauk*, X, **4** (66) (1955), 101–126.

DUFF, G. F. D.

[1] Limit cycles and rotated vector fields, *Ann. of Math.*, **57** (1953), 15–31.

FORSTER, H.

[1] Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singülaren Punktes, *Math. Zeitschr.*, **43** (1938), 271–320.

FROMMER, M.

[1] Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, *Math. Annalen*, **109** (1934), 395–424.

HARTMAN, PH.

[1] A lemma in the theory of structural stability, *Proc. Am. Math. Soc.*, **11** (1960), 610–620.

HOHEISEL, G.

[1] Eindeutigkeitskriterien und Knoteninvarianz bei Differentialgleichungen, *Jahr. D. M. V.*, **42** (1933), 33–42.

HUKUHARA, M.

[1] Sur la forme des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, (3) **21** (1939), 183–190.

KEIL, K. A.

[1] Das qualitative Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung. erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, *Jahr. D. M. V.*, **57** (1955), 111–132.

KUKLES, I. S.

[1] On the singular points of certain differential equations, *Trudy 3- go Vsesoyuz. Mat. Syezda*, Moscow, 1956 vol. 3, 81–91 (Russian).

[2] On the behavior of the trajectories of the Hukuhara equation near the origin, *Dokl. Ak. Nauk UzSSR* 7 (1958), 5–9 (Russian).

[3] Same title, *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved., Matematika*, 1958, **3**, 111–122.

[4] Decision problems for Frommer's normal domains, *Akad. Nauk UzSSR Ser. Fiz. Mat.*, 1958, **5**, 69–78 (Russian).

[5] On Frommer's decision problem, *ibid.*, 1959, 1, 91–104 (Russian).

[6] On three decision problems, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, 128 (1959), 239–242 (Russian).

[7] On the first and second Frommer's decision problems, *Izv. Vysh Uchebn. Zaved., Matematika*, 1959, 2 (9), 101–116 (Russian).

KUKLES, I. S. and SUYARCHAYEV, A. M.

[1] Generalized Frommer's method, *ibid.*, 1960, 3 (16), 173–187 (Russian).

[2] On "almost singular" infinitesimal orders, *ibid.*, 1961, 1 (20), 104–118 (Russian).

LEONTOVICH, E. A.

[1] On the generation of limit cycles from separatrices, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **78** (1951), 641–644 (Russian).

LONN, E. R.

[1] Knoteninvarianz bei Differentialgleichungen, *Jahr. D. M. V.*, **43** (1934), 232–237.

[2] Über singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Math. Zeitsch.* **44** (1939), 507–530.

MARKUS, L.

[1] Structurally stable differential systems, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 1–19.

OTROKOV, N. F.

[1] On the number of limit cycles of an equation near a singular point, *Mat. Sbornik*, **34** (76), (1954), 127–144 (Russian).

[2] On multiple limit cycles, *ibid.*, 41 (1957), 417–430 (Russian).

PEIXOTO, M. M.

[1] On structural stability, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 199–222.

[2] Some examples of n-dimensional structural stability, *Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A.* **45** (1959), 633–636.

PERRON, O.

[1] Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in den Umgebung eines singulären Punktes, *Math. Zeitschr.*, **15** (1922), 120–146; *16* (1923), 273–295.

SANSONE, G.

[1] *Equazioni differentiali nel campo reale*, Vol. 2, Bologna, 1949.

SANSONE, G. and CONTI, R.

[1] Sull'equazione di T. Uno ed R. Yokomi, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **37** (1954), 37–59; *ibid.*, (4) **38** (1955), 205–212.

[2] Determinazione dell'integrale positivo minimo dell'equazione di M. Hukuhara *Revista Union Mat. Argent.*, 17 (1955), 213–216.

[3] On the equation $xy' = Ay^k + B(x)$, *Trudy 3-go Vsesoyuz. Mat. Syezda*, Moscow, 1956, Vol. 4, 156–161 (Russian).

SANTORO, P.

[1] Studio qualitativo del sistema $\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + f(x, y)$, $\dot{y} = dx^2 + exy + hy^2 + g(x, y)$, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) **12** (1957), 566–590.

TRICOMI, F.

[1] *Equazioni differenziali*, 2ª ediz., Torino, 19.

UNO, T.

[1] On the formation of limit cycles, *Math. Japonicae*, **2** (1951), 75–78.

[2] On the curves defined by some differential equations, *ibid.*, **2** (1952), 119–226.

[3] On some systematic methods for finding limit cycles, *Proc. 1st Japan. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1951, 513–516.

UNO, T. and YOKOMI, R.

[1] On some mode of appearance of limit cycles, *Math. Japonicae*, **2** (1952), 117–118.

URABE, M.

[1] Infinitesimal deformation of cycles, *Jour. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A* **18** (1954), 37–53; 401.

[2] Infinitesimal deformation of the periodic solution of the second kind and its application to the equation of a pendulum, *ibid.* 183–219; Supplement, *ibid.*

VILLARI, G.

[1] Cicli limite e fusione di separatrici, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **42** (1956), 259–277.

VINOGRAD, R. E. and GROBMAN, D. M.

[1] On Frommer decision problems, *Uspekhi Mat. Nauk*, XII (1957), 191–195 (Russian).

VIRGOPIA, N.

[1] Su una generalizzazione dell'equazione differenziale di T. Uno ed R. Yokomi, *Rend. Mat. e sue appl.*, (5) **15** (1956), 153–176.

WEYL, H.

[1] Concerning a classical problem in the theory of singular points of ordinary differential equations, *Revista de Ciencias, Lima*, **46** (1944), 73–112.

WINTNER, A.

[1] Vortices and nodes, *Am. Jour. Math.*, **69** (1947), 815–824.

ZAREMBA, S. K.

[1] Contribution à la discrimination des points singuliers des équations différentielles ordinaires, *Bull. Intern. Ac. Pol. Sci. Lettres, Cl. Sci. Math. Nat., Ser. A, Sci. Math.*, (1936), 439–445.

第六章　某些具单自由度的自治系统

在这一章里，我们将利用前几章得到的方法与结果，来研究某些出现在应用数学中的最重要的二阶方程．这些方程形如

$$\ddot{x}=\varphi(x,\dot{x}).$$

如果令 $\dot{x}=y$，这方程能化成方程组

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=\varphi(x,y).$$

根据 φ 的类型，有时不用 $\dot{x}=y$，而用其它的变换把方程式化为含有两个方程的一阶方程组，倒更为有利(见 § 3，§ 4，§ 5)．

§1. 在粘性阻尼作用下，质点的线性运动方程的轨线

1. 在粘性阻尼作用下质点的线性运动方程的轨线

(a) 首先，简要地温习一下我们在讨论中将用到的线性微分方程的某些性质．

考虑方程

$$\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}+x=0,\ (\dot{x}=dx/dt), \tag{6.1.1}$$

其中 ε 为常数．如有必要，可将 t 换成 $-t$，故可以假设 $\varepsilon>0$．

(6.1.1) 的特征方程

$$\rho^2+\varepsilon\rho+1=0 \tag{6.1.2}$$

的判别式 $\lesseqgtr 0$ 取决于 $\varepsilon\lesseqgtr 2$．

(i) 如果 $\varepsilon>2$，且令

$$\alpha=-\varepsilon/2+(\varepsilon^2/4-1)^{1/2},\ \beta=-\varepsilon/2-(\varepsilon^2/4-1)^{1/2}, \tag{6.1.3}$$

则 (6.1.1) 的解为

$$x=c_1e^{\alpha t}+c_2e^{\beta t},\ \dot{x}=c_1\alpha e^{\alpha t}+c_2\beta e^{\beta t}, \tag{6.1.4}$$

其中 c_1 和 c_2 为任意常数．

(ii) 如果 $\varepsilon=2$，则 (6.1.1) 的解为

$$x = e^{-t}(c_1 t + c_2),\ \dot{x} = e^{-t}(-c_1 t + (c_1 - c_2)). \tag{6.1.5}$$

(iii) 最后,如果 $0 < \varepsilon < 2$, 则解为

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-\varepsilon t/2} \sin[(1 - \varepsilon^2/4)^{1/2} t + c_2], \\ \dot{x} &= c_1 e^{-\varepsilon t/2} \sin[(1 - \varepsilon^2/4)^{1/2} t + c_2 + \omega], \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

其中 ω 由

$$\cos\omega = -\varepsilon/2,\ \sin\omega = (1 - \varepsilon^2/4)^{1/2},\ (-\pi/2 < \omega < 0) \tag{6.1.6'}$$

确定.

(b) 如果令 $\dot{x} = y$, 方程 (6.1.1) 等价于系统

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -\varepsilon y - x. \tag{6.1.7}$$

这系统的轨线满足

$$dy/dx = -(x + \varepsilon y)/y. \tag{6.1.8}$$

原点 O 为该系统的唯一奇点. 根据第二章 §1 中关于线性系统的结果,立即看出: (i) 如果 $\varepsilon > 2$, O 是双切结点,其两条切线的斜率为 α 与 β (后者为孤立切线); (ii) 如果 $\varepsilon = 2$, O 为单切结点,其切线斜率为 -1; (iii) 如果 $0 < \varepsilon < 2$, 则 O 是焦点,且总是稳定的. 最后,如果 $\varepsilon = 0$, 则 O 是一个中心.

§ 2. 方程 $\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta - \beta = 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$

1. 引言

(a) 在力学及电学中,对方程 $\ddot{\theta} + A\dot{\theta} + B\sin\theta - C = 0$ (A, B 为正常数)的研究最为重要. 如果把 $\sqrt{B}\,t$ 变成 t,并令 $\alpha = A/\sqrt{B}$, $\beta = C/\sqrt{B}$, 方程就化成

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta - \beta = 0, \tag{6.2.1}$$

其中 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ 为确定的常数.

方程 (6.2.1) 是本节的主题,它是一个点的摆动方程,这个点受到重力的作用,还受到一个大小不变而切于该点的圆弧轨道的力的作用以及粘性阻力的作用,这个点在铅直平面里振动. 式中 $\theta(t)$ 是摆与向下的垂线之间的夹角. $\alpha = 0$ 的情形相当于没有阻

尼；$\beta=0$ 的情形意味着没有外力；而 $\alpha=\beta=0$ 的情形已经在第四章 §5 中考虑过了.

$\alpha=0$, $\beta\geqslant 0$ 的情形已由 A. A. Andronov 和 C. E. Chaikin [1] 彻底讨论过，因此，我们在这里只专注于 $\alpha>0$ 的情形. 这种情况也出现在同步电机起动的瞬时现象中.

与同步电机有关的问题，请参看 H. E. Edgerton-P. Fourmarier [1], F. Bottani [1], N. P. Vlasov [1], [2], E. Jasse [1].

(b) 令 $\dot\theta=z$，方程 (6.2.1) 化成系统

$$\dot\theta=z,\ \dot z=-\alpha z-\sin\theta+\beta, \tag{6.2.2}$$

它的每一个解都在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义(参看 Sansone [7]，第 16 页)，且如果 $\theta(t)$, $z(t)$ 为 (6.2.2) 的解，则对于每个整数 k, $\theta(t)+2k\pi$, $z(t)$ 显然也是解. (6.2.2) 的轨线满足方程

$$dz/d\theta=(\beta-\alpha z-\sin\theta)/z\quad(\alpha>0,\beta\geqslant 0), \tag{6.2.3}$$

在 θ_0 及 $\theta_0+2k\pi$ (k 为整数) 取相同值的两个解 $z(\theta)$ 处处相等，即由 $z(\theta_0)=z(\theta_0+2k\pi)$ (k 为整数) 可以推出，对每一个 θ 均有 $z(\theta+2k\pi)=z(\theta)$, $k=0,\pm1,\cdots$. 相反地，如果 $z=z(\theta)$ 为 (6.2.3) 的周期为 $\omega>0$ 的周期解，由于 $zdz/d\theta-\beta+\alpha z=-\sin\theta$，可以推出 $\sin(\theta+k\omega)=\sin\theta$，因此 $\omega=2l\pi$, l 为整数. 所以，如果存在周期解，它们的周期一定是 2π 的倍数. 事实上，我们将看到，这个周期正好就是 2π.

如果 $\beta>1$, (6.2.2) 就没有奇点，为方便起见，把 $\beta>1$ 和 $0\leqslant\beta<1$ 两个情况分开研究. 因此，将在 §2.2 中研究 $\beta>1$ 的情形；在 §2.6 中研究 $\beta=1$ 的情形；在其它各节中研究 $0\leqslant\beta<1$ 的情形.

2. $\beta>1$ 的情形. (6.2.3) 的周期解 $z=z(\theta)$ 的存在性

(a) 如果 $\beta>1$ 且 $z<0$, $dz/d\theta=(\beta-\sin\theta)/z-\alpha<0$，由此可知，在半平面 $z<0$ 内，由 θ 增加时，(6.2.3) 的解的纵坐标递减，且当 $\theta\to+\infty$ 时，它趋向于 $-\infty$. 还可以推出，当 $z\to 0_+$ 时，$\lim dz/d\theta=+\infty$，而当 $z\to 0_-$ 时，$\lim dz/d\theta=$

$-\infty$. 所以轨线与 θ 轴正交.

现在来研究轨线在半平面 $z>0$ 中的性态. 如果我们把 θ 与 z 当成极坐标(θ 为极角, z 为向径), 并考虑两个圆 C_1 和 C_2(图 89), 它们的中心在原点, 半径分别为 $[(\beta+1)/\alpha]+\varepsilon$ 及 $[(\beta-1)/\alpha]-\varepsilon$, 其中 $0<\varepsilon<(\beta-1)/\alpha$. 又如果 $P[Q]$ 为 $C_1[C_2]$ 上极角为 θ 的点, 过 $P[Q]$ 的轨线 $\Gamma_1[\Gamma_2]$ 的切线与向径的夹角 $\sigma_1[\sigma_2]$ 满足

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\sigma_1 &= \frac{z'(\theta)}{z(\theta)} = \left(\frac{\beta-\sin\theta}{\alpha z}-1\right)\frac{\alpha}{z}\\ &= \left(\frac{\beta-\sin\theta}{\beta+1+\alpha\varepsilon}-1\right)\frac{\alpha}{z}\\ &= -\frac{(1+\sin\theta)+\alpha\varepsilon}{\beta+1+\alpha\varepsilon}\cdot\frac{\alpha}{z}<0.\end{aligned}$$

$$\left[\operatorname{ctg}\sigma_2 = \frac{(1-\sin\theta)+\alpha\varepsilon}{\beta-1-\alpha\varepsilon}\cdot\frac{\alpha}{z}>0\right].$$

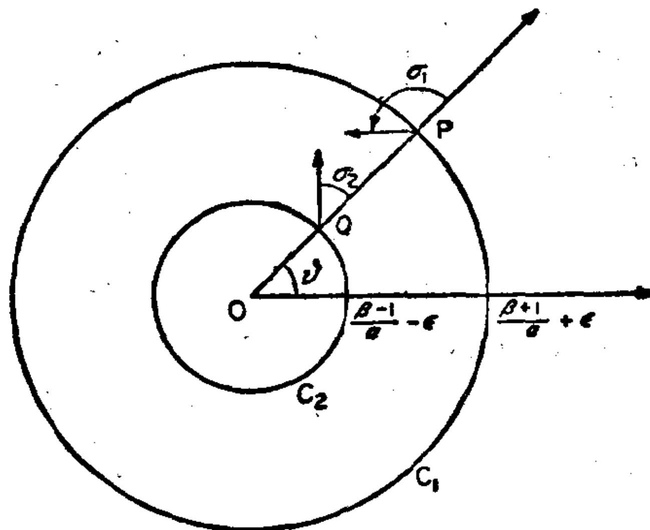


图 89

所以, $\Gamma_1[\Gamma_2]$ 在 $P[Q]$ 的切线指向由 C_1 和 C_2 所围成的环域 D 内部. 因此, (6.2.3) 的由 D 内的点出发的每一条积分曲线, 都整个保持在 D 之中. 由于在 D 中没有奇点, 因而在 D 的内部至少存在 (6.2.3) 的一个解 $z=z_0(\theta)$ (第四章定理 25), 满足

$$z_0(\theta+2\pi)=z_0(\theta). \tag{6.2.4}$$

而且，由于 ε 是任意的，这个解就位于由中心在原点，半径分别为 $(\beta+1)/\alpha$ 和 $(\beta-1)/\alpha$ 的两个圆所围成的环域内.

我们注意到，由 (6.2.3) 可以推出

$$\frac{1}{2} dz^2/d\theta = \beta - \sin\theta - \alpha z, \tag{6.2.5}$$

因此，把 (6.2.5) 关于解 (6.2.4) 从 0 到 2π 积分，就得到

$$2\pi\beta = \alpha \int_0^{2\pi} z_0(\theta) d\theta, \tag{6.2.6}$$

它就是使 (6.2.4) 成立，也就是使得 (6.2.3) 的解为以 2π 为周期的周期解的充要条件.

条件 (6.2.6) 证明了 $z_0(\theta)$ 是 (6.2.3) 的唯一的周期解. 因为，如果还有另一个周期 $z_1(\theta)$，则对于所有的 θ，或者 $z_1(\theta) > z_0(\theta)$，或者 $z_1(\theta) < z_0(\theta)$，而由此可以推出

$$\alpha \int_0^{2\pi} z_1(\theta) d\theta \neq 2\pi\beta,$$

这就说明 $z_1(\theta)$ 不可能是以 2π 为周期的.

(b) 如果我们把(6.2.2)的轨线表示在圆柱面上（第四章§ 5），周期解 $z = z_0(\theta)$ 就对应一条闭曲线 Γ，它和柱面的所有母线都相交（第二类环），所有其它的轨线的象曲线都渐近于它（图 90）. 由于没有奇点，柱面上就没有第一类环.

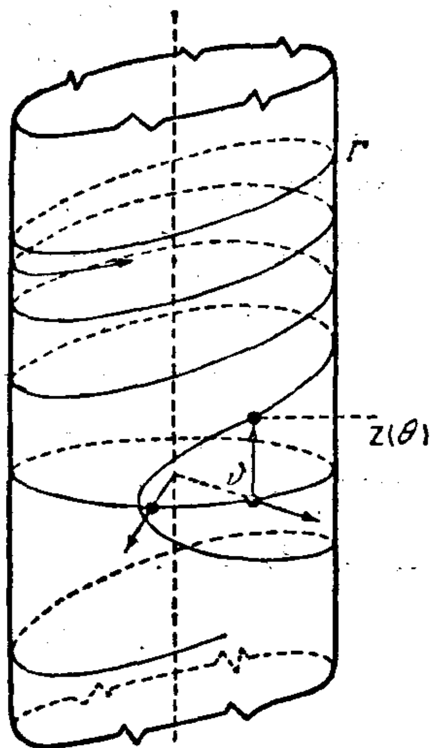


图 90

3. $0 < \beta < 1$ 的情形. 奇点的分类

(a) 如果令

$$\theta_0 = \arcsin\beta, \quad (0 < \theta_0 < \pi/2, \ \beta = \sin\theta_0), \tag{6.2.7}$$

则 (6.2.3) 可以写成

$$dz/d\theta = (\sin\theta_0 - \sin\theta - \alpha z)/z, \tag{6.2.8}$$

我们马上看出点 $A_k = ((2k-1)\pi - \theta_0,\ 0)$，$B_k = (2k\pi + \theta_0,\ 0)$，$(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 是仅有的奇点，为了确定它们的类型，我们可以应用第五章 §2 的结果. 首先，由于(6.2.2)是一个解析系统，如果它的奇点是初等的，则它们就应是结点，鞍点，中心或者焦点.

对于点 B_k，如果令 $\theta = 2k\pi + \theta_0 + \eta$，(6.2.8)的简化方程为 $dz/d\eta = (-\alpha z - \eta\cos\theta_0)/\eta$，对应的特征方程 $\rho^2 + \alpha\rho + \cos\theta_0 = 0$ 有根 $\bar{\rho}_1 = -\alpha/2 + (\alpha^2/4 - \cos\theta_0)^{1/2}$ 及 $\bar{\rho}_2 = -\alpha/2 - (\alpha^2/4 - \cos\theta_0)^{1/2}$.

如果 $0 < \alpha^2 < 4\cos\theta_0$，$\bar{\rho}_1$ 和 $\bar{\rho}_2$ 为共轭复数，则点 B_k 为焦点；如果 $\alpha^2 > 4\cos\theta_0$，则 $\bar{\rho}_1$ 和 $\bar{\rho}_2$ 为同号实数，所以点 B_k 为结点；如果 $\alpha = 0$，以后我们将看到(§ 2.4)，点 B_k 为中心.

关于点 A_k，如果令 $\theta = (2k-1)\pi - \theta_0 + \eta$，(6.2.8)的简化方程为 $dz/d\eta = (-\alpha z + \eta\cos\theta_0)/z$，对应的特征方程 $\rho^2 + \alpha\rho - \cos\theta_0 = 0$ 有根

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\alpha/2 + (\alpha^2/4 + \cos\theta_0)^{1/2} > 0, \\ \rho_2 &= -\alpha/2 - (\alpha^2/4 + \cos\theta_0)^{1/2} < 0, \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

它们是异号实数. 因此，点 A_k 是鞍点，且两条分界线在该点的斜率由(6.2.9)给出.

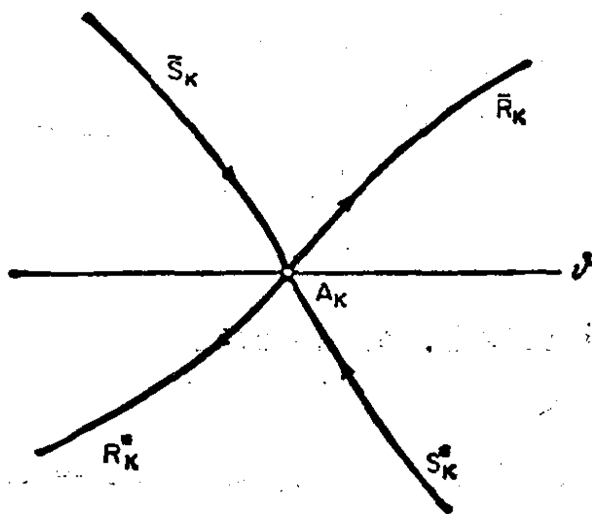


图 91

在过 A_k 的斜率为 $\rho_1[\rho_2]$ 的两条分界线中，我们把当其上的点接近于 A_k 时纵坐标>0 的那一支记为 $\bar{R}_k[\bar{S}_k]$，而把当其上的点接近于 A_k 时，纵坐标<0 的那一支记为 $R_k^*[S_k^*]$. 由于 $\dot{\theta}=z$，分界线的方向如图 91 中的箭头所示.

当没有必要区分 $\bar{R}_k$ 和 $R_k^*[\bar{S}_k$ 和 $S_k^*]$ 时，就以 $R_k[S_k]$ 表示 $\bar{R}_k[\bar{S}_k]$ 和 $R_k^*[S_k^*]$. 如果 R_k 的一个弧段是关于 θ 轴的简单情形(即与直线 $\theta=$ 常数最多相交于一点)，就将这段弧记为 $z=g_k(\theta)$，而 S_k 的弧段则记为 $z=f_k(\theta)$.

(b) 轨线上切线平行于 θ 轴的点的轨迹是方程为

$$S:\ z=(\sin\theta_0-\sin\theta)/\alpha \tag{6.2.10}$$

的正弦型曲线，它正好在点 A_k 与 B_k 和 θ 轴相交. 在 θ, z 平面上，由 θ 轴和以 A_k 与 B_k(或 B_{k-1} 与 A_k) 为端点的弧段所围成的区域内部的点，都有 $dz/d\theta>0$，而在作为这些区域的余集的无界区域内的点，则有 $dz/d\theta<0$ (图 92).

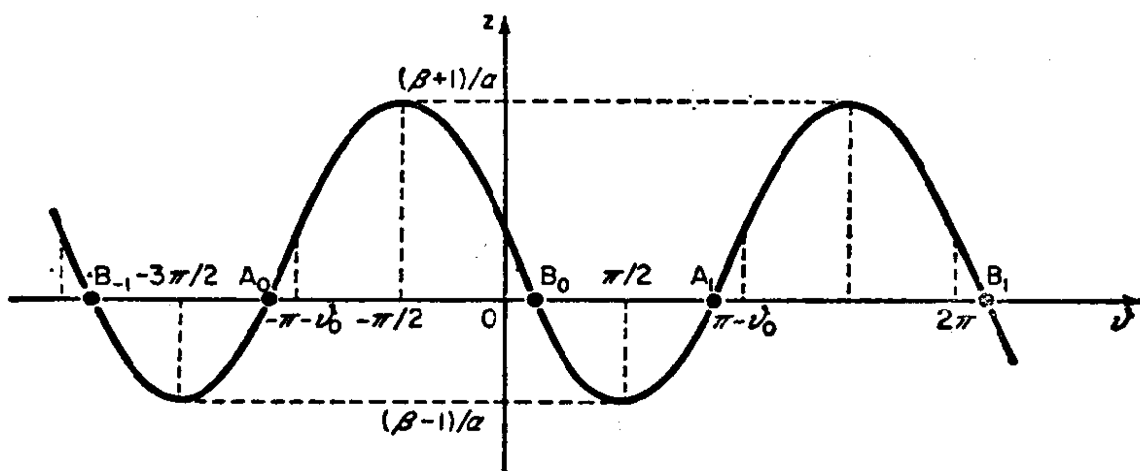


图 92

4. 极限情形 $\alpha=0$ 时的轨线

下面我们有必要来研究方程 (6.2.8)，当 $\alpha=0$ 时的情形，也就是方程

$$dz/d\theta=(\sin\theta_0-\sin\theta)/z. \tag{6.2.11}$$

显然有 $d(z^2/2)/d\theta=\sin\theta_0-\sin\theta$，因此，在这种情形，轨线为曲线族

$$l_c:\ \frac{1}{2}z^2 = \cos\theta + \theta\sin\theta_0 + c \quad (c\ 为常数), \tag{6.2.12}$$

或者，令
$$\varphi(\theta) = -\cos\theta - \theta\sin\theta_0, \tag{6.2.13}$$

l_c 的方程为

$$l_c:\ z = \pm\sqrt{2(c-\varphi(\theta))},\ (c\ 为常数).$$

由于 $\varphi'(\theta) = \sin\theta - \sin\theta_0$，$\varphi''(\theta) = \cos\theta$，$\varphi(\theta)$ 在点 A_k 取相对极大值，而在点 B_k 取相对极小值．而且，由于 $\varphi(\theta+2\pi) = \varphi(\theta) - 2\pi\sin\theta_0$，$\varphi(\theta)$ 的图形就可以由 $\varphi(\theta)$ 在区间 $[-\pi-\theta_0, \pi-\theta_0]$ 上的图形，沿 θ 轴方向平移 $2k\pi$，沿 φ 轴方向平移 $-2k\pi\sin\theta_0$ 而得到(图 93)．

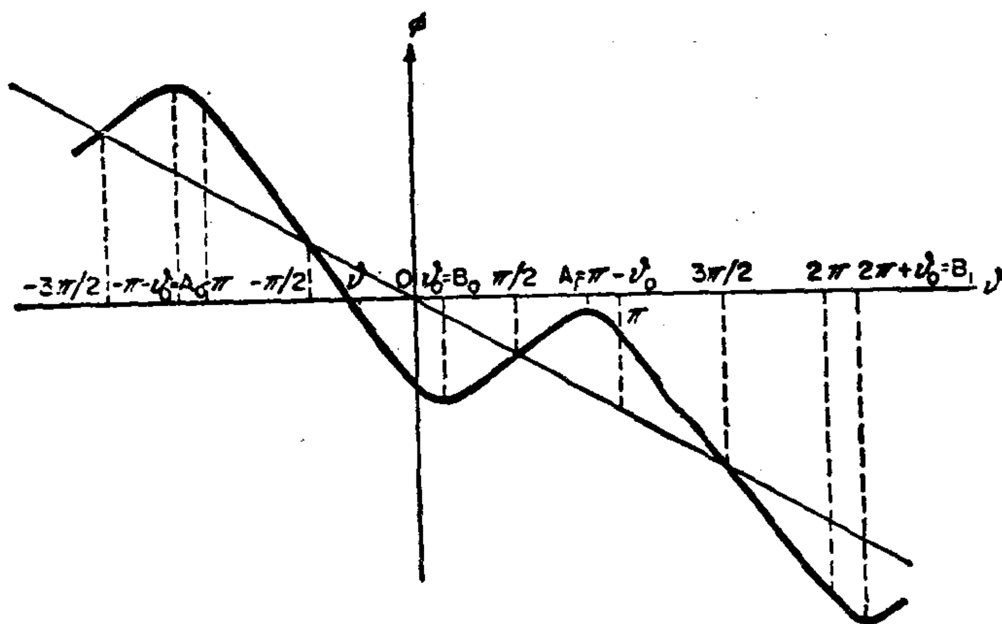


图 93

令 θ 在 $[-\pi-\theta_0, \pi-\theta_0]$ 上变化．如果常数 $c = \varphi(\theta_0)$，则 l_c 退化为一点 $B_0 = (\theta_0, 0)$．如果 $\varphi(\theta_0) < c < \varphi(\pi-\theta_0)$，则点 (θ, z) 描出一条闭轨线 l_c(柱面上的第一类环)，它把 B_0 包含在其内部．我们还注意到，如果 $c' < c''$，则曲线 $l_{c'}$ 在曲线 $l_{c''}$ 的内部，因此，B_0 是一个中心．如果 c 取到值 $\bar{c} = \varphi(\pi-\theta_0) = \cos\theta_0 - (\pi-\theta_0)\sin\theta_0 < \varphi(-\pi-\theta_0)$，则存在唯一的值 $\bar{\theta} \in (-\pi-\theta_0, \pi-\theta_0)$，使得当 $\bar{\theta} < \theta < \pi-\theta_0$ 时有 $\varphi(\theta) < \bar{c}$，而对应的 $l_{\bar{c}}$ 是一条除 A_1 外都有连续切线的闭曲线，而在 A_1 点，曲线

有一个角点，其切线的斜率分别为$\pm\sqrt{\cos\theta_0}$. 我们注意到，$z=\{2[\cos\theta_0-(\pi-\theta)\sin\theta_0+\cos\theta+\theta\sin\theta_0]\}^{1/2}=\{2[\cos\theta-\cos(\pi-\theta_0)-(\pi-\theta_0-\theta)\sin\theta_0]\}^{1/2}=(\pi-\theta_0-\theta)\sqrt{\cos(\theta_0+\varepsilon)}$，其中当 $\theta\to\pi-\theta_0-0$ 时，$\varepsilon\to 0$.

曲线 l_2 由(6.2.11)的两条轨线组成，即鞍点 A_1 和由分界线 R_1^* 及 $\bar{S}_1$ 所构成的轨线. 与其它的点 A_k 相应的轨线，可以由与 A_1 相应的轨线沿着 θ 轴平移 $2k\pi$ 而得到，其中 k 为整数.

由于(6.2.11)的所有轨线都关于 θ 轴对称，因此，为了描述(6.2.11)的其它轨线的性质，只须考虑由线段 A_0A_1 上的点出发的，由 θ 增加时所确定的那些轨线就可以了(图 94).

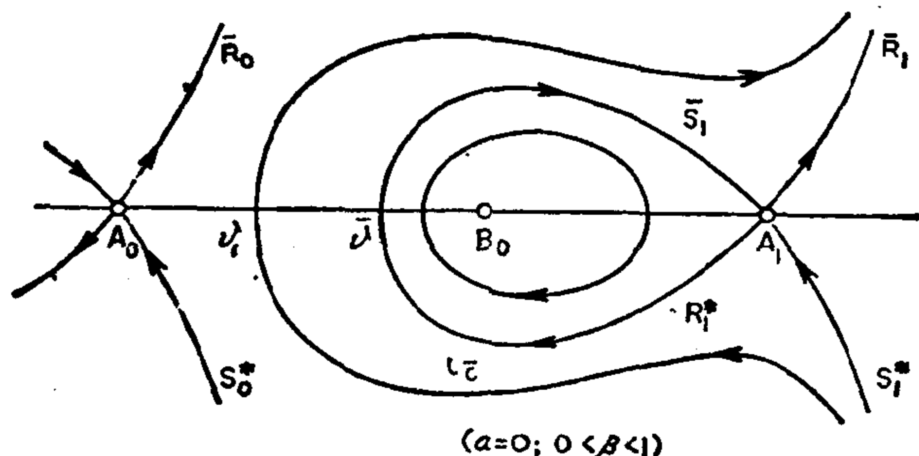


图 94

从 A_0 可引出轨线 S_0^* 和 $\bar{R}_0$，它们是由 S_1^* 和 $\bar{R}_1$ 沿 θ 轴平移 -2π 而得到. 对于 θ 轴上固定的满足 $-\pi-\theta_0<\theta_1<\bar{\theta}$ 的 θ_1，通过这点的轨线 $z=\pm z(\theta)$ 在 θ_1 与 θ 轴正交，且当 $\theta\to+\infty$ 时，$\lim[\pm z(\theta)]=\pm\infty$.

5. $\alpha>0$, $0<\beta<1$ 的情形. (6.2.3)的周期解和临界值 $\alpha(\theta_0)$

(a) 在下面对(6.2.8)的分析中，θ_0 将保持固定，$\theta_0=\arcsin\beta$，$0<\theta_0<\pi/2$，而 α 变化.

我们立即注意到，轨线只在 θ 轴上异于 A_k 和 B_k 的点有垂直切线，且没有垂直于 θ 轴的渐近线.

(b) 这里以及§2.7 和§2.8 所做的分析，是根据 F. Tricomi 的工作[1]，[2].

我们来研究通过 A_k 的分界线的性态，以 A_0 为例(图 95).

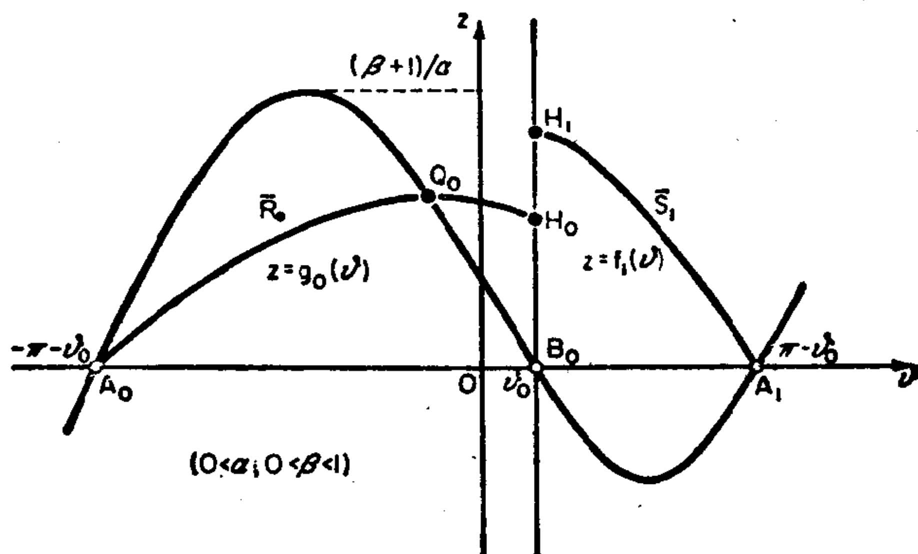


图 95

由 (6.2.10) 所确定的正弦型曲线 S 在 A_0 的斜率为$(\cos\theta_0)/\alpha$，但由 (6.2.9) 有 $(\cos\theta_0)/\alpha>\rho_1$，而 $\bar{R}_0$ 是从由 θ 轴和 S 的弧 $\widehat{A_0B_0}$ 所围成的区域内出发的，于是它与 S 交于一点 Q_0，且在这点有水平切线. 在 Q_0 之后，$\bar{R}_0$ 的纵坐标开始递减. 由于 $\bar{R}_0$ 不可能再与 S 的弧 $\widehat{Q_0B_0}$ 相交，它就将与直线 $\theta=\theta_0$ 相交于一点 H_0，其纵坐标满足 $|B_0H_0|\geqslant 0$. 因此，$|B_0H_0|$ 不会超过 S 在 $-\pi-\theta_0$ 到 θ_0 之间的最大纵坐标. 于是有

$$|B_0H_0|<(\beta+1)/\alpha. \tag{6.2.14}$$

现在考虑经过 A_1 的轨线 $\bar{S}_1$. 当 θ 由 $\pi-\theta_0$ 递减到 θ_0 时，$\bar{S}_1$ 的纵坐标递增，而 $\bar{S}_1$ 可以表达为 $z=f_1(\theta)$. 把 $\bar{S}_1$ 与直线 $\theta=\theta_0$ 的交点记为 H_1. 我们将证明，对于充分小的 α，有 $|B_0H_1|<|B_0H_0|$，而对于充分大的 α，则有 $|B_0H_1|>|B_0H_0|$. 由于通过 A_0 和 A_1 的轨线的斜率有界，根据轨线对于 α 的连续相依性可以推出，至少存在 α 的一个值，使得 $|B_0H_1|=|B_0H_0|$，即 $\bar{R}_0$ 与 $\bar{S}_1$ 重合.

如果 $\alpha=0$，根据§2.4可推出 $|B_0H_1|<|B_0H_0|$，所以对于充分小的 $\alpha>0$，这个关系仍然保持.

现在由 (6.2.8) 可得 $df_1(\theta)/d\theta=(\sin\theta_0-\sin\theta)/f_1(\theta)-\alpha<-\alpha$，把它在 $[\theta_0, \pi-\theta_0]$ 上积分，就得出 $-|B_0H_1|<-\alpha(\pi-2\theta_0)$，也就是

$$|B_0H_1|>2\alpha(\pi/2-\theta_0). \tag{6.2.15}$$

将它与(6.2.14)相比较，再根据轨线对 α 的连续相依性，就可以推出如果 α 充分大，则 $|B_0H_1|>|B_0H_0|$，于是我们的论断得证.

(c) 现在我们需要一条关于 α 的不同值所对应的轨线的比较引理.

引理. 设 $z_1(\theta)$，$z_2(\theta)$ 为(6.2.8)的与 α 的两个不同值 α_1 与 $\alpha_2(0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2)$ 相对应的两条轨线，那末，在一点 $\bar{\theta}$: (1) 如果 $z_2(\bar{\theta})\geqslant z_1(\bar{\theta})>0$ 或者 $z_2(\bar{\theta})>z_1(\bar{\theta})\geqslant 0$，则当 $z_1(\theta)$和 $z_2(\theta)$ 对 $\theta<\bar{\theta}$ 保持为正时，有 $z_2(\theta)>z_1(\theta)$; (2) 如果 $z_2(\bar{\theta})\leqslant z_1(\bar{\theta})<0$ 或者 $z_2(\bar{\theta})<z_1(\bar{\theta})\leqslant 0$，则当 $z_1(\theta_1)$ 和 $z_2(\theta)$对 $\theta>\bar{\theta}$ 保持为负时，有 $z_2(\theta)<z_1(\theta)$; (3) 如果 $z_1(\bar{\theta})=z_2(\bar{\theta})=0$，且在 $\bar{\theta}$ 的右方［左方］的一个无论多么小的邻域中，$z_1(\theta)$，$z_2(\theta)$ 和 $z_2(\theta)-z_1(\theta)$ 都为负［正］，则只要 $z_1(\theta)$ 不与 θ 轴相交，对于每一 $\theta>\bar{\theta}[\theta<\bar{\theta}]$，$z_1(\theta)$，$z_2(\theta)$ 和 $z_2(\theta)-z_1(\theta)$ 也都将为负[正]. 图96表明了这三种情形.

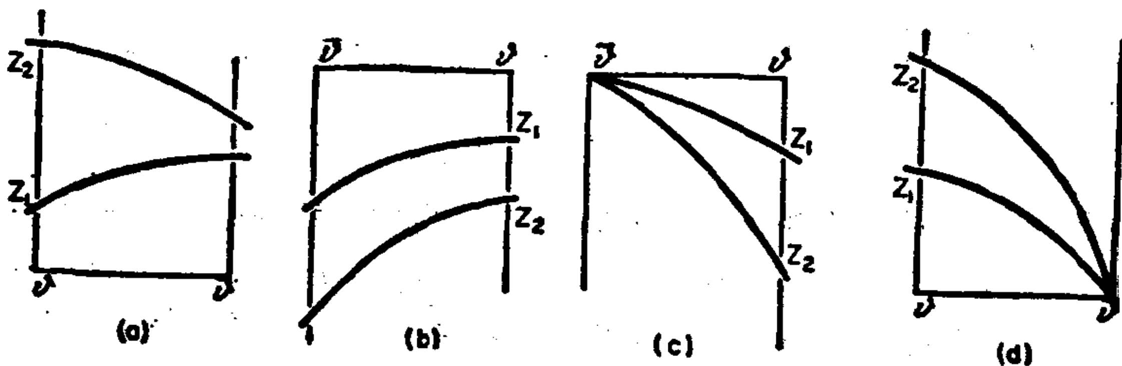


图 96

引理的证明并不太费事. 首先，由 (6.2.8) 有

$$\frac{1}{2} dz_1^2/d\theta + \alpha_1 z_1 + \sin\theta - \sin\theta_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2} dz_2^2/d\theta + \alpha_2 z_2 + \sin\theta - \sin\theta_0 = 0,$$

由此可得

$$\frac{1}{2} d(z_2^2 - z_1^2)/d\theta = (\alpha_1 - \alpha_2)z_2 + \alpha_1(z_1 - z_2).$$

在情形(1)有 $d(z_2^2 - z_1^2)/d\theta|_{\theta=\bar{\theta}} < 0$，在情形(2)有 $d(z_2^2 - z_1^2)/d\theta|_{\theta=\bar{\theta}} > 0$，而对情形(3)，在充分靠近 $\bar{\theta}$ 右方[左方]的点，有 $d(z_2^2 - z_1^2)/d\theta > 0[<0]$.

由刚才证明的引理可知，与 α 的相异二值对应的，且在 θ 轴同一侧的两个轨线弧段，除了在 θ 轴上的点外，不可能有任何公共点.

(d) 现在我们可以证明，对于固定的 $\theta_0(0 < \theta_0 < \pi/2$，或者 $0 < \beta < 1)$，使得 $\bar{R}_0 = \bar{S}_1$ 的值 $\alpha = \alpha(\theta_0)$ 是唯一的，也就是说，对于固定的 θ_0，当 α 变化时，存在唯一的值 $\alpha(\theta_0)$，它对应着半平面 $z \geqslant 0$ 中的一条联接 A_0 与 A_1 的轨线，这条轨线记为 $\Gamma(\alpha(\theta_0))$。

假如不然，若对于二值 α_1 与 $\alpha_2(\alpha_1 < \alpha_2)$，在半平面 $z \geqslant 0$ 中，存在两条联接 A_0 与 A_1 的轨线.

这两条轨线记为 Γ_1 与 Γ_2，它们在 A_0 的斜率分别为

$$\rho_1^{(1)} = -\alpha_1/2 + (\alpha_1^2/4 + \cos\theta_0)^{1/2},$$

$$\rho_1^{(2)} = -\alpha_2/2 + (\alpha_2^2/4 + \cos\theta_0)^{1/2},$$

而在 A_1，分别为

$$\rho_2^{(1)} = -\alpha_1/2 - (\alpha_1^2/4 + \cos\theta_0)^{1/2},$$

$$\rho_2^{(2)} = -\alpha_2/2 - (\alpha_2^2/4 + \cos\theta_0)^{1/2},$$

由于 $\rho_1^{(1)} > \rho_1^{(2)}$，$0 > \rho_2^{(1)} > \rho_2^{(2)}$，在 A_0 的右方的一个区间里，Γ_2 在 Γ_1 的下方，在 A_1 左方的一个区间里，Γ_1 在 Γ_2 的下方. 因而两条曲线至少有一个公共点 P，其横坐标 θ^* 满足 $-\pi - \theta_0 < \theta^* < \pi - \theta_0$. 但是，在 A_1，(c) 中引理的情形(3)的条件成立，故点 P 不可能存在，矛盾.

(e) 设 $\alpha(\theta_0)$ 仍然表示 α 的那样的值，它所对应的轨线把 A_0 与 A_1 联接起来. 取定 α 的一个值，$0 < \alpha < \alpha(\theta_0)$. 我们知道 $|B_0H_1| < |B_0H_0|$，且由于 α 所对应的轨线 $\bar{R}_0$ 不能与轨线弧 $\widehat{A_1H_1}$ 相交，因此，它将在一点 K_0(图 97) 穿过直线 $\theta = \pi - \theta_0$，且有表达式 $z = g_0(\theta)$，其中 $g_0(-\pi - \theta_0) = 0 < |A_1K_0| = g_0(\pi - \theta_0)$，即

$$0 = g_0(-\pi - \theta_0) < g_0(\pi - \theta_0). \qquad (6.2.16)$$

如果考虑过点 $L_0 = (\pi - \theta_0, (\beta + 1)/\alpha)$ 的轨线 $z = z(\theta)$，

图 97

由于当 θ 由 $\pi - \theta_0$ 递减到 $-\pi - \theta_0$ 时，纵坐标 z 为正且递增($dz/d\theta < 0$)，这条轨线就不能与曲线 S 相交，并有

$$z(-\pi - \theta_0) > z(\pi - \theta_0) > 0. \qquad (6.2.17)$$

如果 M_0 为直线 $\theta = -\pi - \theta_0$ 上纵坐标为 $z(-\pi - \theta_0)$ 的点，当一点 P 扫过线段 $\overline{A_0M_0}$ 时，根据 (6.2.16)，(6.2.17) 以及 (6.2.8) 的解的连续相依性，在 $\overline{A_0M_0}$ 内部必至少存在一点 P，使得由 P 出发的轨线在区间 A_0A_1 上的方程为

$$z = Z(\theta),\ Z(\theta) > 0,\ (-\pi - \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0), \qquad (6.2.18)$$

且满足条件

$$Z(-\pi - \theta_0) = Z(\pi - \theta_0),$$

即 $z = Z(\theta)$ 是 (6.2.8) 的周期解. 根据 §2.2(a) 中的理由，它是唯一的. 在圆柱面表示法中，$z = Z(\theta)$ 就对应着一个第二类

环.

概括起来，我们已经证明：对于满足 $0<\alpha<\alpha(\theta_0)$ 的每个 α，(6.2.8) 有且仅有一个以 2π 为周期的周期解 $z=Z(\theta)$ 而且 $Z(\theta)>0$.

(f) 现在取定 $\alpha>\alpha(\theta_0)$. 我们将证明，对于 $\alpha>\alpha(\theta_0)$，(6.2.8) 没有周期解.

设如不然，若 $z=Z^*(\theta)$ 为 (6.2.8) 的对应于 α 的周期解，Γ^* 为对应的轨线.

现在以 S_1^* 为例来讨论 S_k^* 的一个共同性质，如果我们将这条轨线(图 98)与对应于 $\alpha=0$ 的轨线相比较，后者方程为

$$z=-\{2[\cos\theta+\cos\theta_0]$$
$$+[\theta-(\pi-\theta_0)]\sin\theta_0\}^{1/2},\ (\theta\geqslant\pi-\theta_0). \qquad (6.2.19)$$

根据 (c) 中的比较引理的情形 (3)，S_1^* 不能有垂直的渐近线，且总保持在 (6.2.19) 的下方，因此，当 $\theta\to+\infty$ 时，它的纵坐标将趋于 $-\infty$.

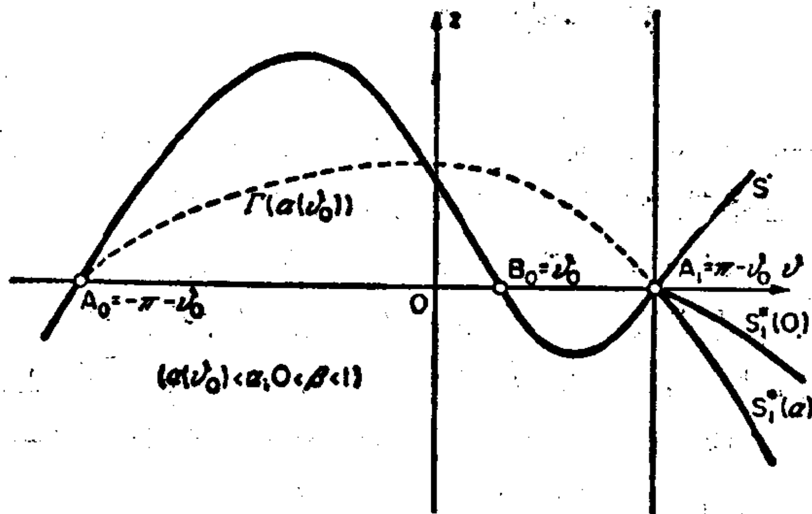


图 98

于是，如果 $z^*(\pi-\theta_0)<0$，则因为由点 $[\pi-\theta_0, z^*(\pi-\theta_0)]$ 出发的轨线不能穿过 S_1^*，$z^*(\theta)$ 就不会是周期解.

如果 $z^*(\pi-\theta_0)=0$，轨线应当联接 A_0 和 A_1，但是，由于已假设 $\alpha>\alpha(\theta_0)$，此为不可能. 因此有 $z^*(\pi-\theta_0)>0$.

但是,如果我们将 Γ^* 和联接 A_0 与 A_1 的轨道 $\Gamma(\alpha(\theta_0))$ 比较,由于 $\alpha>\alpha(\theta_0)$,当 θ 由 $\pi-\theta_0$ 递减到 $-\pi-\theta_0$ 时,根据 (c) 中的引理的情形(1),Γ^* 整个在 $\Gamma(\alpha(\theta_0))$ 的上方,且根据 (6.2.6),可以推出

$$(2\pi\sin\theta_0)/\alpha(\theta_0)=\int_0^{2\pi} Z(\theta)d\theta<\int_0^{2\pi} z^*(\theta)d\theta=(2\pi\sin\theta_0)/\alpha,$$

由此可知 $\alpha<\alpha(\theta_0)$,与假设矛盾.

(g) 数值 $\alpha(\theta_0)$ 称为 α 关于方程 (6.2.8) 的临界值.

我们有如下的定理:

定理. (F. Tricomi). 对于固定的 θ_0, $0<\theta_0<\pi/2$ (或者 $0<\beta<1$),对应着唯一的临界值 $\alpha(\theta_0)$,使得对于 $0<\alpha<\alpha(\theta_0)$,(6.2.8) 有唯一的周期为 2π 的周期解 $z=Z(\theta)$,且这个解总为正的. 然而,如果 $\alpha>\alpha(\theta_0)$,则没有周期解 $z(\theta)$.

当 $\alpha=\alpha(\theta_0)$ 时,连接点对……; A_{-1}, A_0; A_0, A_1; A_1, A_2; ··· 的轨道弧可以看成伪周期解 $z=Z(\theta)$,它们以……, A_{-1}, A_0, A_1, ···为顶点.

在 §2.8 里,我们要给出关于 $\alpha(\theta_0)$ 的不等式,在 §2.9 中,将介绍 M. Urabe 的某些近期的结果.

6. $\theta_0=\pi/2(\beta=1)$ 的情形

(a) 在这种情形,系统 (6.2.2) 可写成

$$\dot\theta=z,\ \dot z=1-\sin\theta-\alpha z, \tag{6.2.20}$$

在§ 2.3(a) 中所考虑的点 A_k 和 B_k 恰为点

$$C_k=((4k+1)\pi/2,0),\ k=0,\pm1,\cdots.$$

为了研究 (6.2.20) 的轨线的性态,作平移 $\theta=(4k+1)\pi/2+\eta$,它把 (6.2.20) 化成系统

$$\dot\eta=z,\ \dot z=1-\cos\eta-\alpha z,$$

且把 C_k 映射到原点.

利用仿射变换

$$x=z,\ y=z+\alpha\eta(\alpha>0), \tag{6.2.21}$$

并把自变量由 t 换成 $-\alpha t$，(6.2.20) 就化成

$$\dot{x}=x-\frac{2}{\alpha}\sin^2\frac{y-x}{2\alpha},\quad \dot{y}=-\frac{2}{\alpha}\sin^2\frac{y-x}{2\alpha},\quad (6.2.22)$$

它是在第五章研究过的形如 (5.4.4) 的系统，其中

$$f(x,y)=g(x,y)=-2\alpha^{-1}\sin^2[(y-x)/2\alpha].\quad (6.2.23)$$

从第五章的定理 23，我们可以确定原点关于(6.2.22)的性态.

引用第五章§ 4.1 的记号，曲线 J_0 的方程为 $\alpha x=2\sin^2[(y-x)/2\alpha]$，由此可知 $x\geqslant 0$，而 J_0 的方程变为

$$y=\pm 2^{1/2}\alpha^{3/2}x^{1/2}\left\{1\pm 2^{-1/2}\alpha^{-3/2}x^{1/2}+\frac{1!!}{2!!}\frac{\alpha x}{2}+\frac{3!!}{4!!}\frac{\alpha^2x^2}{2^2}+\cdots\right\},$$

因此，对于充分小的 x，曲线 J_0 近似于抛物线 $y^2=2\alpha^3x$.

第五章定理 23 的函数 $p(x,y)=(x+f)/g$ 的符号与

$$2\sin^2[(y-x)/2\alpha]-\alpha x$$

的符号一致；因此，当 x 由负值递增为正值时，$p(x,y)$ 由正值递减为负值. 所以系统 (6.2.22) 在原点附近的性态为：存在两条(孤立的)趋向原点的轨线 Γ_1 和 Γ_{-1}，它们分别与 x 轴的正半轴和负半轴相切，且在第一象限内存在一条(孤立)轨线 Γ_2，它趋向原点而与正 y 半轴相切，最后，在半平面 $y<0$ 内，所有轨线都趋向原点，而与负 y 半轴相切.

因此，原点呈鞍结点的状态，且由于变换 (6.2.21) 分别把正 x 半轴和正 y 半轴映射为 η，z 平面的第二象限中的射线 $z=-\eta/\alpha$ 和正 η 半轴，轨线在点 C_k 的邻近的性态如图 99 所示.

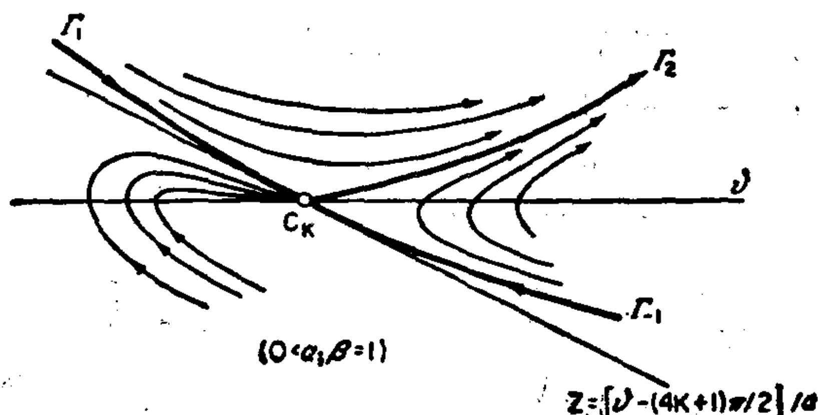


图 99

(b) 用类似于§ 2.5 中对于 $0<\beta<1$ 的情形所进行的研究，可以证明临界值 $\alpha(\pi/2)$ 的存在性，在§ 2.9 中我们将看到，M. Urabe 确定此数值为 1.193.

(c) 在上述分析中，我们假设 $\alpha>0$. 然而，第五章§ 4 的结果也可以应用于 $\alpha=0$ $(\beta=1)$ 的情形，这时，轨线如图 100 所示（参照 A. A. Andronov-C.E. Chaikin [1]，第 291 页）. 这种情形没有环.

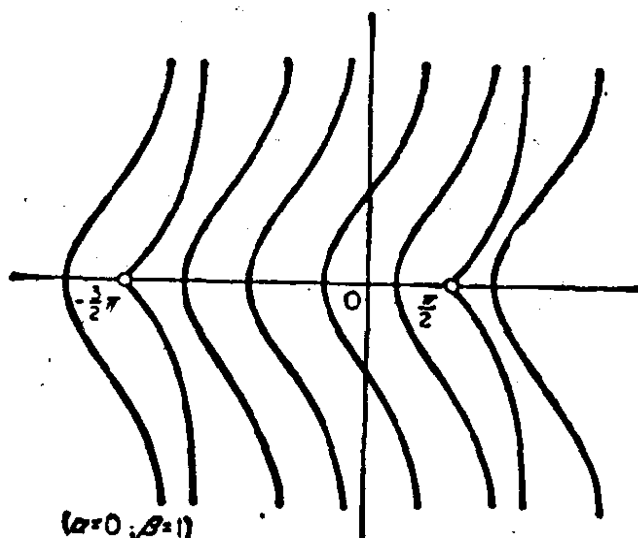


图 100

7. $0<\theta_0<\pi/2(\alpha>0,\ 0<\beta<1)$时的轨线

现在我们要叙述 L. Amerio [1] 关于方程

$$\frac{dz}{d\theta}=(\sin\theta_0-\sin\theta-\alpha z)/z \tag{6.2.8}$$

的解的性态的某些结果.

(a) 首先证明，当 $t\to+\infty$ 时，所有点 B_k 都是稳定的.

设 $z=z(\theta)$ 为(6.2.8)的一个解. 如果 $\varphi(\theta)$ 为 (6.2.13) 所定义的函数，则

$$d[z^2/2+\varphi(\theta)]/d\theta=-\alpha z, \tag{6.2.24}$$

因此 $d[z^2/2+\varphi(\theta)]/dt=-\alpha z^2$，这就证明了，当 $\alpha>0$ 而 t 增加时，$z^2/2+\varphi(\theta)$ 是 t 的递减函数.

现在，如果我们考虑(6.2.12)所定义的曲线族 l_c，在 $\alpha=0$ 的

情形，它们是围绕 B_0 的环族(柱面上的第一类环)，当 c 增加时，它们向外展开，且被§2.4 中所定义的曲线 l_2 所包围. 我们可以断言，如果系统(6.2.2)的轨线有一点属于由 l_2 所包围的区域 T_0，且异于 A_1，则当 t 增加时，它将总是保持在 T_0 的内部，因此，点 B_0(点 B_k)是稳定的.

由于 R_1^* 在 A_1 的斜率 m 为 $-\alpha/2+(\alpha^2/4+\cos\theta_0)^{1/2}$，而 $0<m<\sqrt{\cos\theta_0}$，由此得知 R_1^* 有属于 T_0 内部的点，因此它整个地保持在 l_2 的内部(图 101).

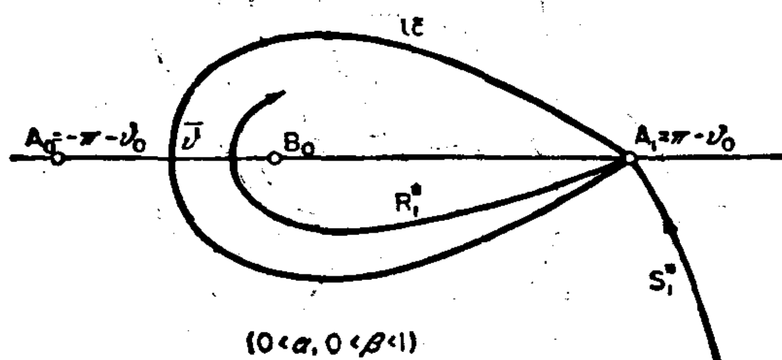


图 101

(b) 如果将轨线 $\bar{R}_0$ 表示为 $z=g_0(\theta,\alpha)$，曲线 $\bar{S}_1$ 表示为 $z=f_1(\theta,\alpha)$，则在半平面 $z\geqslant 0$ 上使得 $g_0(\theta,\alpha)$ 和 $f_1(\theta,\alpha)$ 都在 $\theta\in[-\pi-\theta_0,\pi-\theta_0]$ 上有定义的那一部份中，当 $0\leqslant\alpha<\alpha(\theta_0)$ 时，有 $g_0(\theta,\alpha)>f_1(\theta,\alpha)$; $g_0(\theta,\alpha(\theta_0))=f_1(\theta,\alpha(\theta_0))$ (§ 2.5，(d))，而当 $\alpha>\alpha(\theta_0)$ 时，有 $g_0(\theta,\alpha)<f_1(\theta,\alpha)$. 所以，在 $\bar{R}_0$ 和 $\bar{S}_1$ 的属于 $[-\pi-\theta_0,\pi-\theta_0]$ 的公共定义区间上，如果 $\alpha<\alpha(\theta_0)$，$\bar{S}_1$ 就在 $\bar{R}_0$ 的下方；如果 $\alpha=\alpha(\theta_0)$，$\bar{R}_0$ 就与 $\bar{S}_1$ 重合；如果 $\alpha>\alpha(\theta_0)$，$\bar{R}_0$ 就在 $\bar{S}_1$ 的下方.

其次，我们考虑 $\alpha<\alpha(\theta_0)$ 情形时的轨线.

当 θ 从 $\pi-\theta_0$ 递减到 θ_0 时，$\bar{S}_1$ 的纵坐标递增，且 $\bar{S}_1$ 穿过直线 $\theta=\theta_0$；让 t 递减并沿 $\bar{S}_1$ 观察. 由于 $\bar{S}_1$ 在开始时是在 l_2 之外，它就一直保持在区域 T_0 之外，且在横坐标为 $-\pi-\theta_0$ 与 θ_0 之间的 θ_a 的点穿过 θ 轴. 继续让 t 递减并观察 $\bar{S}_1$，我们将发现它是在 S_0^* 与 S_1^* 之间的一个弧，当 $\theta\to+\infty$ 时，它的纵坐标$\to-\infty$

(图 102).

(c) 设 $\alpha < \alpha(\theta_0)$, 且 $z = Z(\theta)$ 为对应于 α 的周期解. 因为,如果轨线在某点的纵坐标 $\geqslant (\beta+1)/\alpha$, 则当 $\theta \to -\infty$ 时,其纵坐标将趋于 $+\infty$,所以周期解的纵坐标为正,且小于 $(\beta+1)/\alpha$. 因此,周期解满足不等式

$$0 < Z(\theta) < (\beta+1)/\alpha. \tag{6.2.25}$$

其次,我们来研究这样的解 $z = z(\theta)$ 的性态,它们在 θ 的某个值满足 $z(\theta) > Z(\theta)$,因而对于所有的 θ 都满足这个不等式. 我们有

$$\int_\theta^{\theta+2\pi} z(s)ds > \int_\theta^{\theta+2\pi} Z(s)ds = 2\pi \cdot \frac{\sin\theta_0}{\alpha}.$$

但从 (6.2.24) 和 (6.2.13), 我们得到

$$\frac{1}{2}z^2(\theta+2\pi) - \frac{1}{2}z^2(\theta) = 2\pi\sin\theta_0 - \alpha\int_0^{\theta+2\pi} z(s)ds < 0.$$

由于 $z(\theta)$ 和 $z(\theta+2\pi)$ 是正的,故有 $z(\theta) > z(\theta+2\pi)$. 因此,当 $k \to +\infty$ 时, $\lim z(\theta+2k\pi)$ 存在有限极限.

对于固定的 θ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 k_0, 使得对于 $k \geqslant k_0$, 我们有

$$0 < \frac{1}{2}z^2(\theta+2k\pi) - \frac{1}{2}z^2(\theta+2(k+1)\pi) < \varepsilon.$$

因此,

$$0 < \alpha\int_{\theta+2k\pi}^{\theta+2(k+1)\pi} z(s)ds - 2\pi\sin\theta_0 < \varepsilon,$$

以及

$$0 < \alpha\int_{\theta+2k\pi}^{\theta+2(k+1)\pi} [z(s) - Z(s)]ds < \varepsilon.$$

又由于 $z(s) - Z(s) > 0$, 故有

$$0 < \min_{\theta+2k\pi < s < \theta+2(k+1)\pi} [z(s) - Z(s)] < \varepsilon/\alpha\pi \ (k \geqslant k_0).$$

也就是说,解 $z(\theta)$ 渐近地趋于 $Z(\theta)$ (参看 F.Tricomi [1], p.13—14). 注意到,如果 h 表示 $Z(\theta)$ 在一个周期内的最小值, 则 $d\theta/dt = z(\theta) > Z(\theta) \geqslant h > 0$,因此, 当 $t \to +\infty$ 时, $\lim\theta(x) =$

$+\infty$.

(d) 现在，我们来证明(参看 L. Amerio [1], p.88—90)：在 $z=Z(\theta)$ 的下方，存在其它的区域，通过这些区域中的点的轨线，渐近地趋近于 $z=Z(\theta)$. 为此，我们证明：$Z(\theta)$ 可以由 $g_0(\theta)$ 在 $\theta\in[-\pi-\theta_0,\ \pi-\theta_0]$ 上的值来计算，即证明：若 k 取正整数列，则当 $k\to+\infty$ 时，$\lim g_0(\theta+2k\pi)=Z(\theta)$ 对 $\theta\in[-\pi-\theta_0,\pi-\theta_0]$ 一致成立.

事实上，$g_0(\theta)$ 对所有 $\theta\geqslant-\pi-\theta_0$ 都有定义，且 $Z(\theta)>g_0(\theta)$ $(\theta\geqslant-\pi-\theta_0)$. 因此，若把 θ 换成 $\theta+2k\pi$，就可以得到 $Z(\theta)>g_0(\theta+2k\pi)(k=0,1,\cdots)$. 由于 $g_1(\theta)$ (由点 $(\pi-\theta_0,0)$ 出发)可以由 $g_0(\theta)$ 沿 θ 轴平移 2π 而得到，我们有 $g_0(\theta)<g_0(\theta+2\pi)$，一般地有

$$0<g_0(\theta)<g_0(\theta+2\pi)<\cdots<g_0(\theta+2k\pi)<\cdots<Z(\theta),$$

所以，

$$\lim_{k\to+\infty}g_0(\theta+2k\pi)=\bar{z}(\theta)\leqslant Z(\theta) \tag{6.2.26}$$

在每一个有限区间上一致成立，且可知 $\bar{z}(\theta)$ 连续. 函数 $\bar{z}(\theta)$ 也是以 2π 为周期的周期函数. 事实上，

$$\begin{aligned}\bar{z}(\theta+2\pi)&=\lim_{k\to+\infty}g_0(\theta+2\pi+2k\pi)\\&=\lim_{k\to+\infty}g_0(\theta+2(k+1)\pi)=\bar{z}(\theta).\end{aligned}$$

我们还可以推出，对于 $\theta\in[-\pi-\theta_0,\ \pi-\theta_0]$，$g_{-k}(\theta)=g_0(\theta+2k\pi)$，$g_{-k}(\theta)>\cdots>g_{-1}(\theta)>\nu>0$，$\nu$ 为常数，因此

$$\left|\frac{\sin\theta_0-\sin\theta}{g_{-k}(\theta)}-\alpha\right|\leqslant L, \tag{6.2.27}$$

其中 L 为一不依赖于 k 的常数.

在 (6.2.8) 中取 $z=g_{-k}(\theta)$，并由 $-\pi-\theta_0$ 到 θ 积分，得到

$$g_{-k}(\theta)=g_{-k}(-\pi-\theta_0)+\int_{-\pi-\theta_0}^{\theta}\left[\frac{\sin\theta_0-\sin\varphi}{g_{-k}(\varphi)}-\alpha\right]d\varphi,$$

再根据 (6.2.26) 和 (6.2.27)，对 $k\to+\infty$ 取极限，得到

$$\bar{z}(\theta)=\bar{z}(-\pi-\theta_0)+\int_{-\pi-\theta_0}^{\theta}\left[\frac{\sin\theta_0-\sin\varphi}{\bar{z}(\varphi)}-\alpha\right]d\varphi.$$

所以，函数 $\bar{z}(\theta)$ 满足微分方程(6.2.8)，它以 2π 为周期，且因为只有唯一的周期解，故 $\bar{z}(\theta)$ 与 $Z(\theta)$ 完全相同.

综上所述，我们得出结论，如果 $0 < \alpha < \alpha(\theta_0)$，轨线的性态如图 102 所示.

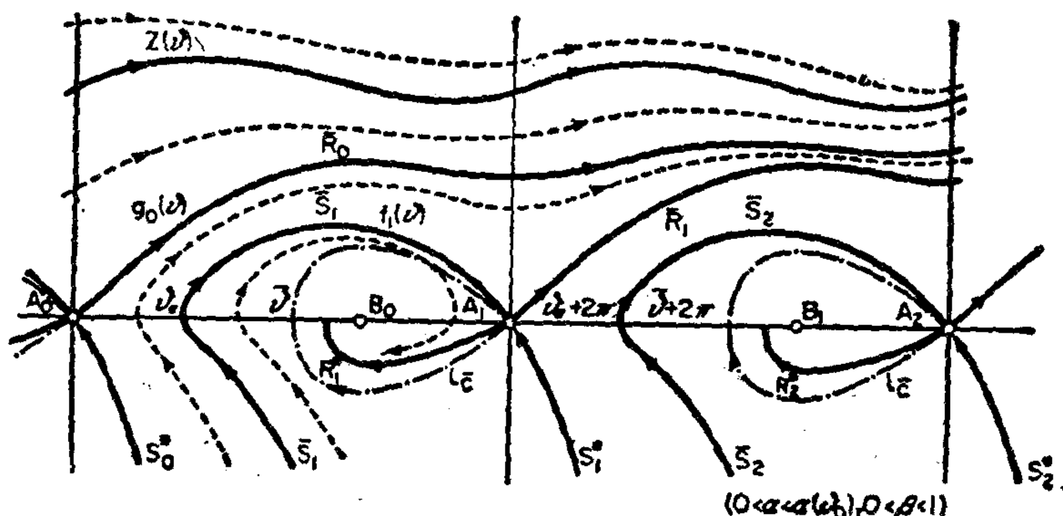


图 102

(c) 现在来求(6.2.1)的周期解的渐近表达式，在(6.2.1)中 $\beta = \sin\theta_0$.

由(6.2.2)，我们有

$$t = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{Z(\varphi)}, \tag{6.2.28}$$

且如果

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{Z(\varphi)} = \omega,$$

则有

$$\int_0^{2k\pi+\theta} \frac{d\varphi}{Z(\varphi)} = t + k\omega \quad (k = 0, 1, \cdots),$$

因此，由(6.2.28)求得的反函数 $\theta = \theta(t)$，当 t 增加 ω 时，它增加 2π，而函数 $2\pi t/\omega$ 也有这相同的性质，所以差 $\theta(t) - 2\pi t/\omega$ 以 ω 为周期，故可记为

$$\theta(t) = \varphi(t) + 2\pi\omega^{-1}t, \tag{6.2.29}$$

其中 $\varphi(t)$ 表示一个满足 $\varphi(0) = 0$ 的以 ω 为周期的函数.

(f) 在 $\alpha=\alpha(\theta_0)$ 的情形，对于 $\theta\in[-\pi-\theta_0,\pi-\theta_0]$ 有 $g_0(\theta)=f_1(\theta)$，且在半平面 $z\geqslant 0$ 中由直线 $\theta=-\pi-\theta_0$ 和 $\theta=\pi-\theta_0$ 之间的带形里，$\bar{R}_0$ 与 $\bar{S}_1$ 重合.

轨线的性态与 (d) 中所讨论过的 $\alpha<\alpha(\theta_0)$ 的情形十分相似，只是，现在在 §2.5 (g) 的伪周期解的下方不存在渐近于它的轨线(图 103).

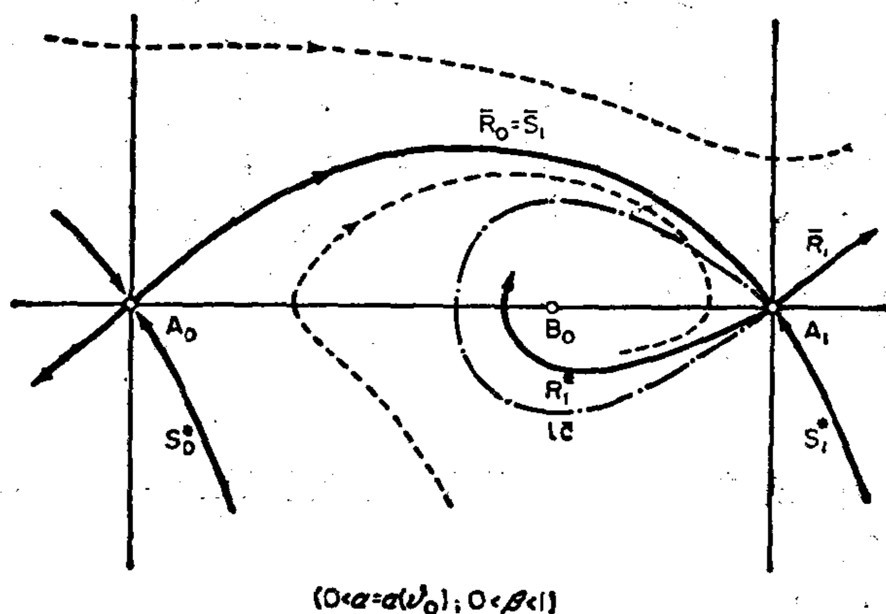


图 103

(g) 最后，设 $\alpha>\alpha(\theta_0)$. 我们注意到，$\bar{S}_1$ 在 $-\infty<\theta<\pi-\theta_0$ 上的方程为 $z=f_1(\theta)$，当 $\theta\to-\infty$ 时，有 $\lim f_1(\theta)=+\infty$. 显然，当 $\theta<\pi-\theta_0$ 时，$f_1(\theta)>0$；假设当 $\theta\to-\infty$ 时，f_1 有上界. 则 $f_1(\theta)<f_1(\theta-2\pi)<\cdots<f_1(\theta-2k\pi)<\cdots$. 令 $\Omega(\theta)=\lim f_1(\theta-2k\pi)$ $(k\to\infty)$，$\Omega(\theta)$ 是有界的且 $\Omega(-\pi-\theta_0)=\Omega(\pi-\theta_0)$. 和 (d) 一样，在 $[-\pi-\theta_0,\pi-\theta_0]$ 上，有 $f_1(\theta)<f_2(\theta)<\cdots<f_k(\theta)<\cdots$，当 $k\to\infty$ 时，$\lim f_k(\theta)=\Omega(\theta)$，以及

$$f_k(\theta)-f_k(-\pi-\theta_0)=\int_{-\pi-\theta_0}^{\theta}\left[\frac{\sin\theta_0-\sin\varphi}{f_k(\varphi)}-\alpha\right]d\varphi,$$

当 $k\to+\infty$ 时，取极限就得到

$$\Omega(\theta)-\Omega(-\pi-\theta_0)=\int_{-\pi-\theta_0}^{\theta}\left[\frac{\sin\theta_0-\sin\varphi}{\Omega(\varphi)}-\alpha\right]d\varphi,$$

因此 $\Omega(\theta)$ 应该是 (6.2.8) 的周期解，但这是不可能的，因此 f_1 无上界.

我们已经证实，$\bar{S}_0$, S_0^* 和 $\bar{S}_1$, S_1^* 以及 A_0, A_1 构成了一个斜的带形区域的边界. 当 $t\to+\infty$ 时，经过这带域内点的轨线上的动点，将趋近于点 B_0（图 104）

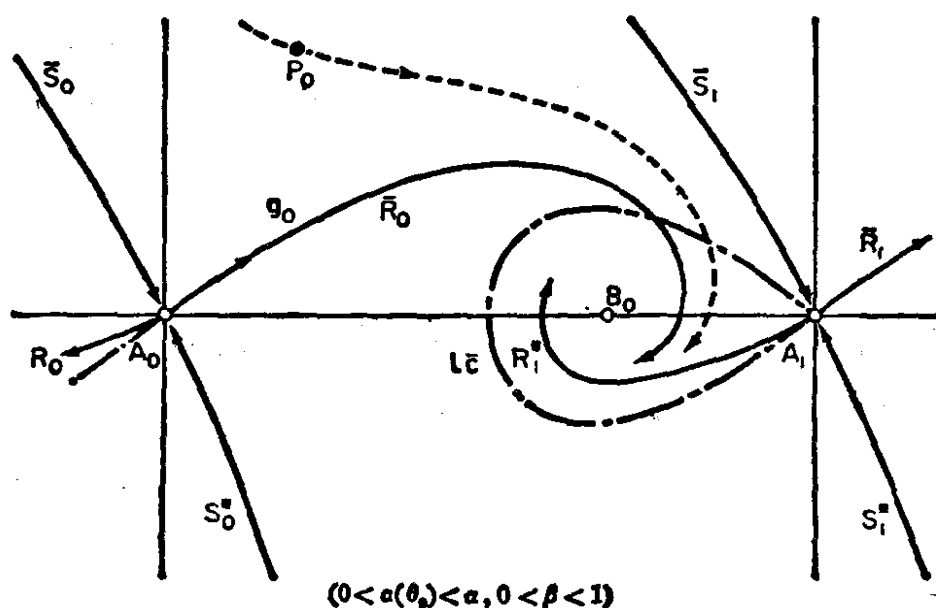


图 104

(h) 根据上述事实，可以推出，如果在区间 $(-\pi-\theta_0, \pi-\theta_0)$ 内 $f_1(\theta)$ 不等于零，方程 (6.2.8) 就没有周期解，反过来也对.

(i) 我们看到，在 §2.3, §2.4, §2.5, §2.7 中，在 $\beta>0$ 的假设下所建立的结果，即使是对于 $\beta=0$, 也仍然成立.

8. 关于临界值 $\alpha(\theta_0)$ 的不等式

(a) 在方程 (6.2.8) 中按照如下的关系：

$$\alpha=(\sin\theta_0)/\eta(\eta>0),\ \xi=\pi-\theta_0-\theta, \quad (6.2.30)$$

把参数 α 换成 η, 把自变量 θ 换成 ξ, 就得到方程

$$F(\xi, z, dz/d\xi)\equiv z dz/d\xi - z(\sin\theta_0)/\eta - \sin(\theta_0+\xi)+\sin\theta_0=0, \quad (6.2.31)$$

区间 $[-\pi-\theta_0,\ \pi-\theta_0]$ 变换成 $[0,\ 2\pi]$，但区间方向却是由 2π 变到 0.

我们只研究半平面 $z>0$ 上的轨线，令

$$u=z^2, \tag{6.2.32}$$

我们就得到 u 的方程

$$du/d\xi-2\sqrt{u}\,(\sin\theta_0)/\eta-2[\sin(\theta_0+\xi)-\sin\theta_0]=0. \tag{6.2.33}$$

(b) 下面证明一个比较引理(参看 C. Böhm [1], p.348). 设 $u=u(\xi)$ 为定义在区间$[a,\ a+b]$(或者$[a-b,\ a]$)，$b>0$，上的函数，连同其一阶导数都连续，且满足方程 (6.2.33) 以及条件 $u(a)\geqslant 0$; $u(\xi)>0$，对 $a<\xi\leqslant(a+b)$; [对 $a-b\leqslant\xi<a$].

现在设 $v=v(\xi)$ 为和 u 定义在相同区间上的另一个函数，也连同其一阶导数都连续，并满足条件 $v(a)\geqslant 0$; $v(\xi)>0$，对 $a<\xi\leqslant a+b$; [对 $a-b\leqslant\xi<a$]，以及不等式

$$dv/d\xi-2\sqrt{v}\,(\sin\theta_0)/\eta-2[\sin(\theta_0+\xi)-\sin\theta_0]\leqslant 0. \tag{6.2.34}$$

最后，假设

$$u(a)=v(a). \tag{6.2.35}$$

由 (6.2.34) 减去 (6.2.33)，就得到 $d(v-u)/d\xi\leqslant 2(\sqrt{v}-\sqrt{u})(\sin\theta_0)/\eta$. 令 $\xi=a+t$，假设存在 $t_0\in(0,\ b]$，使得 $v(a+t_0)>u(a+t_0)$. 令 $\bar{a}$ 为 $a+t_0$ 左边第一个使得 $v(\bar{a})=u(\bar{a})$ 的点；如果 $\bar{a}>a$，则当 $\xi\in(\bar{a}+\varepsilon,\ a+t_0]$ $(\varepsilon>0)$ 时，有

$d\log(v-u)/d\xi\leqslant 2(\sqrt{v}+\sqrt{u})^{-1}(\sin\theta_0)/\eta$，在 $(\bar{a}+\varepsilon,\ a+t_0)$ 上积分，就得到

$$0<v(a+t_0)-u(a+t_0)\leqslant[v(\bar{a}+\varepsilon)-u(\bar{a}+\varepsilon)]\int_{\bar{a}+\varepsilon}^{a+t_0}\frac{d\xi}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}.$$

令 $\varepsilon\to 0$，取极限就得到 $v(a+t_0)-u(a+t_0)\leqslant 0$，这与

$v(a+t_0)>u(a+t_0)$ 的假设矛盾．现在，如果 $\bar{a}=a$ 及 $u(a)=v(a)>0$，同样的推理仍成立．又如果 $\bar{a}=a$ 而 $u(a)=v(a)=0$，这还是成立的．这是因为 $u(\xi)$ 和 $v(\xi)$ 在 a 点可微，而积分

$$\int_{\bar{a}}^{a+t_0}\frac{d\xi}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}.$$

收敛．

因此，当 $\xi=a+t,\ 0<t\leqslant b$ 时，$v(\xi)\leqslant u(\xi)$，类似地，当 $\xi=a-t,\ 0<t\leqslant b$，时，$v(\xi)\geqslant u(\xi)$．而且，由于 $u=z^2$，如果令 $v=y^2$，就证明了下列引理．

引理．如果在 $[a,a+b]$ 或 $[a-b,\ a]$ $(b>0)$ 上，函数 $z(\xi)$ 与 $y(\xi)$ 连同其一阶导数是连续的，且满足条件

$$z(a)=y(a);\ z(\xi)>0,\ y(\xi)>0,\qquad \xi=a+t,\ 0<t\leqslant b, \tag{6.2.36}$$

$$z(a)=y(a);\ z(\xi)>0,\ y(\xi)>0,\qquad \xi=a-t,\ 0<t\leqslant b; \tag{6.2.36'}$$

另外，如果对于由 (6.2.31) 所定义的 F，

$$F(\xi,z,dz/d\xi)=0,\ F(\xi,y,dy/d\xi)\leqslant 0, \tag{6.2.37}$$

则

$$z(\xi)\geqslant y(\xi),\qquad \xi=a+t,\ 0<t\leqslant b, \tag{6.2.38}$$

$$z(\xi)\leqslant y(\xi),\qquad \xi=a-t,\ 0<t\leqslant b. \tag{6.2.38'}$$

如果，代替 (6.2.37)，我们假设

$$F(\xi,z,dz/d\xi)=0,\ F(\xi,y,dy/d\xi)\geqslant 0, \tag{6.2.39}$$

而所有其它的假设全保持不变，则

$$z(\xi)\leqslant y(\xi),\qquad \xi=a+t,\ 0<t\leqslant b, \tag{6.2.40}$$

$$z(\xi)\geqslant y(\xi),\qquad \xi=a-t,\ 0<t\leqslant b. \tag{6.2.40'}$$

(c) 如果 $y=2\sin(\xi/2)$，则

$$\frac{1}{2}F(\xi,y,dy/d\xi)=[(1-\cos\theta_0)\cos(\xi/2)$$

$$+\sin\theta_0\sin(\xi/2)-(\sin\theta_0)/\eta]\sin(\xi/2).$$

对每一ξ，有

$$\max[(1-\cos\theta_0)\cos(\xi/2)+\sin\theta_0\sin(\xi/2)]$$
$$\leqslant[(1-\cos\theta_0)^2+\sin^2\theta_0]^{1/2}=2\sin(\theta_0/2).$$

所以，当 $\xi\in(0,2\pi)$ 时，如果 $2\sin(\theta_0/2)\leqslant(\sin\theta_0)/\eta$，即

$$\eta\leqslant\cos(\theta_0/2),\tag{6.2.41}$$

有 $F(\xi,y,dy/d\xi)\leqslant 0$.

假设这个关系已经证实，并来研究分界线 $z(\xi)=f_1(\pi-\theta_0-\xi)$. 则 $z(0)=y(0)=0$，且当 $\xi\in(0,2\pi-\varepsilon)$ 时 $(0<\varepsilon<2\pi)$，有 $y(\xi)>0$.

利用刚才证明的引理，由 (6.2.40) 可以推出，对每一个 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<2\pi)$，当 $\xi\in(0,2\pi-\varepsilon]$ 时，$z(\xi)\geqslant y(\xi)$，由此得知 $z=f_1(\theta)$ 在 $(-\pi-\theta_0,\pi-\theta_0)$ 内没有零点，因此，方程 (6.2.8) 没有周期解(§ 2.7(h)).

由于从 (6.2.30) 的第一式可以推出 $\alpha=(\sin\theta_0)/\eta\geqslant\sin\theta_0/\cos(\theta_0/2)=2\sin(\theta_0/2)$，我们就证明了，如果

$$\alpha>2\sin(\theta_0/2),\tag{6.2.42}$$

方程 (6.2.8) 就没有周期解，所以，临界值的上界为

$$\alpha(\theta_0)\leqslant 2\sin(\theta_0/2).\tag{6.2.43}$$

(d) 现在来确定 $\alpha(\theta_0)$ 的下界.

半平面 $x>0$ 上由点 $\xi=0$ 出发的分界线 $z(\xi)=f_1(\pi-\theta_0-\xi)$，当 $\xi=0$ 时的斜率的值为 $(\sin\theta_0)/2\eta+\{[(\sin\theta_0)/(2\eta)]^2+\cos\theta_0\}^{1/2}=p>0$. 我们希望证明：如果 $z=Z_0(\xi)$ 是(6.2.8) 的对应于 $\alpha=\alpha(\theta_0)$ 的伪周期解(满足条件 $Z_0(0)=Z_0(2\pi)=0$，当 $0<\xi<2\pi$ 时 $Z_0(\xi)>0$)，则对于 $0<\xi<\pi-2\theta_0$ 有 $Z'(\xi)<p$.

在 (6.2.31) 中把 $dz/d\xi$ 写成 p，我们看到，如果

$$z_1=\frac{\sin(\theta_0+\xi)-\sin\theta_0}{p-(\sin\theta_0)/\eta}=A^{-1}[\sin(\theta_0+\xi)-\sin\theta_0],\tag{6.2.44}$$

其中 $A^{-1}=p-(\sin\theta_0)/\eta>0$，则方程 $F(\xi,z_1,p)=0$ 得到满足.

所以，

$$F(\xi, z_1, dz_1/\xi) = z_1[A\cos(\theta_0+\xi) - (\sin\theta_0)/\eta - A^{-1}],$$

由于当 $0<\xi<\pi-2\theta_0$ 时，$z_1>0$，且

$$\begin{aligned} &A\cos(\theta_0+\xi) - (\sin\theta_0)/\eta - A^{-1} \\ &\quad \leqslant A\cos\theta_0 - (\sin\theta_0)/\eta - A^{-1} \\ &\quad = -A[A^{-2} + A^{-1}(\sin\theta_0)/\eta - \cos\theta_0] = 0, \end{aligned}$$

可以推出

$$F(\xi, z_1, dz_1/d\xi) \leqslant 0. \tag{6.2.45}$$

由于 $Z_0(0)=z_1(0)=0$，如果拿 $Z_0(\xi)$ 和 $z_1(\xi)$ 比较，并利用引理的 (6.2.38)，就得到

$$Z_0(\xi) \geqslant z_1(\xi). \tag{6.2.46}$$

正弦型曲线 (6.2.44) 在 $0\leqslant\xi\leqslant\pi-2\theta_0$ 上的一段，和 ξ 轴的一部分，围成了属于带形 $\xi=0$，$\xi=\pi-2\theta_0$ 中的一个有界区域，其中 $\bar{p}<p$，如果 $F(\xi, z, \bar{p})=0$. 由此可证，沿轨线 $Z_0(\xi)$ 有

$$0<dZ_0/d\xi\leqslant\alpha/2+(\alpha^2/4+\cos\theta_0)^{1/2},\ 0\leqslant\xi\leqslant\pi-2\theta_0.$$

所以，对应于 $\alpha(\theta_0)$ 的伪周期解 $Z_0(\xi)$ 完全包含在一个直角三角形之中，这个三角形的底边为点 $(0, 0)$ 与 $(2\pi, 0)$ 的联线，$(2\pi, 0)$ 为直角的顶点，底上锐角的正切等于 $\alpha/2+(\alpha^2/4+\cos\theta_0)^{1/2}$. 因此，

$$\int_0^{2\pi} Z_0(\xi)d\xi < \frac{1}{2}(2\pi)^2(\alpha(\theta_0)/2+[\alpha^2(\theta_0)/4+\cos\theta_0]^{1/2}).$$

由 (6.2.6)，有

$$\sin\theta_0 < \pi\alpha(\theta_0)\{\alpha(\theta_0)/2+[\alpha^2(\theta_0)/4+\cos\theta_0]^{1/2}\},$$

由此得到所求的下界（参看 F. Tricomi. [1], p.13）

$$\frac{\sin^2\theta_0}{\pi[\pi\cos\theta_0+\sin\theta_0]} < \alpha^2(\theta_0). \tag{6.2.47}$$

(c) W. D. Hayes[1] 求得了 $\alpha(\theta_0)$ 的一个更好的下界：

$$[(3\cos^2\theta_0+1)^{1/2}-2\cos\theta_0]^{1/2} \leqslant \alpha(\theta_0). \tag{6.2.48}$$

9. M. Urabe 计算 $\alpha(\theta_0)$ 的方法

下面我们描述一下 M. Urabe [1], [2] 的计算 $\alpha(\theta_0)$ 的解析方

法.

函数 $\alpha(\theta_0)$ 为 θ_0 的递增函数. 如果令 $\theta = -\pi - \theta_0 - \theta_1$ 且把 θ_1 改记为 θ，则轨线的方程 (6.2.8) 变成

$$zdz/d\theta = -\alpha z + \sin\theta_0 + \sin(\theta - \theta_0) \qquad (6.2.49)$$

由点 $\theta = 0$ 出发的两条分界线的方程可以记为 $z = z(\theta, \alpha, \theta_0)$，这些函数对三个变量都是解析的. 令 $z = c_1\theta + c_2\theta^2 + \cdots + c_n\theta^n + \cdots$，代入 (6.2.49)，并比较等式两端对应项系数，立即得到

$$c_1 = -\alpha/2 \pm (\alpha^2/4 + \cos\theta_0)^{1/2},$$
$$c_2 = (\alpha + 3c_1)^{-1}(\sin\theta_0)/2,$$
$$c_3 = (\alpha + 4c_1)^{-1}(-2c_2^2 - (\cos\theta_0)/6),$$
$$c_4 = (\alpha + 5c_1)^{-1}(-5c_2c_3 - (\sin\theta_0)/24),$$
$$c_5 = (\alpha + 6c_1)^{-1}(-6c_2c_4 - 3c_3^2 - (\cos\theta_0)/120),$$
$$c_6 = (\alpha + 7c_1)^{-1}(-7c_2c_5 - 7c_3c_4 + (\sin\theta_0)/720), \cdots$$

由于对应于 c_1 的正值分界线在 2π 也有一个零点，这就有可能计算 $\alpha(\theta_0)$. M. Urabe 给出了如下的数值表:

θ_0:	0,	0.2,	0.4,	0.6,	0.8,	1,
θ_0:	1.2,	1.4,	$1.571 = \pi/2$,			
$\alpha(\theta_0)$:	0.000,	0.157,	0.313,	0.469,	0.623,	0.774,
$\alpha(\theta_0)$:	0.924,	1.071,	1.193.			

§ 3. 张弛振荡的 van der Pol 方程和 Liénard 方程

1. 预备知识

(a) H. Cartan 和 E. Cartan [1] 在一个无线电技术问题中研究了方程

$$Ld^2i/dt^2 + [r - \phi(i)]di/dt + i/C = 0, \qquad (6.3.1)$$

的周期解存在性的一般问题，其中 L, r, C 分别表示一个电路中的电感、电阻和电容；i 为电流强度；t 为时间；$\phi(i)$ 为 i 的函数，它的因次与电阻相同，且设其为 i 的递减的偶函数，$\phi(0) > r$,

$\lim_{i\to\infty}\phi(i)=0$.

B. van der Pol 在一个电学问题中导出了方程

$$\ddot{x}+\lambda(x^2-1)\dot{x}+x=0, \qquad (6.3.2)$$

其中 λ 为一常数,而 x 与电流强度成正比(参看 B. van der Pol [1], [2]).

方程 (6.3.1) 和 (6.3.2) 都属于 Liénard ([1], [2]) 方程

$$\ddot{x}+\omega f(x)\dot{x}+\omega^2 x=0 \qquad (6.3.3)$$

的类型,其中 $f(x)$ 对所有有限的 x 都连续, ω 为大于 0 的常数.

方程 (6.3.2) 和 (6.3.3) 通常分别称为 van der Pol 方程和 Liénard 方程.

(b) 如果令

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds, \qquad (6.3.4)$$

则方程 (6.3.3) 就等价于系统

$$\dot{x}=\omega[y-F(x)],\ \dot{y}=-\omega x, \qquad (6.3.5)$$

x, y 平面称为 Liénard 平面,曲线 $y=F(x)$ 称为关于 (6.3.3) 的基本曲线(参看 J. Haag [1], p. 36).

如果假设 $f(x)$ 对所有有限的 x 有界, $F(x)$ 在每一个有限区间上将一致满足 Lipschitz 条件,则 (6.3.3) 的每一个解唯一地由初值条件

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=\dot{x}_0 \qquad (6.3.6)$$

所确定.

如果略去 $f(x)$ 有界的假设,可以证明,如果存在常数 Δ, 使得

$$\text{当 } |x|\geqslant\Delta>0 \text{ 时 } f(x)\geqslant 0, \qquad (6.3.7)$$

则上面提到的解对所有有限 x 都存在.

如果在 (6.3.7) 之外,还假设存在 $\delta>0$ 和 $\lambda>0$, 使得

$$f(x)<-\lambda<0, \text{ 对 } |x|<\delta, \qquad (6.3.8)$$

则当 $t\to+\infty$ 时, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ 无数次等于零,或者说成是振荡的.

如果 t', t'' 为一个解的相邻两零点,可以推出不等式(参看 D. Graffi [1], pp. 83—84)

$$|t'' - t'| \geqslant \pi/\omega. \tag{6.3.9}$$

在 x, y (Liénard) 平面上，轨线满足方程

$$dy/dx = -x/[y - F(x)], \tag{6.3.10}$$

它关于 $x = y = 0$ （唯一的有限奇点）的简化方程为 $dy/dx = -x/[y - f(0)x]$，所以(参看第五章，§ 2)，当 $|f(0)| > 2$ 时，原点是不稳定结点，而当 $|f(0)| < 2$ 时，原点为不稳定焦点；还有如果 $|f(0)| = 2$，点 $(0, 0)$ 为当 $t \to -\infty$ 时的吸引点.

如果令 $\bar{x} = \omega u$，则在 x, u 相平面上，(6.3.3) 的轨线的方程变为

$$du/dx = -f(x) - \pi/u. \tag{6.3.11}$$

这方程有唯一奇点，即原点 $x = u = 0$，而假设 (6.3.7) 和 (6.3.8) 则保证了除可能有的环之外，每条轨线都形如按顺时针方向盘旋的螺旋线.

2. Liénard 方程周期解的存在性

(a) (6.3.3) 存在周期解(恒等于零者除外)等价于在 Liénard 平面或相平面上存在环. 易于证明下面的定理(参看 G. Sansone [3]).

定理. 如果 $f(x)$ 对所有有限的 x 连续，且满足下列条件：存在 $\delta_{-1} < 0$, $\delta_1 > 0$ 使得

$$\text{当 } \delta_{-1} < x < \delta_1 \text{ 时}, \ f(x) < 0;$$
$$\text{当 } x < \delta_1, \ x > \delta_1 \text{ 时}, \ f(x) > 0 \tag{6.3.12}$$
$$[f(\delta_{-1}) = f(\delta_1) = 0],$$

又由 (6.3.4) 所定义的函数 $F(x)$ 满足

$$xF(x) < 0, \tag{6.3.13}$$

则 Liénard 方程 (6.3.3) 没有周期解(显然，恒等于 0 的解除外).

(b) 关于周期解的存在性，有如下的定理（参看 G. Sansone [4]）：

定理. 假如 $f(x)$ 对所有有限 x 连续，且满足 (6.3.12)，又由 (6.3.4) 定义的函数 $F(x)$ 和由

$$|F(\delta_1)+F(\delta_{-1})|=N \tag{6.3.14}$$

所定义的 N，至少满足下列条件之一:

(1) 存在 $x_0>\delta_1$，使得

$$4Nx_0+4N^2\leqslant[F(x_0)-F(\delta_1)]^2; \tag{6.3.15.1}$$

(2) 存在 $x_0<\delta_{-1}$，使得

$$4N|x_0|+4N^2\leqslant[F(x_0)-F(\delta_{-1})]^2; \tag{6.3.15.2}$$

(3)
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty, \tag{6.3.15.3}$$

(4)
$$\lim_{x\to-\infty}|F(x)|=+\infty, \tag{6.3.15.4}$$

则 (6.3.3) 至少有一个周期解(非零解).

为了证明这个定理，令 $\delta=\min(\delta_1,\ |\delta_{-1}|)$，并考虑 (6.3.3) 的由初值条件

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=0,\ x_0>0 \tag{6.3.16}$$

所确定的解，其中

$$0<x(t_0)<\delta. \tag{6.3.17}$$

如果把 $x(t)$ 在 $x_0=x(t_0)$ 之后的第一个最大值记为 x_2，则有

$$x_0<x_2. \tag{6.3.18.1}$$

另一方面，如果 x_0 满足 $x_0>\delta_1$ $(x_0<\delta_{-1})$，以及 $AN^2+4Nx_0\leqslant[F(x_0)-F(\delta_1)]^2$ $(4N^2+4N|x_0|\leqslant[F(x_0)-F(\delta_{-1})]^2)$，或者，如果对于 $x_0>0$ $(x_0<0)$，对应着一个 λ $(0<\lambda<1)$，使得

$$\lambda(x_0-2N)\geqslant\delta_1,\ \sqrt{1-\lambda^2}\{F(\lambda(x_0-2N))-F(\delta_1)\}\geqslant 2N,$$

$$[\lambda(x_0+2N)\leqslant\delta_{-1},\ \sqrt{1-\lambda^2}\{-F(\lambda(x_0+2N))+F(\delta_{-1})\}\geqslant 2N],$$

则，如果 x_2 表示满足初始条件 (6.3.16) 的解 $x(t)$ 在 $x_0=x(t_0)$ 之后的第一个最大值，就应有

$$x_0>x_2. \tag{6.3.18.2}$$

由于 x_2 是 x_0 的连续函数，由 (6.3.18.1) 和 (6.3.18.2)，存在 t 的不相同的二值 $t_1>t_0$，使得 $x_0=x(t_0)=x(t_1)$，$\dot{x}(t_0)=\dot{x}(t_1)=0$，所以 (6.3.3) 至少存一个(非零解)周期解.

3. Liénard 方程周期解的唯一性的充分条件

(a) 保留 § 3.2 (b) 中的假设,如果

$$-\delta_{-1}=\delta_1, \tag{6.3.19}$$

或者存在 $\Delta>0$,使得 $F(-\Delta)=F(\Delta)=0$,则 (6.3.3) 的(不恒等于零的周期解是唯一的,这相当于轨线的微分方程在 Liénard 平面内有唯一的环,或者方程 (6.3.11) 在相平面内有唯一的环.

此外,这个环是稳定的,而所有其它的轨线都 ω-渐近趋向于这个环.

(参看 G. Sansone [4], 174—181 页).

注. 对于自治系统,当 $x=\varphi(t)$ 为周期解时,对任意常数 c, $\varphi(t+c)$ 也是周期解. 所以,此处以及在其它关于自治系统的周期解的定理中,对于周期解唯一性的论断,都是除开对时间平移的意义下的唯一性.

(b) 我们还有如下的存在与唯一性的简单的准则,它是 G. Sansone 提出的,其后为 J. L. Massera 所改进的(参看 G. Sansone [5], J. L. Massera [1]). Massera 把 Sansone 的原始叙述中的条件 $|f(x)|<2$ 取消了.

如果在方程

$$\ddot{x}+\omega f(x)\dot{x}+\omega^2x=0 \tag{6.3.3}$$

中,$\omega>0$ 为常数,$f(x)$ 对所有有限 x 连续,且满足下列假设: (i) 当 $\delta_{-1}<x<\delta_1(\delta_{-1}<0,\ \delta_1>0)$ 时,$f(x)<0$; (ii) 当 $x<\delta_{-1}$, $x>\delta_1$ 时,$f(x)>0$; (iii) $f(\delta_{-1})=f(\delta_1)=0$; (iv) 当 x 由 $-\infty$ 变化到 0 时,$f(x)$ 为非增,而当 x 由 0 变化到 $+\infty$ 时,$f(x)$ 为非减,则 (6.3.3) 有唯一的(不恒为零的)周期解,它对应着一个极限环,当 $t\to+\infty$ 时,所有其它的轨线都渐近趋近于它.

由于 $F(+\infty)=+\infty$, $F(-\infty)=-\infty$, § 3.2 (b) 的定理保证 (6.3.3) 至少存在一个周期解.

为了证明唯一性,只要证明方程

$$du/dx=-f(x)-x/u \tag{6.3.11}$$

只存在一个环.

在 x, u 相平面中，如果考虑 x, u 轴之外的由原点出发而移向无穷远的射线(图 105)，由于比 $-x/u$ 保持为常数，$-f(x)$ 不断增加，所以，向量场 $(\dot{x}, \dot{u})$ 在 P 点的方向，当 P 由 0 移向无穷远时，或者保持不动，或者按顺时针方向旋转.

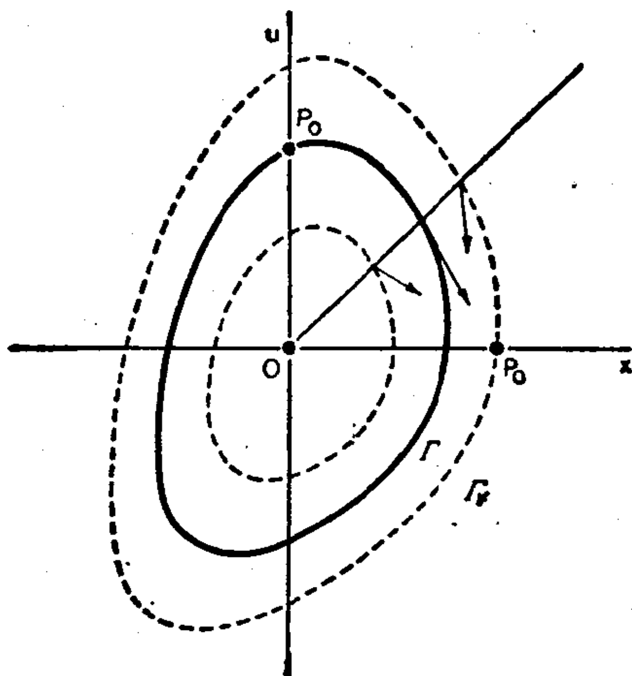


图 105

现在，首先假设 $f(x)$ 是严格增加的，且设 Γ 为 (6.3.11) 的一个环，而 Γ_k 是 Γ 经过相似比为 $k>0$ 的相似变换所得到的闭曲线. 由于方向场 (6.3.11) 与 Γ 相切，可以推出，Γ_k 上的方向场当 $k>1$ 时，指向 Γ_k 的内部，当 $0<k<1$ 时，指向外部，因此，由 Γ_k 上一点出发的轨线，将整个保持在 Γ_k 的内部或者整个地在外部. 所以，它不可能是环.

然而，对于由 x 轴或 u 轴上的点出发的轨线，这个性质必须直接验证. 因为，在这些点处分别有 $du/dx=+\infty$ 及 $du/dx=0$. 为此，我们考虑这样的事实，即在 Γ_k 上动点的坐标 (x, u_k) 满足方程 $\frac{1}{2}du_k^2/dx=-u_k/f(x/k)-x$，在轨线上的点的坐标满足 $\frac{1}{2}du^2/dx=-uf(x)-x$. 如果以 $k>1$ 为例，考虑点 $P_0=(0, u)$，$u>0$，如果在 $x=0$ 的邻域 $(0, \delta)$ 中来比较这两个方程，由于 $-uf(x/k)-x>-uf(x)-x$，就可以根据比较定理(参看最后一段)推出在 $(0, \delta)$ 中 $u_k>u$，即 (6.3.11) 的经过 P_0 的轨线进入 Γ_k.

我们的论证即使是没有 $f(x)$ 为严格单调这一限制，也仍然成立. 如果不然，在 $f(x)$ 为常数的区间内，过 Γ_k 上一点的轨线可能

在 t 的某个区间上与 Γ_k 重合，但在这些弧的端点，轨线将在 $k>1$ 时进入 Γ_k，而在 $k<1$ 时离开 Γ_k. 前面的论述用到了如下的定理(参看 G. Sansone [1], 94—95 页).

定理. 假如 $f(x, y)$, $F(x, y)$ 在矩形

$$R: \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a, \ |y - \beta| < b \tag{1}$$

上有定义，并满足不等式

$$f(x,y) < F(x,y). \tag{2}$$

如果 $y(x)$, $Y(x)$ 在 $(\alpha, \alpha+\delta)$ $(0<\delta<a)$ 上可微，且在 $(\alpha, \alpha+\delta)$ 上满足方程

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ Y'(x) = F(x, Y(x)) \tag{3}$$

及初始条件

$$y(\alpha) = \beta, \ Y(\alpha) = \beta, \tag{4}$$

则

$$y(x) < Y(\lambda), \qquad \alpha < x \leqslant \alpha + \delta. \tag{5}$$

证明. 考虑函数 $z(x) = Y(x) - y(x)$，则 $z(\alpha) = 0$, $z'(\alpha) = Y'(\alpha) - y'(\alpha) = F(\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta) > 0$. 因此，在 $x = \alpha$ 右方的一个区间内，$z(x)$ 为正的递增函数. 由于 $z(x)$ 在 $(\alpha, \alpha+\delta)$ 上连续，如果不能保持在 $\alpha < x < \alpha + \delta$ 上 $z(x) > 0$，则存在 α_1, $\alpha < \alpha_1 < \alpha + \delta$，使得 $z(\alpha_1) = 0$，并在 (α, α_1) 上有 $z(x) > 0$. 由此可以推出 $z'(\alpha_1) = Y'(\alpha_1) - y'(\alpha_1) = F(\alpha_1, Y(\alpha_1)) - f(\alpha_1, y(\alpha_1)) \leqslant 0$. 但是，这是不可能的，因为由 $z(\alpha_1) = 0$ 又可以推出 $Y(\alpha_1) = y(\alpha_1)$，从而由假设可得 $F(\alpha_1, Y(\alpha_1)) - f(\alpha_1, y(\alpha_1)) > 0$，矛盾.

上述证明在假设 (2) 之下成立. 但是如果在 $P_0 = (\alpha, \beta)$ 的邻域中唯一性定理成立，则即使 $f(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta)$，这结论仍然成立.

4. Liénard 方程的周期解不唯一的情形

我们要证明条件

$$\left.\begin{array}{l} f(x)>0,\text{当 } x<\delta_{-1},\ x>\delta_1;\ f(x)<0,\text{当 } \delta_{-1}<x<\delta_1, \\ \int_0^{+\infty} f(x)dx=+\infty \end{array}\right\} \quad (6.3.20)$$

不足以保证方程 (6.3.3) 的周期解唯一。

A. Liénard [1] 研究过 (6.3.3) 有多于一个极限环的可能性。我们在这里给出 G. F. D. Duff 和 N. Levinson[1]所举的一个例子。

考虑方程

$$\ddot{x}+\varepsilon f(x)\dot{x}+x=0, \quad (6.3.21)$$

其中 ε 为一实的参数，这方程等价于系统 $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x-\varepsilon f(x)y$.

如果变换成极坐标 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 轨线微分方程就是

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{\varepsilon\rho f(\rho\cos\theta)\sin^2\theta}{1+\varepsilon f(\rho\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}, \quad (6.3.22)$$

而对于环来说，$\rho(\theta)$ 是以 2π 为周期的周期函数. 当 $\varepsilon=0$ 时，(6.3.22) 的解就是圆族 $\rho=$ 常数.

现在假设 $f(x)$ 是 x 的多项式.

(6.3.22) 的满足条件

$$\rho(0)=r \quad (6.3.23)$$

的解可以表为如下的形式：

$$\rho=H(\theta,r,\varepsilon)=H_0(\theta,r)+\varepsilon H_1(\theta,r)+\varepsilon^2\gamma(\theta,r,\varepsilon), \quad (6.3.24)$$

其中函数 γ 在 $-2\pi\leqslant\theta\leqslant 0$ 上一致有界，而 $|\varepsilon|$ 为充分小. 由 (6.3.24) 和 (6.3.23) 可以看出，为了使这个解是周期的，必须 $H_0(2\pi,r)=r$，而且还应有

$$H_1(2\pi,r)=r\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi)\sin^2\varphi d\varphi.$$

如果令

$$F^*(r)=r\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi)\sin^2\varphi d\varphi, \quad (6.3.25)$$

由 (6.3.24) 可推出

$$H(2\pi,r,\varepsilon)-r=\varepsilon F^*(r)+\varepsilon^2\gamma(2\pi,r,\varepsilon).$$

如果对于某些值 $r>0$，$H(2\pi, r, \varepsilon)-r$ 为零，则在关于(6.3.21)的 x, y 相平面上，存在一个对应的环。

设 $r_0>0$ 为 $F^*(r)=0$ 的单根，则对于充分小的 $\delta>0$ 及 $\varepsilon>0$，$H(2\pi, r, \varepsilon)-r$ 在 $r=r_0-\delta$ 及 $r=r_0+\delta$ 处的值的符号相反．由于 $H(2\pi, r, \varepsilon)-r$ 为 r 的连续函数，它在 $r_0-\delta$ 和 $r_0+\delta$ 之间的某个 r 值处等于零．

可以推出，如果 $F^*(r)$ 有三个实的正单根，则(6.3.21)至少有三个周期解．

例如，取

$$f(x)=A_3x^6-A_2x^4+A_1x^2-A_0-Cx,$$

其中 A_0, A_1, A_2, A_3, C 都是常数．

由(6.3.25)，令

$$I_k=\int_0^{2\pi}\cos^{2k}\theta\sin^2\theta d\theta>0\quad(k=0,1,2,3),$$

并利用

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta d\theta=0,$$

就得到 $F^*(r)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^{k-1}I_kA_kr^{2k+1}$，如果把常数 A_k 取得满足 $A_3I_3=1$，$A_2I_2=14$，$A_1I_1=49$，$A_0I_0=36$，则 $F^*(r)=r(r^2-1)(r^2-4)(r^2-9)$．因而 $F^*(r)$ 有三个正的单根 $r=1, 2, 3$．

5. $f(x)$ 有第一类间断点时，Liénard 方程周期解的存在定理

(a) N. Minorsky ([1]，183—232 页)对于一类依赖于一个充分小的参变量的非线性微分方程，给出了一个求周期解的近似方法．然而，人们感兴趣的是要给出一个对周期解进行数值计算的方法，而这个方法不依赖于对参变量的任何假设．这一节和下一节就是要探讨这样的方法．

(b) 方程

$$\ddot{x}+\omega f(x)\dot{x}+\omega^2x=0 \qquad (6.3.3)$$

中，设 ω 为常数；$f(x)$ 对所有有限的 x 有定义，且最多除去有限个第一类间断点，或者除去满足

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < \cdots, \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty; \qquad (6.3.26.1)$$

$$\cdots < c_{-n} < \cdots < c_{-2} < c_{-1} < 0, \lim_{n\to\infty} c_{-n} = -\infty \qquad (6.3.26.2)$$

的可数多个第一类间断点之外，$f(x)$ 在任何有限区间上都是连续的.

假设存在常数 Δ，使得

$$f(x) \geqslant 0, \quad 当\ |x| \geqslant \Delta > 0. \qquad (6.3.27)$$

于是对于固定的 t_0 和 x_0，$\dot{x}_0$，存在唯一的在 $[t_0, +\infty)$ 上有定义的函数 $x(t)$，它及其导数都连续，而它的二阶导数 $\ddot{x}(t)$ 在每一个使 $x(\bar{t}) \neq c_j(j = \pm1, \pm2, \cdots)$ 的点 $\bar{t}$ 处都是有限的，而且它还满足 (6.3.3) 和初始条件 $x(t_0) = x_0$，$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

另外，在使 $x(\bar{t}) = c_j(j = \pm1, \pm2, \cdots)$ 的点 $\bar{t}$ 处，如果 $\dot{x}(\bar{t}) \neq 0$，则两个单边导数 $\ddot{x}(\bar{t} - 0)$ 及 $\ddot{x}(\bar{t} + 0)$ 都存在. 又如果 $f(x(\bar{t}-0))$ 及 $f(x(\bar{t}+0))$ 分别表示 $\lim\limits_{t\to\bar{t}-0} f(x(t))$ 和 $\lim\limits_{t\to\bar{t}+0} f(x(t))$ (由于 $\dot{x}(\bar{t}) \neq 0$，所以存在 $\bar{t}$ 的邻域，在其中 $x(t)$ 为递增或递减，所以上述极限存在)，则

$$\ddot{x}(\bar{t} - 0) + \omega f(x(\bar{t} - 0))\dot{x}(\bar{t}) + \omega^2 x(\bar{t}) = 0, \qquad (6.3.28.1)$$

$$\ddot{x}(\bar{t} + 0) + \omega f(x(\bar{t} + 0))\dot{x}(\bar{t}) + \omega^2 x(\bar{t}) = 0. \qquad (6.3.28.2)$$

最后，如果 $x(\bar{t}) = c_j(j = \pm1, \pm2, \cdots)$，且 $\dot{x}(\bar{t}) = 0$，则 $\ddot{x}(\bar{t})$ 存在且

$$\ddot{x}(\bar{t}) + \omega^2 x(\bar{t}) = 0. \qquad (6.3.28.3)$$

如果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有第一类间断点，则对 $x(t)$ 可求出类似的条件.

为了证明这个定理，首先看到，如果 $x(t)$ 是 (6.3.3) 的满足定理条件的解，并令 $y(t) = \dot{x}/\omega + F(x)$，$F(x) = \int_0^x f(x)dx$，则 $x(t)$，$y(t)$ 满足方程组

$$\dot{x} = \omega[y - F(x)], \quad \dot{y} = -\omega x. \qquad (6.3.29)$$

如果 $x(t), y(t)$ 为 (6.3.29) 的满足 $x(\bar{t})=y(\bar{t})=0$ 的解，由于 $F(x)$ 在每一有限区间上满足 Lipschitz 条件，则 $x(t)$ 及 $y(t)$ 在它们存在的区域上恒等于零. 由此可以推出，如果 (6.3.3) 的解满足定理的条件，并满足条件 $x(\bar{t})=\dot{x}(\bar{t})=0$，从而有 $y(\bar{t})=0$，则这个解在其存在的整个区域上恒等于 0.

为了完成定理的证明，只须重复§3.2 中引用的 Sansone 的论文中的论证并稍加修改就可以了(参看 G. Sansone[4]. n. 3).

(c) 如果除了 (b) 中所列假定之外，存在使 (6.3.8) 成立的 $\delta>0$ 及 $\lambda>0$，则根据上面引用的 Sansone 的同一论文 (n.4) 中的论证，可以证明 (b) 中所研究的 (6.3.3) 的解，在 $[\bar{t}, +\infty)$ 上全都是振动的.

(d) § 3.2 (b) 中的定理可以根据本节的结果加以修改，现叙述如下:

假定 $f(x)$ 对有限 x 有定义，且除开在点列 (6.3.26.1) 及 (6.3.26.2) 有第一类间断点外，$f(x)$ 是连续的. 另外还假定 $f(x)$ 满足 (6.3.12)，且 § 3.2 (b) 中的条件 (1), (2), (3), (4) 至少有一个成立，则 (6.3.3) 在 (b) 中所考虑的解中至少有一个周期解.

6. Liénard 方程的比较定理

假定 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 对所有有限 x 有定义，且都满足 § 3.5 对 $f(x)$ 所要求的条件. 另外还假定方程

$$\ddot{x}_1+\omega f_1(x_1)\dot{x}_1+\omega^2 x_1=0, \tag{6.3.30.1}$$

$$\ddot{x}_2+\omega f_2(x_2)\dot{x}_2+\omega^2 x_2=0 \tag{6.3.30.2}$$

中的每一个都有唯一的周期解.

令

$$\dot{x}_1=\omega u^{(1)}, \tag{6.3.31.1}$$

$$\dot{x}_2=\omega u^{(2)}, \tag{6.3.31.2}$$

则 (6.3.30.1) 和 (6.3.30.2) 的轨线的方程分别化为(参看(6.3.11))

$$du^{(1)}/dx=-f_1(x)-x/u^{(1)}, \tag{6.3.32.1}$$

$$du^{(2)}/dx=-f_2(x)-x/u^{(2)}. \tag{6.3.32.2}$$

根据我们的假设，这些方程的每一个都有一个环，设分别为 Γ_1 及 Γ_2. 我们要证明，如果

$$f_1(x) \leqslant f_2(x), \qquad (6.3.33)$$

则环 Γ_1 上没有 Γ_2 内部的点. 如果 Γ_1 与 x-轴交于 $x_1^{(1)}$ 及 $x_{-1}^{(1)}$, $x_{-1}^{(1)} < 0 < x_1^{(1)}$, 且当 x 在 $(x_{-1}^{(1)}, x_1^{(1)})$ 中变化时，在某个区间中严格地有

$$f_1(x) < f_2(x),$$

则 Γ_1 把 Γ_2 包含在自己的内部(参看 G. Sansone [4]).

把 Γ_1 与 u 轴的交点记为 $u_1^{(1)}$ 与 $u_{-1}^{(1)}$, $u_{-1}^{(1)} < 0 < u_1^{(1)}$(图 106),

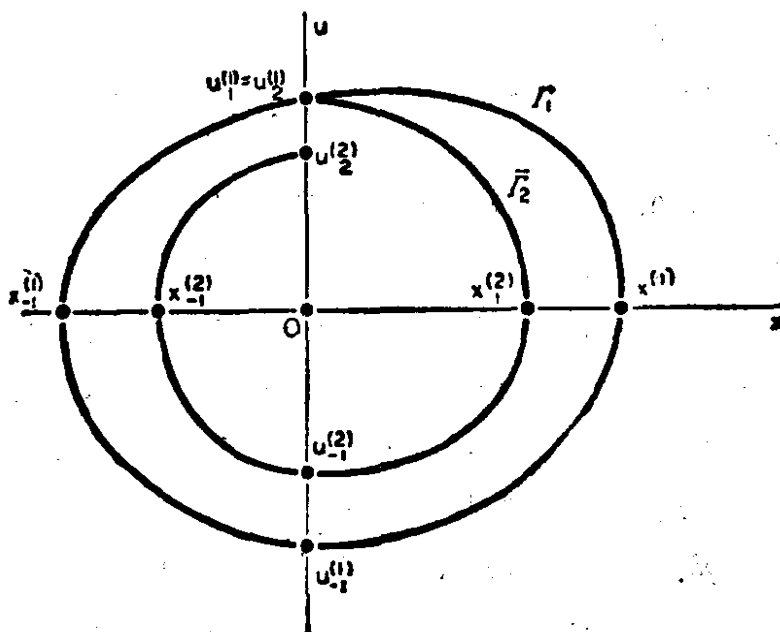


图 106

并对方程 (6.3.32.1) 及 (6.3.32.2) 运用比较定理，其中要用到 (6.3.33)，我们会看到，(6.3.32.2) 的由点 $(0, u_1^{(1)})$ 出发的轨线 Γ_2 将按顺时针方向，像螺旋线一样地盘旋，它保持在 Γ_1 的内部，并将在点 $(0, u_2^{(2)})$, $u_2^{(2)} \leqslant u_1^{(1)}$, 第一次与正 u 轴相交；并且，如果 (6.3.33) 在某区间上严格保持不等号，则 $u_2^{(2)} < u_1^{(1)}$ 也将严格保持不等号.

7. 周期的计算

(a) 给定方程

$$\ddot{x} + \omega f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{6.3.3}$$

假设 $f(x)$ 是满足下列条件的阶梯函数：(i) $\{c_n\}$ 是一个数列，它满足 $\cdots\cdots c_{-n} < c_{-n+1} < \cdots < c_{-1} < c_0 < c_1 < \cdots < c_n < \cdots$; $c_0 = 0$, $\lim c_{-n} = -\infty$, $\lim c_n = +\infty$, 且当 $c_h \leqslant x \leqslant c_{h+1}$($h = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时，$f(x) = f_h =$ 常数；(ii) 当 $\delta_{-1} < x < \delta_1$ ($\delta_{-1} < 0$, $\delta_1 > 0$) 时，$f(x) < 0$; 当 $x < \delta_{-1}, x > \delta_1$ 时，$f(x) > 0$，而且还假定 § 3.2 (b) 中的条件 (1)，(2)，(3)，(4) 至少有一个成立，则 (6.3.3) 至少有一个周期解.

如果再假设下列条件之一成立：(iii) $-\delta_{-1} = \delta_1$; (iv) 存在 $\Delta > 0$，使 $F(-\Delta) = F(\Delta) = 0$; (v) $\cdots f_{-n} \geqslant f_{-n+1} \geqslant \cdots \geqslant f_{-1} \geqslant f_0$; $f_0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots \leqslant f_{n-1} \leqslant f_n \leqslant \cdots$，则根据 § 3.5，(6.3.3) 的周期解是唯一的.

存在 $x_0 > 0$，使得对于满足初始条件 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ 的 (6.3.3) 的解 $x(t)$，它在 x_0 之后的第一个最大值 x_2 满足 $x_0 < x_2$(参看 (6.3,18.1))，同时存在 $x_0^* > 0$，使得对于 (6.3.3) 的满足初始条件 $x(0) = x_0^*$, $\dot{x}(0) = 0$ 的解 $x(t)$，它在 x_0^* 之后的第一个最大值 x_2^* 满足不等式 $x_0^* > x_2^*$ (参看 (6.3, 18.2)).

令 $\bar{x}_0 = (x_0 + x_0^*)/2$ 并设 $x(t)$ 为满足初始条件 $x(0) = \bar{x}_0$, $\dot{x}(0) = 0$ 的解. 考虑在 (t, x) 平面上方程为

$$x = l_1 e^{\alpha t} + l_2 e^{\beta t}, \qquad x = l_1 e^{\alpha t}(t + l_2),$$
$$x = l_1 e^{\alpha t} \sin \beta(t + l_2) \tag{6.3.34}$$

的曲线 (α, β, l_1, l_2 为常数)，计算这些曲线与平行于 t 轴的直线的交点，就能够确定 $x(t)$ 在 $\bar{x}_0$ 之后的第一个最大值 $\bar{x}_2$. 事实上，如果 $\bar{x}_0 \in (c_j, c_{j+1}]$，则当 $x \in (c_j, c_{j+1})$ 时，方程 (6.3.3) 可以写成 $\ddot{x} + \omega f_j \dot{x} + \omega^2 x = 0$.

这个方程的由初始条件 $x(0) = \bar{x}_0$, $\dot{x}(0) = 0$ 确定的解，可以写成 (6.3.34) 的形式，从而我们可以确定它们与直线 $x = c_j$ 的交点.

设 $t_1 > 0$ 为交点的横坐标而 $\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1 < 0$; 我们考虑方程 $\ddot{x} + \omega f_{j-1}\dot{x} + \omega^2 x = 0$ 的满足条件 $x(t_1) = c_j$, $\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$ 的解，并

和以前一样进行运算. 照此继续下去,可以算出(6.3.3)的由初始条件 $x(0)=\bar{x}_0$, $\dot{x}(0)=0$ 所确定的解 $x(t)$ 在 $\bar{x}_0$ 之后的最大值 $\bar{x}_2$, 以及使得 $x(T)=\bar{x}_2$ 及 $\dot{x}(T)=0$ 的 t 的值 T.

如果 $\bar{x}_2=\bar{x}_0$, 则(6.3.3)的周期解就确定了;如果 $\bar{x}_0<\bar{x}_2$, 对 $\bar{x}_0$, x_0^* 进行与对 x_0, x_0^* 相同的处理;如果 $\bar{x}_0>\bar{x}_2$, 就用 $(x_0, \bar{x}_0)$ 代替 $(\bar{x}_0, x_0^*)$.

用这个方法可以做出两个单调序列, 它们以周期解振荡正的振幅为公共极限. 所以,有可能对这个振幅,同时也就是对周期进行数值估计,其误差可以任意小.

(b) 在 $f(x)$ 满足 (a) 中所列条件的情形,上述方法可以用来对方程 $du/dx=-f(x)-x/u$ 的环进行数值估计.

(c) 给定(6.3.3), 并假设 $f(x)$ 对 x 的所有有限值都有定义, 且满足§3.5(d)中的条件,则存在周期解. 我们假定它是唯一的.

对给定的 $\varepsilon>0$, 假定存在函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$, 除满足(a)中的条件外,它们还满足不等式 $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$, $0\leqslant f_2(x)-f_1(x)\leqslant\varepsilon$. 当 $f(x)$ 连续, 且满足§3.3(b)中的条件时,这是可能的. 因为我们可以把 x 限制在有限区间中变化, 并用阶梯函数去逼近 $f(x)$.

方程

$$du/dx=-f(x)-x/u,$$
$$du_1/dx=-f_1(x)-x/u_1,$$
$$du_2/dx=-f_2(x)-x/u_2$$

分别有极限环 Γ, $\Gamma_1(\varepsilon)$ 和 $\Gamma_2(\varepsilon)$, 根据§3.6的比较定理, Γ 包含在 $\Gamma_1(\varepsilon)$ 之中,而它又包含了 $\Gamma_2(\varepsilon)$.

可以证明,在现有假设下, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $\Gamma_1(\varepsilon)$ 和 Γ 之间的距离以及 $\Gamma_2(\varepsilon)$ 与 Γ 之间的距离都趋于零.

8. van der Pol 方程. 轨线在无穷远处的性态

(a) 本节的后半部分要讨论 van der Pol 方程,即

$$\ddot{x}+\lambda(x^2-1)\dot{x}+x=0. \tag{6.3.2}$$

如果令 $y = \dot{x} + \lambda(x^3/3 - x)$，(6.3.2) 就等价于系统

$$\dot{x} = y - \lambda(x^3/3 - x), \quad \dot{y} = -x.$$

根据§ 3.3，方程 (6.3.2) 恰有一极限环.

在本节的下几段中，我们要研究这些极限环与参数 λ 的关系，同时也要进行数值计算. 而在这里，我们将从另一方面来研究轨线在无穷远处的性态(参看 S. Lefschetz [1], 67—73 页).

(b) 轨线在 Poincaré 球面上的像(第二章，§ 5)满足方程

$$xz^3dx + z[yz^2 - \lambda(x^3/3 - xz^2)]dy$$
$$- [x^2z^2 + y(yz^2 - \lambda(x^3/3 - xz^2))]dz = 0. \quad (6.3.35)$$

无穷远处奇点的坐标，可以由在方程组

$$xz^3 = 0, \quad z[yz^2 - \lambda(x^3/3 - xz^2)] = 0,$$
$$x^2z^2 + y[yz^2 - \lambda(x^3/3 - xz^2)] = 0$$

中令 $z = 0$ 而求得，所以，得到两点 $P_{1,\infty} = (1, 0, 0)$ 及 $P_{2,\infty} = (0, 1, 0)$.

易于确定轨线在 $P_{1,\infty}$ 邻域中的性态. 事实上，把 (6.3.35) 与方程 $xdx + ydy + zdz = 0$ 联系起来考虑，就得到

$$dy:dz = \begin{vmatrix} -[x^2z^2 + y\{yz^2 - \lambda(x^3/3 - xz^2)\}] & xz^3 \\ z & x \end{vmatrix}$$
$$: \begin{vmatrix} xz^3 & z[yz^2 - \lambda(x^3/3 - xz^2)] \\ x & y \end{vmatrix}$$

从球心把轨线投影到平面 $x = 1$ 上，所得曲线的方程为 $\lambda z(1/3 - z^2)dy = -\{z^2 + y[yz^2 - \lambda(1/3 - z^2) + z^4]\}dz$.

这个方程的简化方程为 $zdy = ydz$，有解 $y = cz$(c 为常数)，于是 $P_{1,\infty}$ 形如一个星形结点，也就是说，每一条与 x 轴平行的直线，都是与 (6.3.2) 等价的系统的轨线的渐近线.

关于在 $P_{2,\infty}$ 的邻域中的轨线的研究，建议读者去参阅上面所引的 Lefschetz 的文章 (S. Lefschetz [1], 72 页).

(c) 这些分析可以推广到 Liénard 方程 $\ddot{x} + [dF(x)/dx]\dot{x} + x = 0$ 上去，其中假设 $F(x)$ 为奇函数，且是 x 的具有限个零点的解析函数，并满足其它的一些假设(参看 S. Lefschetz [2]).

9. 当参数趋近于无穷时，van der Pol 方程的极限环的性态．D. A. Flander 和 J. J. Stoker 定理

我们再来研究 van der Pol 方程

$$\ddot{x}+\lambda(x^2-1)\dot{x}+x=0, \qquad (6.3.2)$$

其中 $\lambda>0$ 为一实的参数．(6.3.2) 在 Liénard 平面上的轨线满足方程

$$dy/dx=-x/[y-\lambda(x^3/3-x)], \qquad (6.3.10')$$

如果把 y 换成 λy，上式就化为

$$dy/dx=-x/x^3[y-x^3/3+x]. \qquad (6.3.10'')$$

考虑 (6.3.2) 的基本曲线(§ 3.1 b) C_3: $y=x^3/3-x$，并且把 C_3 上坐标分别为 $(2,2/3)$，$(1,-2/3)$，$(-2,-2/3)$，$(-1,2/3)$ 的四点记为 A_1，A_2，A_1'，A_2'，设 L 为由弧 $\overparen{A_1A_2}$，$\overparen{A_1'A_2'}$ 和线段 $\overline{A_2A_1'}$，$\overline{A_2'A_1}$ 所组成的闭曲线(图 107)．

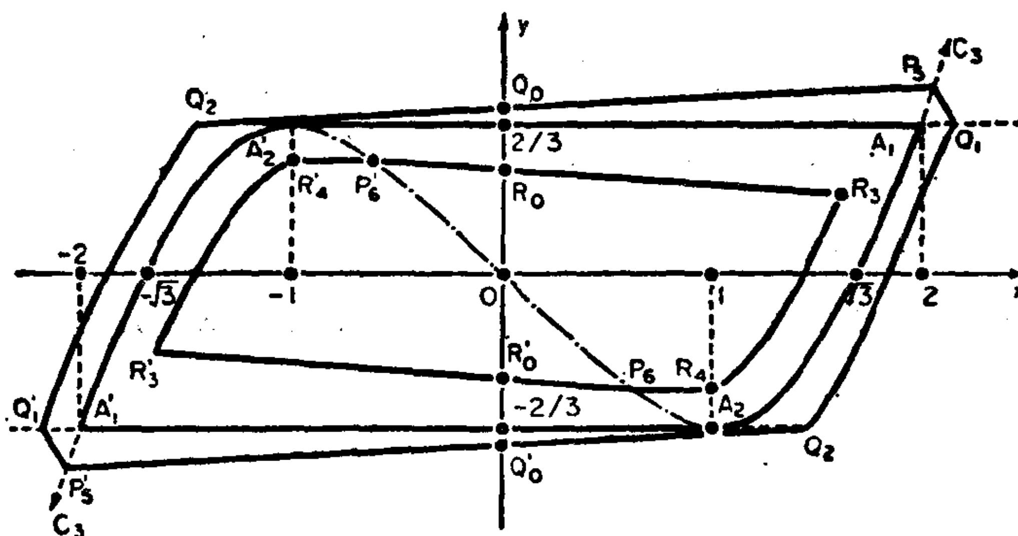


图 107

取 δ 使得 $0<\delta<1/3$，并把 C_3 沿负 y 轴平移 2δ 单位，成为曲线 $\bar{C}_3$．现在在 $\bar{C}_3$ 上取纵坐标为 $2/3$ 及 $-2/3$ 的点 Q_1 与 Q_3，它们分别在第一和第四象限．

把第一象限中纵坐标为 $2/3+\delta$ 的 C_3 上的点记为 P_5，而 Q_1'，Q_2'，P_5' 表示点 Q_1，Q_2，P_5 关于原点的对称点．

线段 $\overline{P_5Q_1}$，$\bar{C}_3$ 的弧 $\widehat{Q_1Q_2}$ 和线段 $\overline{Q_2P'_5}$ 关于 O 点与线段 $\overline{P'_5Q'_1}$，$\widehat{Q'_1Q'_2}$ 和 $\overline{Q'_2P_5}$ 对称，把由这些线段与弧所围成的闭曲线记为 $C_3^{(e)}(\delta)$. 线段 $\overline{Q'_2P_5}$ 和 $\overline{Q_2P'_5}$ 与 y 轴交于 Q_0 与 Q'_0，它们把 $C_3^{(e)}(\delta)$ 分成两个关于 O 的对称弧.

现作闭曲线 $C_3^{(i)}(\delta)$ 如下：设 $\bar{\bar{C}}_3$ 为将 C_3 沿正 y 轴平移 δ 单位所得到的曲线，考虑 $\bar{\bar{C}}_3$ 上纵坐标为 $(2/3)-2\delta$ 及 $(-2/3)+\delta$ 的，分别属于第一与第四象限的点 R_3 与 R_4，而 R'_3 与 R'_4 为 R_3 与 R_4 关于 O 的对称点.

设 P_6 为 C_3 的弧 $\widehat{OA_2}$ 上纵坐标为 $(-2/3)+\delta$ 的，在第四象限的点，而 P'_6 为 P_6 关于 O 对称的点. 曲线 $C_3^{(i)}(\delta)$ 是由 $\bar{\bar{C}}_3$ 的弧 $\widehat{R_3R_4}$，弧 $\widehat{R'_3R'_4}$ 以及线段 $\overline{R'_4P'_6}$，$\overline{P'_6R_3}$，$\overline{R_4P_6}$ 和 $\overline{P_6R'_3}$ 所组成.

把 $\overline{P_6R'_3}$ 与 $\overline{P'_6R_3}$ 和 y 轴的交点记为 R_0 与 R'_0，它们关于 O 点对称.

$S(\delta)$ 表示由 $C_3^{(e)}(\delta)$ 和 $C_3^{(i)}(\delta)$ 所围成的环域.

我们来证明下面的定理(参看 D. A. Flanders-J. J. Stoker [1])：

定理. 存在 λ_0，使得对每一 $\lambda>\lambda_0$，(6.3.10″) 的环 $L(\lambda)$ 都属于 $S(\delta)$.

为了证明这个定理，只需证明当 λ 充分大时，凡是和 $C_3^{(e)}(\delta)$ 与 $C_3^{(i)}(\delta)$ 有公共点的轨线，都在 t 增加时进入 $S(\delta)$，其中 t 为在系统

$$dx/dt=-\lambda^2[x^3/3-x-y],\ dy/dt=x$$

中出现的变量，这个系统与 (6.3.10″) 等价. 因为关于 O 的对称性，我们只考虑 $C_3^{(e)}(\delta)$ 的弧 $Q_0P_5Q_1Q_2Q'_0$ 和 $C_3^{(i)}(\delta)$ 的弧 $R_0R_3R_4P_6R'_0$.

我们看到，在 Q_0，$\dot{x}>0$，$\dot{y}=0$；在 $\overline{Q_0P_5}$ 的内侧，$\dot{x}>0$，$\dot{y}<0$；在 P_5，$\dot{x}=0$，$\dot{y}<0$；在 $\overline{P_5Q_1}$ 的内侧，$\dot{x}<0$，$\dot{y}<0$. 由此可以推出，线段 $\overline{Q_0P_5}$ 和 $\overline{P_5Q_1}$ 除 Q_1 外，都有所要求的性质.

在 $\widehat{Q_1Q_2}$ 上各点，$\dot{x}<0$，$\dot{y}<0$，$dy/dx=x/(2\lambda^2\delta)$，这是由

于 $\widehat{Q_1Q_2}$ 上各点的斜率等于 x^2-1，而 $\overline{Q_2Q_0'}$ 上各点斜率为正，故存在 λ_0，使得对于 $\lambda>\lambda_0$，$\widehat{Q_1Q_2}$ 上所有的点都有此所要求的性质．如果必要，只需让 λ_0 变大，就可以使得在 $\widehat{Q_2Q_0'}$ 之上的各点也具有相同的性质，在 $\widehat{Q_2Q_0'}$ 上有 $\dot{x}<0$，$\dot{y}<0$．进一步增大 λ_0，$C_3^{(i)}(\delta)$ 也就具有这样的性质．

10. 含有大参数的 van der Pol 方程的周期解的周期与振幅的渐近估值

可以证明，方程 $\eta_0 d\eta_0/d\xi=2\xi\eta_0+1$ 恰有一满足 $\lim\limits_{\xi\to-\infty}\eta_0^*(\xi)=0$ 的解 $\eta_0^*(\xi)$．如果常数

$$\alpha=\eta_0^*(0),\ \beta=\int_0^{+\infty}\frac{d\xi}{\eta_0^*(\xi)}\ (\alpha+\beta=2.338\cdots),$$

就得到下面属于 M. L. Cartwright [1] 的定理．

定理． 当 $\lambda\to+\infty$ 时，方程 $\ddot{x}+\lambda(x^2-1)\dot{x}+x=0$ 的周期解的周期 $2T$ 及振幅 h 有如下的渐近表达式：

$$T=\lambda\left(\frac{3}{2}-\log 2\right)+\frac{3(\alpha+\beta)}{2\lambda^{1/3}}+o(1/\lambda^{1/3}),$$

$$h=2+\frac{\alpha+\beta}{3\lambda^{4/3}}+o(1/\lambda^{4/3}).$$

关于 T 的如下表达式是由 A. A. Dorodnicyn [1] 和 M. Urabe [1] 建立的：

$$T=\lambda\left(\frac{3}{2}-\log 2\right)+\frac{3(\alpha+\beta)}{2\lambda^{1/3}}-\frac{1}{6}\frac{\log\lambda}{\lambda}$$
$$+\frac{1}{2}\left(3\log 2-\log 3-\frac{3}{2}+b_0-2d\right)\frac{1}{\lambda}+O(\lambda^{-4/3}),$$

其中 $b_0=0.1723\cdots$，$d=0.4889$．

11. R. Gomory 和 D. E. Richmond 关于极限环的不等式

(a) J. Lasalle [1] 给出了相平面上包含 Liénard 方程的一个

极限环的环域的明显结构．为了简明起见，我们只限于讨论 Van der Pol 方程，介绍 R. Gomory 和 D. E. Richmond [1] 的方法．

Van der Pol 方程等价于系统 $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x+\lambda(1-x^2)y$. 如果令

$$r^2=x^2+y^2,\ r>0, \tag{6.3.36}$$

就有 $r\dot{r}=\lambda y^2(1-x^2)$，从而在半平面 $y>0$ 上，轨线方程可以写成

$$rdr/dx=\lambda(1-x^2)(r^2-x^2)^{1/2}. \tag{6.3.37}$$

如果

$$C_1:(x^2+y^2)^{1/2}=r(x),\ y\geqslant 0 \tag{6.3.38}$$

为定义在 $-a<x<a$ 上的曲线，使得 (6.3.37) 的经过其上任一点的轨线，当 t 增加时，都进入由 C_1 和 x 轴所围成的区域 D_1，则 C_1 和它关于 x 轴的对称曲线 C_2 确定了一个区域，其中含有 van der Pol 方程的极限环，相应的 a 就是周期振荡的振幅的一个上界．

曲线 C_1 可以构造如下． 将区间 $(-a, a)$ (a 即将加以说明) 用包括 -1 与 1 在内的点分成有限个子区间，其中有一些(至多除去一个端点)在 $(-1, 1)$之外，而其余的(至多除去一个或两个端点)都全在 $(-1, 1)$ 之内． 在每一个第一类区间中，把点的横坐标的平方 x^2 的最大值记为 $x^2_{\max}$，对应于这些区间，考虑方程

$$rdr/dx=\lambda(1-x^2)(r^2-x^2_{\max})^{1/2}. \tag{6.3.39}$$

对于每一个其它的子区间(属于 $(-1, 1)$)，把点的横坐标的平方 x^2 的最小值记为 $x^2_{\min}$，对应于这些区间，考虑方程

$$rdr/dx=\lambda(1-x^2)(r^2-x^2_{\min})^{1/2}. \tag{6.3.40}$$

这些方程形如 $rdr/dx=\lambda(1-x^2)(r^2-c^2)^{1/2}$，其中 c 为常数． 它们有解

$$r=c \tag{6.3.41}$$

以及解

$$(r^2-c^2)^{1/2}=\lambda(x-x^3/3)+k,\ (k\text{ 为任意常数}). \tag{6.3.42}$$

端点在 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$ 的曲线 C_1，将由方程 (6.3.42) 确定的曲线弧(其中 $r^2=x^2+y^2$)，以及可能还有圆 $r=c$ (解

(6.3.41),其中 $r^2 = x^2 + y^2$) 的弧构成.

将(6.3.39)和(6.3.40)与(6.3.37)比较，就会发现(6.3.37)的由(6.3.42)上的点出发的轨线，进入区域 D_1，C_1 也可以由以原点为中心的半圆组成，如果(6.3.37)从这半圆上出发的轨线进入 D_1 的话.

我们已说明过，常数 a 并不是完全任意的. 它必须总是这样来选择，使得 C_1 的端点关于原点对称.

例如，考虑 $(-a, -1)$，$(-1, 1)$ 和 $(1, a)$ 三个区间. 在第一个区间上取以原点为中心，以 a 为半径的圆弧；在第二个区间上取曲线

$$r = \lambda(x - x^3/3) + k, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad (6.3.43)$$

的一段弧；而在第三个区间上取曲线

$$(r^2 - a^2)^{1/2} = \lambda[(x - a) - (x^3 - a^3)/3], \quad r(a) = a \qquad (6.3.44)$$

的弧.

显然有 $r(-1) = a$，且由(6.3.43)可推出 $r(1) - r(-1) = 4\lambda/3$，而由(6.3.44)可推出 $(r^2(1) - a^2)^{1/2} = \lambda(a^3 - 3a + 2)/3$. 消去 $r(-1)$ 和 $r(1)$，就得到

$$a^3 - 3a + 2 - 4[1 + 3a/(2\lambda)]^{1/2} = 0,$$

由此推出不等式

$$2.18 < a < 2.19.$$

如果在§ 3.2 的公式(6.3.15.1)中令 $F(x) = x^3/3 - x$，就推得 2.6 是 a 的一个上界.

(b) 用同样的方法，可以在半平面 $y \geq 0$ 上构造曲线 C_2，使得它们的端点为 $(-c, 0)$ $(c > 0)$ 及 $(b, 0)$ $(b > 0)$，它们由(6.3.39)及(6.3.40)所确定的弧段所组成，只不过其中的 x^2_{max} 及 x^2_{min} 要相应地改变. 曲线 C_2 和关于 x 轴与 C_2 对称的曲线确定了一条闭曲线，它包含在 van der Pol 方程的极限环之中.

§4. 广义 Liénard 方程的周期解

1. A. F. Filippov 的第一个定理

这一节和下一节要介绍 A. F. Filippov 的一些结果[1].

(a) 考虑方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \tag{6.4.1}$$

假设 $g(x)$ 对于所有有限 x 连续,且

$$xg(x)>0, \text{ 对 } |x|>0. \tag{6.4.2}$$

令

$$z_1(x)=\int_0^x g(s)ds, \text{ 当 } x\geqslant 0;\ z_2(x)=\int_0^x g(s)ds, \text{ 当 } x\leqslant 0,$$

当 $x\neq 0$ 时,函数 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 都是正的, $z_1(x)$ 递增, $z_2(x)$ 递减,所以它们的反函数存在. 假设

$$z_1(+\infty)=z_2(-\infty)=+\infty. \tag{6.4.3}$$

于是,反函数 $x=x(z_1)$ 及 $x=x(z_2)$ 当 $0\leqslant z_1<+\infty$ 及 $0\leqslant z_2<+\infty$ 时都连续.

设 $f(x)$ 对所有有限的 x 连续,且和通常一样,令

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds,$$

且

$$F_1(z_1)=F(x(z_1)),\ F_2(z_2)=F(x(z_2)). \tag{6.4.3'}$$

于是,有下面的定理.

定理. (A. F. Filippov 的第一个定理).

方程 (6.4.1) 至少有一个周期解,如果: (i) $f(x)$, $g(x)$ 对所有 x 连续; (ii) (6.4.2) 成立; (iii) (6.4.3) 成立,即 $\int_0^{\pm\infty} g(s)\,ds=\pm\infty$; ($\alpha$) 存在 $\delta>0$,使得当 $0<z<\delta$ 时, $F_1(z)\leqslant F_2(z)$, 但 $F_1(z)\equiv F_2(z)$ 不能对所有的 z 成立; 存在常数 a, $0<a<\sqrt{8}$, 使得当 $0<z<\delta$ 时, $F_1(z)<a\sqrt{z}$, $F_2(z)>-a\sqrt{z}$; (β) 存在 $z_0>0$, 使得

$$\int_0^{z_0}[F_1(z)-F_2(z)]dz>0,$$

而当 $z>z_0$ 时，$F_1(z)\geqslant F_2(z)$，$F_1(z)>-a\sqrt{z}$，$F_2(z)<a\sqrt{z}$.

方程 (6.4.1) 等价于系统

$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x), \tag{6.4.4}$$

由它可以推出 $g(x)dx/dy=F(x)-y$. 利用 (6.4.3′) 及 $z_1(x)$，$z_2(x)$ 的定义，得到

$$dz_1/dy=F_1(z_1)-y, \tag{6.4.5}$$

$$dz_2/dy=F_2(z_2)-y, \tag{6.4.6}$$

在半平面 $z_1>0$ 中，当 $x>0$ 时，对应于(6.4.4)，考虑(6.4.5)；而当 $z_2>0$ 及 $x<0$ 时，对应于 (6.4.4)，考虑 (6.4.6).

过半平面 $z_1>0$ 的每一点，都只有 (6.4.5) 的一个解通过，这是由于

$$\frac{dF_1(z_1)}{dz_1}=\frac{dF(x)}{dx}\Big/\frac{dz_1}{dx}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

为连续函数；(6.4.6) 也具有同样的性质. 而且，如果 $y_0\neq 0$，恰存在 (6.4.5) 的一个满足 $z_1>0$ 的解，使得当 $y\to y_0$ 时，有 $\lim z_1(y)=0$，又恰存在 (6.4.6) 的一个满足 $z_2>0$ 的解，使得当 $y\to y_0$ 时，有 $\lim z_2(y)=0$. 这个结果可由下面的事实推出，就是方程 $dy/dx=g(x)/(F(x)-y)$ 的右端关于 y 有连续的导数.

首先证明两个引理.

(b) **引理 1.** 如果 $F(z)$ 及其导数在 $0\leqslant z\leqslant\delta$ 上连续，$F(0)=0$，$F(z)<a\sqrt{z}$ $(0<a<\sqrt{8})$，则方程

$$dz/dy=F(z)-y \tag{6.4.7}$$

的经过点 $B=(F(z'),z')$ $(\delta>z'>0$ 为任意数$)$的解，必与 y 轴相交于 A,C 两点，其中 $y_A\geqslant 0$，而 $y_C<0$. 类似地，当 $F(z)>-a\sqrt{z}$ 时，则有 $y_A>0$，$y_C\leqslant 0$.

所考虑的解在 B (图 108) 的切线与 y 轴平行，而 (6.4.7) 的由 B 出发的解将在某个区间 $\alpha<y<\beta$ 上有定义. 由于在 y 的某个

值的上方，$z(y)$ 将在 $y-F(z)=0$ 的上方，由此可以推出，当 $y\to+\infty$ 时，$\lim z(y)=z_0\geqslant 0$. 然而，如果 $y>1+\max\limits_{[0,z']}F(z)$，则有 $dz/dy<-1$. 于是可以推出，当 $y\to+\infty$ 时，有 $\lim z(y)=-\infty$. 因此，不可能有 $\beta=+\infty$，即 $\beta<+\infty$，而由 B 出发的解与 y 轴相交于一点 A，其纵坐标 $y_A\geqslant 0$.

用类似的方法可以证明：这个解与 y 轴相交于一点 C，且有 $y_C\leqslant 0$. 剩下的只须证明严格不等式 $y_C<0$ 成立.

为此，考虑方程

$$d\omega/dy=\alpha\sqrt{\omega}-y, \tag{6.4.8}$$

对此，如果令 $\sqrt{\omega}=u$，就得到 $du/dy=(\alpha u-y)/2u$. 由于假设 $0<\alpha<\sqrt{8}$，对应的特征方程 $2k^2-2k+1=0$ 有共轭复根，原点是焦点，所以(6.4.8)经过 B 的解，与 y 轴交于一点 D，其中 $y_D<0$.

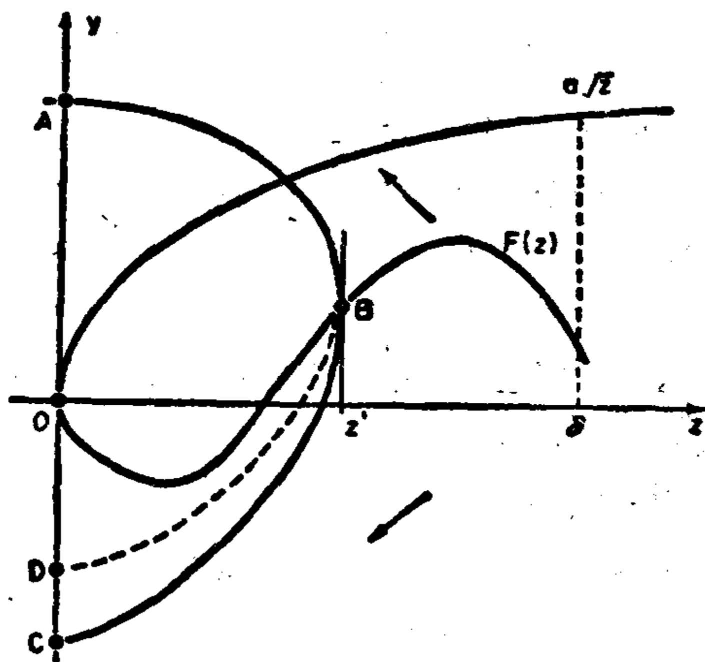


图 108

比较 (6.4.7) 和 (6.4.8)，可以推出，当 $y<y_B$ 时，$z(y)>\omega(y)$，由此可知有 $y_C<y_D<0$.

(c) **引理 2.** 如果在方程 (6.4.7) 中，$F(z)$ 及其一阶导数在

$0 \leqslant z < \delta$ 上连续，$F(0)=0$，且当 $z > z_0$ 时，$F(z) < a\sqrt{z}$ $(0 < a < \sqrt{8})$，则对于任意 $y_k < 0$，(6.4.7) 的由 y 轴上的点 $K=(0, y_K)$ 出发的解，必与 y 轴交于第二点 L，其中 $y_L \geqslant 0$.

类似地，如果当 $z > z_0$ 时，$F(z) > -a\sqrt{z}$，则由 $M=(0, y_M)$ $(y_M > 0)$ 出发的解，必与 y 轴交于一点 N，其中 $y_N \leqslant 0$.

事实上，如果所考虑的解不与 $z=z_0$ 相交，它将与曲线 $y=F(z)$ 相交，于是可以像引理 1 的第一部分那样得出结论．相反，如果这个解与直线交于一点 P（图 109），就拿 $z(y)$ 和 (6.4.8) 的经过 P 的解 $\omega=\omega(y)$ 比较.

由前面的讨论可知，$\omega(y)$ 必与 y 轴交于两点．另一方面，由于当 $y > y_P$ 及 $z \geqslant z_0$ 时，$z(y) < \omega(y)$，故 $z(y)$ 必与 $y=F(z)$ 相交，从而结论成立.

(d) 我们注意到，在引理 2 的假设下，如果当 $0 < z < \delta$ 时，$F(z) > -a\sqrt{z}$ $(F(z) < a\sqrt{z})$，则由引理 1，有 $y_L > 0$ $(y_N < 0)$.

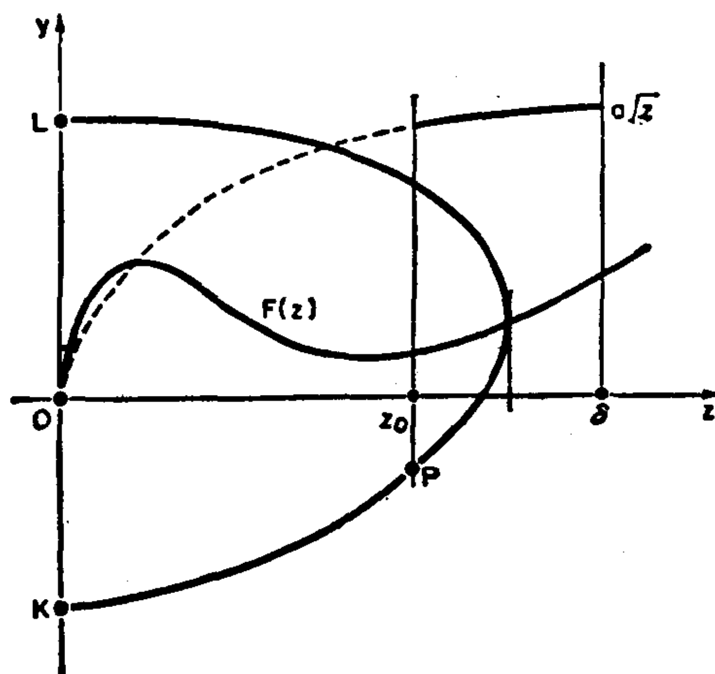


图 109

(e) 我们来证明，条件 (α) 保证可做出 (0,0) 的一个邻域，其

中不含 (6.4.4) 的任何整条正半轨.

设 $z' < \delta$, 并考虑方程 (6.4.5), (6.4.6) 或者其等价方程

$$dy/dz = [F_1(z) - y]^{-1},\ dy/dz = [F_2(z) - y]^{-1} \qquad (6.4.9)$$

的各自过 $B = (F_1(z'), z')$, $E = (F_2(z'), z')$ 的解.

根据引理 1, 这些解分别与 y 轴交于 A 和 C, D 和 F, 其中 $y_A \geqslant 0 > y_C$; $y_D \leqslant 0 \leqslant y_F$ (图 110). 由于 $y_B \leqslant y_E$ 和 $F_1(z) \leqslant F_2(z)$, 比较 (6.4.9) 的两个方程, 可以推出 $y_A \leqslant y_F$, 类似地可以推出 $y_C \leqslant y_D$.

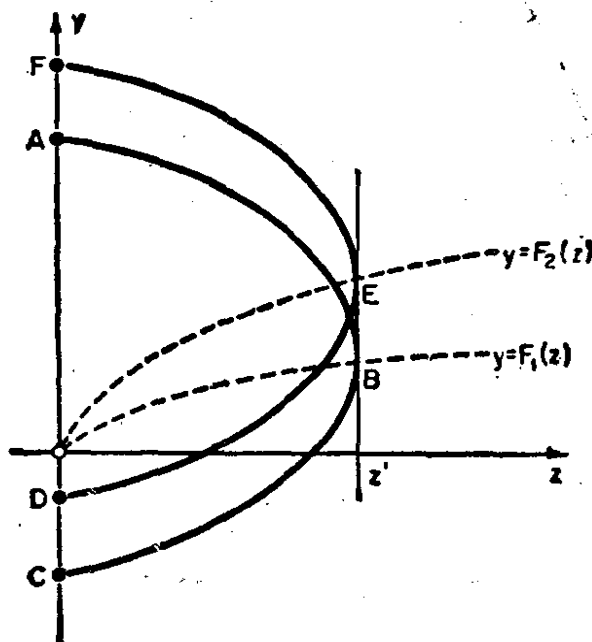


图 110

考虑 x, y 平面, 设 $\widehat{A'B'C'}$, $\widehat{D'E'F'}$ 为 (6.4.4) 的轨线, 它们是 y, z 平面中轨线 $\widehat{ABC}$ 和 $\widehat{DEF}$ 的象(图 111). 设 $\widehat{C'H'}$ 和 $\widehat{F'G'}$ 为这些轨线的延长线, 其中 H' 和 G' 如此选取, 使得线段 $\overline{H'E'}$ 和 $\overline{B'G'}$ 与 y 轴平行. 我们要证明区域 $B'C'H'E'F'G'B'$ 不可能包含 (6.4.4) 的任何整条轨线.

事实上, 根据唯一性, 弧 $\widehat{B'H'}$, $\widehat{E'G'}$ 不可能与轨线相交, 而在垂直线段 $\overline{G'B'}$, $\overline{H'E'}$ 上的点出发的轨线, 当 t 增加时, 只可能走出这区域, 这是因为在 $\overline{G'B'}$ 上, $\dot{x} = y - F(x) > 0$, 在 $\overline{H'E'}$

上，$\dot{x} = y - F(x) < 0$.

只有在 $F_1 \equiv F_2$（当 $z < \delta$）的情形，(6.4.9) 的解 $\widehat{ABC}$，$\widehat{DEF}$ 才可能重叠，而弧 $\widehat{A'B'C'}$，$\widehat{D'E'F'}$ 构成 (6.4.4) 的一个环，

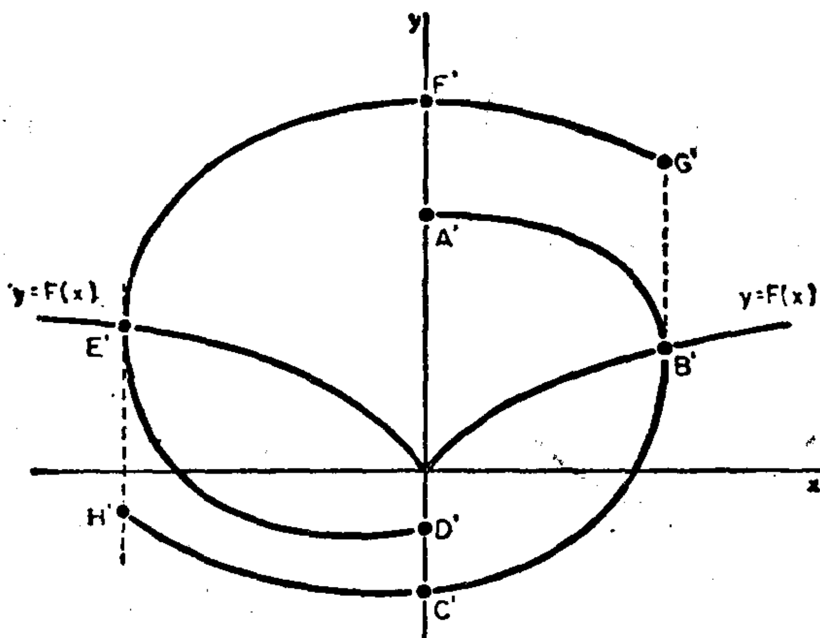


图 111

于是，在这种情形，(6.4.4) 在原点邻域中的所有的解都是周期的，从而原点是一个中心.

(f) 根据引理 2，定理的条件 (β) 和 (e) 的结果，(6.4.6) 的由点 $K = (0, y_K)$，$y_K < 0$，出发的解与 y 轴交于一点 L，$y_L \geqslant 0$. 如果 y_K 减少，y_L 将增加，所以趋近于一个极限，把这极限记为 y_M；再次应用 (e) 的结论，y_M 不可能为零，从而有 $y_M > 0$. 现在必须分别讨论两种情形：$y_M < +\infty$ 或者 $y_M = \infty$.

(g) 首先讨论 $y_M < +\infty$ 的情形.

根据引理 2，定理的条件 (β) 以及 (e) 的结论，(6.4.5) 由 $M = (0, y_M)$ 出发的解与 y 轴交于一点 N，$y_N < 0$，(6.4.6) 由 N 出发的解与 y 轴交于一点 P，$y_P > 0$. 根据 (f)，$y_P < y_M$.

转到 x，y 平面，由于在 $\overline{M'P'}$ 上，$\dot{x} = y - F(x) > 0$，当 t 增加时，轨线不可能走出由轨线 $\widehat{M'N'P'}$ 和线段 $\overline{M'P'}$ 所围成的区

域(图 112). 根据 (e) 的结果就可以证明，在这个区域内至少存在一个极限环.

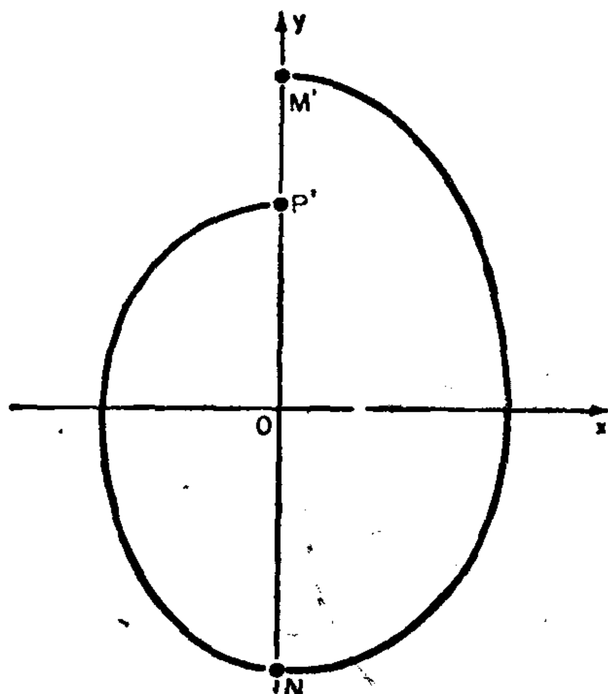


图 112

(h) 再考虑 $y_M=+\infty$的情形.为此,我们先对 (6.4.9) 的积分曲线进一步做些分析.

假定定理的条件 (β) 成立，$y_1(z)$ 及 $y_2(z)$ 是 (6.4.9) 满足初值条件 $y_1(0)=y_2(0)=y_0$ 的解.

我们要证明存在 $p>0$，使得当 $|y_0|>p$ 时，$y_1(z_0)<y_2(z_0)$.

(h_1) 如果 $|y_0|$ 充分大,则 $y_1(z)$ 及 $y_2(z)$ 在 $[0,z_0]$ 上存在，而且我们立即会看到，它们与 y_0 的差可以小于任意 $\varepsilon>0$，从而,它们彼此之间的差也会小于任意 $\varepsilon>0$.

事实上,令 $m=\max\limits_{[0,z_0]}[|F_1(z)|,\ |F_2(z)|]$,

$$|y_0|\geqslant m+z_0/\varepsilon+\varepsilon, \tag{6.4.10}$$

并设 z' 为使得 $|y_1(z)-y_0|\geqslant\varepsilon$ 成立的 z 的最小值. 则

$$\varepsilon=|y_1(z')-y_1(0)|=z'|(dy_1/dz)_{z=z''}|, \tag{6.4.11}$$

其中 $0<z''<z'$. 如果 $z'<z_0$，则根据 (6.4.9) 和 (6.4.10)，就得到

$$\begin{aligned}|(dy_1/dz)_{z=z''}|&=|-F_1(z'')+y_1(z'')|^{-1}\\&\leqslant[|y_0|-\varepsilon-m]^{-1}\leqslant\varepsilon/z_0,\end{aligned}$$

应用 (6.4.11)，就可以推出 $\varepsilon\leqslant z'\varepsilon/z_0$，但这与假设 $z'<z_0$ 矛盾. 所以,当 $z\in[0,z_0]$ 时，$|y_1(z)-y_0|\leqslant\varepsilon$. 对 y_2 也可以得到类似的结果.

(h_2) 如果 $|y_0|\to+\infty$，则 $y_0^2/(F_1(z)-y_1(z))(F_2(z)-$

$y_2(z)$) 在 $[0, z_0]$ 上一致趋近于1. 事实上，这个表达式可以写成 $1/(y_1/y_0 - F_1/y_0)(y_2/y_0 - F_2/y_0)$，根据 ($h_1$)，$y_1/y_0$ 和 y_2/y_0 在 $[0, z_0]$ 上一致趋近于1，同时，$|F_1(z)|$ 和 $|F_2(z)|$ 都不大于 m。

(h_3) 由 (6.4.9) 和 $y_1(0) = y_2(0)$，可以得到恒等式

$$\left.\begin{aligned} & y_0^2(y_2(z_0) - y_1(z_0)) \\ & = \int_0^{z_0} (y_2 - y_1)\frac{y_0^2}{(F_1 - y_1)(F_2 - y_2)}dz \\ & \quad + \int_0^{z_0}(F_1 - F_2)dz + \int_0^{z_0}(F_1 - F_2) \\ & \quad \times \left[\frac{y_0^2}{(F_1 - y_1)(F_2 - y_2)} - 1\right]dz = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}\right\} \quad (6.4.12)$$

当 $|y_0| \to +\infty$ 时，由 (h_1) 和 (h_2) 可证 $I_1 \to 0$；由于 $|F_1 - F_2| \leqslant 2m$，由 (h_2) 还可证明 $I_3 \to 0$.

由定理的假设 (β)，$I_2 > 0$. 所以，当 $|y_0| \to +\infty$ 时，

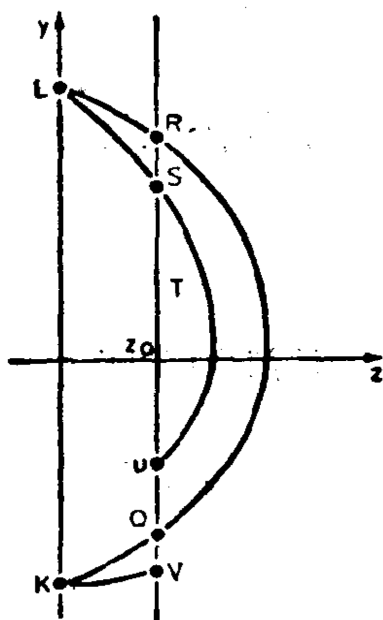


图 113

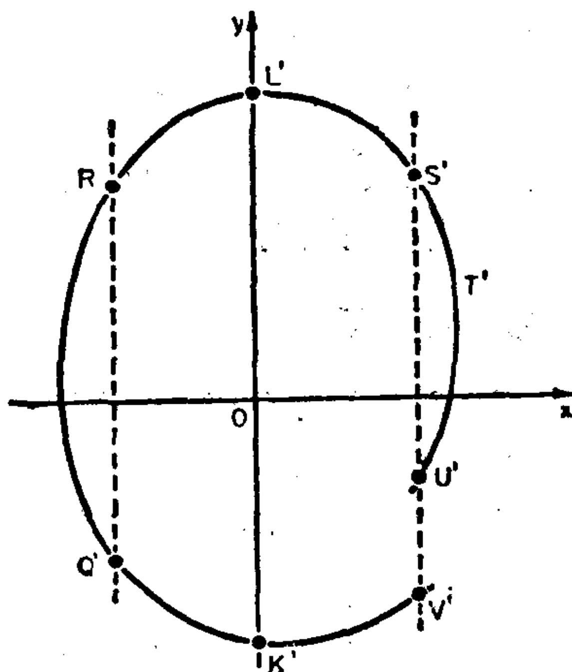


图 114

(6.4.12)的右端趋近于正极限 I_2，从而，当 $|y_0|$ 充分大时，$y_2(z_0) - y_1(z_0) > 0$.

(i) 现在考虑 $y_M = +\infty$ 的情形。

考虑 (6.4.6) 的解 $KQRL$（图 113），对于 (h) 中的 p，它满足 $y_K < -p$，$y_L > p$. 同时考虑 (6.4.5) 的解 LST 和 KV，由 (e)，有 $y_S < y_R$，$y_V < y_Q$.

由于当 $z > z_0$ 时 $F_1(z) \geqslant F_2(z)$，比较 (6.4.5) 和 (6.4.6)，就可以证明解 ST 不可能与解 RQ 相交. 由此可知 ST 再次与 $z=z_0$ 交于点 U，$y_U > y_Q$. 从而 $y_U > y_V$.

回到 (x, y) 平面（图 114），就可以断言，当 t 增加时，轨线不能走出由轨线弧 $V'K'Q'R'L'S'T'U'$ 与线段 $U'V'$ 所围成的区域. 所以，在这个区域内至少存在一个极限环，定理的结论在任何情形下都成立.

2. A. F. Filippov 的第二个定理

根据 §4.1 的 (f)，还有如下定理：

定理. (A. F. Filippov 第二定理). 如果 § 4.1 定理的假设 (i), (ii), (iii) 成立，且存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < z < \delta$ 时，$F_1(z) = F_2(z)$，$|F_1(z)| < a\sqrt{z}$，$0 < a < \sqrt{8}$，则存在原点的邻域，在其中，(6.4.1) 的所有的解都是周期的，即原点是系统 (6.4.4) 的一个中心.

3. 唯一性定理

§ 3.3 (b) 的存在唯一性定理的唯一性部分可以推广如下（参看 R. Conti [1]）.

假定对于 (6.4.1)，§ 4.1 的假设 (i), (ii), (iii) 成立.

令

$$u = |\sqrt{2G(x)}|\operatorname{sgn} x, \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (6.4.13)$$

其中

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds.$$

则对所有 x，$u = u(x)$ 为递增的，且最多除 $x = 0$ 外，处处可微并有 $du/dx = g(x)/u(x)$. 所以，对所有 u，$u(x)$ 都存在反函数 $x = x(u)$，它最多除了 $u = 0$ 之外都是处处可微的. 如果令 $\gamma(u) =$

$g(x(u))$，则 $dx/du = u/\gamma(u) > 0 (u \neq 0)$.

最后，如果令 $\Phi(u) = F(x(u))$，由变量 x, u 所表示的(6.4.4)，就变成 $\dot{u} = \gamma(u)[y - \Phi(u)]/u$，$\dot{y} = -\gamma(u)$，因此消去 t 后，就得到

$$du/dy = [\Phi(u) - y]/u.$$

如果现在假设 $\Phi(u)/u$ 在 $u \leqslant 0$ 时，为非增函数，当 $u \geqslant 0$ 时为非减函数，则方程 (6.4.1) 最多有一个周期解.

把 §3.3 (b) 中 J. L. Massera 的论证方法用到上面最后一个方程式上，将 (x, y) 平面换成 (u, y) 平面，并把 $f(x)$ 换成 $\Phi(u)/u$，就可以使定理得到证明.

我们注意到，如果 $g(x) = x$，则 $\Phi(u)/u = F(x)/x$，从而，如果 $f(x)$ 满足§ 3.3 (b) 的条件，则已经加予 $\Phi(u)/u$ 的条件也就成立了.

4. 对方程 $\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ 的研究

(a) 现在来研究比 (6.4.1) 更一般的方程

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + y(x) = 0, \tag{6.4.14}$$

关于它，N. Levinson 和 O. K. Smith [1] 证明了如下的定理.

定理. 给定方程 (6.4.14). 如果对所有有限的 x，$f(x)$ 是连续的；且当 $x \neq 0$ 时 $xg(x) > 0$；又 $f(x, v)$ 在 (x, v) 平面上连续，且在每一个有界区域内对 v 满足 Lipschitz 条件；而且

(i) $$\int_0^{\pm\infty} g(s)ds = +\infty,$$

(ii) $f(0, 0) < 0$，且存在 $x_0 > 0$，使得对 $|x| \geqslant x_0$ 及所有的 v，均有 $f(x, v) \geqslant 0$；(iii) 存在常数 M，使得当 $|x| \leqslant x_0$ 时，有 $f(x,v) \geqslant -M$；(iv) 存在 $x_1 > x_0$，使得对于每一个正的、连续的、递减的函数 $v = v(x)$，均有

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, v(x))dx \geqslant 10Mx_0, \tag{6.4.15}$$

则 (6.4.14) 至少存在一个周期解.

A. D. Dragilev 用另外一个不等式(参看 A. D. Dragilev [1])

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, v(x))dx \geqslant 4Mx_0 + \alpha \ (\alpha > 0) \qquad (6.4.15')$$

代替 (6.4.15)，把上述结果改进了.

这些结果的证明就略去了. 但是在 (b) 中要证明 A. de Castro 关于同一方程 (6.4.14) 的另外一个定理.

(b) 方程 (6.4.14) 等价于系统

$$\dot{x} = v, \ \dot{v} = -f(x,v)v - g(x). \qquad (6.4.16)$$

假定 $f(x, v)$, $g(x)$ 在每一个有界区域中连续且满足 Lipschitz 条件，此外还满足下列条件：(i) $f(0, 0) < 0$；当 x 有界时，$|f(x, v)|$ 有界；(ii) $xg(x) > 0$，对 $x \neq 0$；(iii) 存在 $x_0 > 0$，使得当 $|x| > x_0$ 时，$|g(x)| + f(x, v)|v| > \varepsilon > 0$；(iv) 存在 a, b, $b \geqslant a > 0$，使得对 $|x| \geqslant a$ 及所有的 v, $f(x, v) + f(x, -v) \geqslant 0$；(v) 对任何满足 $|v(x)| > N$ 的连续函数 $v(x)$ (其中 N 为任意正数)，均有

$$\int_{-a}^{b} f(x, v(x))dx \geqslant \alpha > 0. \qquad (6.4.17)$$

在这些条件下，(6.4.14) 至少存在一个周期解(参看 A. de Castro [2]).

从 (6.4.16) 中的 $\dot{x} = v$ 可知系统的轨线没有垂直渐近线.

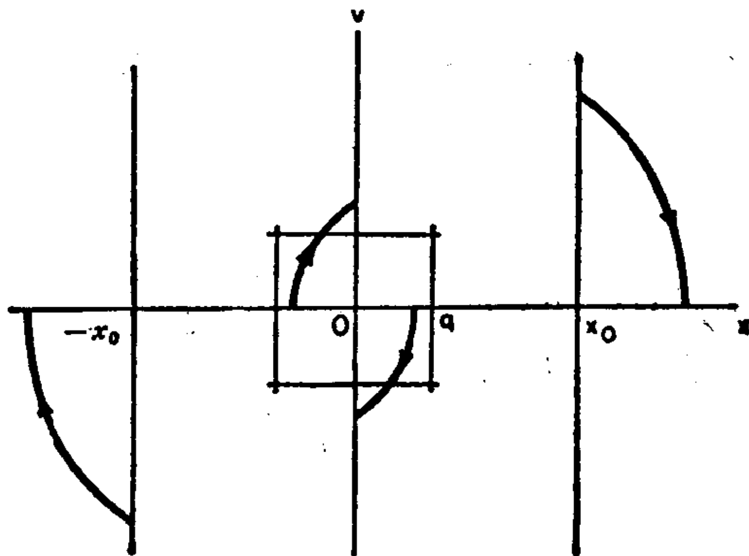


图 115

和§ 4.3 一样，令

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds.$$

考虑函数 $u(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(x)$.

沿轨线 $x(t)$, $y(t)$ 有 $\dot{u} = v\dot{v} + g(x)v = -v^2/f(x, v)$, 由 (i) 可知，当 $t \to +\infty$时，轨线都不趋近于原点.

我们可以做一个以 O 为中心，各边平行于坐标轴而边长为 $2q$ $(0 < q < x_0)$ 的正方形 Q，使得在其中所有的点，都满足 $f(x, v) < 0$ (图 115)，所以，对于 Q 中满足 $x < 0$, $v > 0$ 的点，有 $\dot{x} = v > 0$ 及 $\dot{v} = -f(x, v)v - g(x) > 0$. 由于轨线没有垂直渐近线，所以 (6.4.16) 的由 Q 中上述各点出发的轨线，当 t 增大时将与正 v 半轴相交. 同样，在 Q 中属于第四象限的点，有 $\dot{x} < 0$, $\dot{v} < 0$. 过这些点的轨线当 t 增大时，将与负 v 轴相交.

我们看到，根据 (iii)，当 $x \geqslant x_0$, $v > 0$ 时，$-f(x, v)v - g(x) = -f(x, v)|v| - |g(x)| < -\varepsilon$，就有 $\dot{x} > 0$, $\dot{v} < -\varepsilon$，所以由 $v > 0$ 的点 (x_0, v) 出发的轨线，将与 x 轴相交，交点的横坐标大于 x_0.

类似地，由 $v < 0$ 的点 $(-x_0, v)$ 出发的轨线，将与 x 轴相交，交点横坐标 $< -x_0$；事实上，这时有 $\dot{v} = -f(x, v)v - g(x) = f(x, v)|v| + |g(x)| > \varepsilon$.

把这些讨论与以前的结果综合起来，并考虑到，当 t 增大时，轨线分别由 $v > 0$ 到 $v < 0$ 交正 x 半轴，以及由 $v < 0$ 到 $v > 0$ 交负 x 半轴，我们就可以断定当 t 增大时，所有的轨线都是螺旋线. 且当 q 充分小时，由于可以假定沿螺旋线有 $f(x, v) < 0$，所以我们断定在 O 附近螺旋线背离原点 O，即 O 为不稳定点.

设由 P_1 出发的轨线当 t 增大时，先后与直线 $x = b$, $x = -a$ 交于 $P_1 = (b, v_1)$, $P_2 = (b, v_2)$, $P_3 = (-a, v_3)$, $P_4 = (-a, v_4)$ 及 $P_5 = (b, v_5)$ (图 116).

如果 v_1 充分大，则交点 P_3 和 P_4 存在，而且弧 $\overset{\frown}{P_2P_3}$ 上所有点的

纵坐标的绝对值，都大于事先指定的 $N>0$，弧 $\widehat{P_4P_5}$ 上的点的纵坐标也要比N大，令B与A分别为 $\widehat{P_1P_2}$ 与 $\widehat{P_3P_4}$ 和 x 轴的交点.

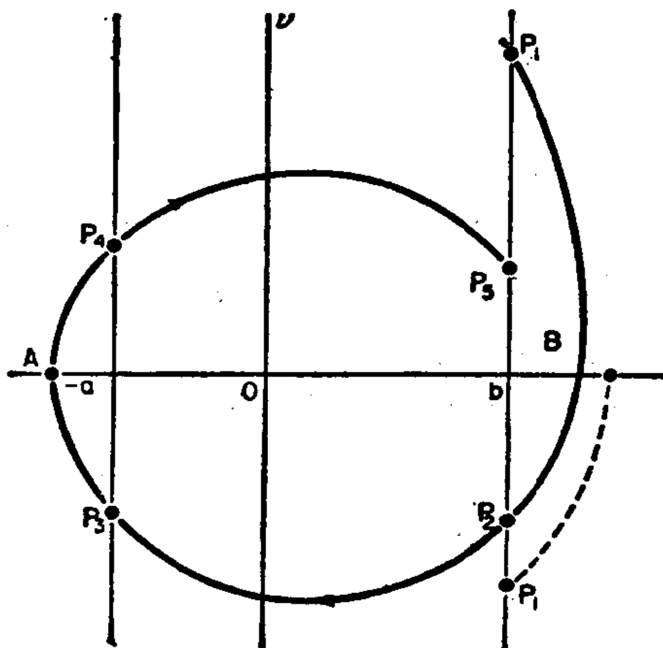


图 116

把 $\widehat{P_1B}$ 上的点用 (x, v) 表示，并考虑到达点 $P_1'=(b, -v_1)$ 的轨线的弧 γ，这弧上的点记为 $(x, -\bar{v})$. 于是有

$$dv/dx=-f(x, v)-g(x)/v, \tag{6.4.17.1}$$

$$d\bar{v}/dx=-f(x, -\bar{v})-g(x)/\bar{v}. \tag{6.4.17.2}$$

应用比较定理并考虑到假设 (iv)，就可以推出 $v\leqslant\bar{v}$. 所以

$$|v_2|\leqslant v_1. \tag{6.4.18.1}$$

同样地，有

$$v_4\leqslant|v_3|. \tag{6.4.18.2}$$

把 (6.4.17.1) 由 P_2 到 P_3 积分，就得到

$$v_3-v_2=-\int_b^{-a}f(x, v)dx-\int_b^{-a}\frac{g(x)}{v}dx,$$

由此推得

$$|v_3|-|v_2|=\int_b^{-a}f(x, v)dx+\int_b^{-a}\frac{g(x)}{v}dx$$

$$\leqslant -\alpha + \int_0^b \frac{g(x)}{|v|} dx < -\alpha + \frac{G(b)}{N}. \qquad (6.4.18.3)$$

仿此，对 $\widehat{p_4p_5}$ 可得

$$v_5 - v_4 = -\int_{-a}^{b} f(x, v) dx - \int_{-a}^{b} \frac{g(x)}{v} dx$$

$$\leqslant -\alpha - \int_{-a}^{0} \frac{g(x)}{v} dx < -\alpha + \frac{G(-a)}{N}, \quad (6.4.18.4)$$

由这个式子以及 (6.4.18.1)，(6.4.18.2)，(6.4.18.3)，(6.4.18.4)，就得到

$$v_5 - v_1 \leqslant -2\alpha + [G(b) + G(-a)]/N.$$

只要取 $N > [G(b) + G(-a)]/(2\alpha)$，就可推出 $v_5 < v_1$，所以上述螺旋线是收缩的.

因此，我们已经做出了一个满足 Poincaré-Bendixson 条件的区域(第四章，§ 2)，这就保证了至少存在一个极限环，从而定理得证.

§ 5. 方程 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ 在不作 $xg(x)>0$ ($|x|>0$) 的假定时的周期解

1. 引言

在 §4 中对广义 Liénard 方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (6.5.1)$$

以及以后对更一般的方程 $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ 进行分析时，都假定当 $x \neq 0$ 时 $xg(x) > 0$. 现在要给出一个不要这个假定的，周期解的存在与唯一性的准则.

假定函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对所有 x 连续，并满足下列假设: (i) 存在二数 $\delta_{-1} < 0 < \delta_1$，使得当 $\delta_{-1} < x < \delta_1$ 时，$f(x) < 0$; 当 $x < \delta_{-1}$ 及 $x > \delta_1$ 时，$f(x) > 0$. (所以 $f(\delta_{-1}) = f(\delta_1) = 0$); (ii) 存在常数 $\gamma < \delta_{-1}$，使得

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } x<\gamma \text{ 时}, g(x)>0, \\ \text{当 } \gamma<x<0 \text{ 及 } x>0 \text{ 时 } xg(x)>0\end{array}\right\} \tag{6.5.2}$$

(所以有 $g(\gamma)=g(0)=0$).

和通常一样,令

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds. \tag{6.5.3}$$

于是,(6.5.1) 等价于

$$\dot{x}=z-F(x),\ \dot{z}=-g(x). \tag{6.5.4}$$

所以,如果我们再假设 (iii) $g(x)$ 在每一个有限区间上满足 Lipschitz 条件,则可以保证,对任意指定的初值,(6.5.4) 的解均存在且唯一,所以,在上述条件下,(6.5.1) 的解也是如此.

2. 奇点

因为 $g(x)$ 只在 $x=0$ 和 $x=\gamma$ 处等于零,所以 (6.5.4) 右端只有在 $C=(\gamma, F(\gamma))$ 及 $O=(0, 0)$ 两点同时为零.因而这两点是 (6.5.4) 仅有的两个(有限)奇点.

现在假定: (iv) $g'(0)$ 存在(根据 (iii),必须是有限的),且根据 (6.5.2),$g'(0)\geqslant 0$. 由此可知 O 是初等奇点,即当 $t\to-\infty$ 时是一个吸引点.它是一个不稳定点.事实上,如果把 (6.5.4) 写成

$$\dot{x}=-f(0)x+z+[f(0)-\{F(x)-F(0)\}/x]x,$$
$$\dot{z}=-g'(0)x+[g'(0)-\{g'(x)-g(0)\}/x]x,$$

它的轨线在 O 的邻域里的性态和其简化方程 $\dot{x}=-f(0)x+z$, $\dot{z}=-g'(0)x$ 的轨线的性态相同. 而后者,根据 $f(0)<0$ 的假设,O 是不稳定奇点: 如果 $f^2(0)\geqslant 4g'(0)$,是结点;而当 $f^2(0)<4g'(0)$ 时,则是焦点.

为了考察点 $c=(\gamma, F(\gamma))$,再假设: (v) 在 $x=\gamma$ 存在导数 $f'(\gamma)$, $g'(\gamma)$, $g''(\gamma)$ 及

$$g'(\gamma)<0. \tag{6.5.5}$$

于是,对充分小的 h,有

$$\left.\begin{aligned} F(\gamma+h) &= F(\gamma)+f(\gamma)h+\frac{1}{2}[f'(\gamma)+o(h)]h^2, \\ g(\gamma+h) &= g'(\gamma)h+\frac{1}{2}[g''(\gamma)+o(h)]h^2. \end{aligned}\right\} \quad (6.5.5')$$

作平移 $x=X+\gamma$, $z=Z+F(\gamma)$，并利用 (6.5.5'), (6.5.4) 可以写成

$$\dot{X}=-f(\gamma)X+Z-[f'(\gamma)+o(X)]X^2/2.$$
$$\dot{Z}=-g'(\gamma)X-[g''(\gamma)+o(X)]X^2/2.$$

关于相应的简化方程 $\dot{X}=-f(\gamma)X+Z$, $\dot{Z}=-g'(\gamma)X$，点 (0, 0) 为鞍点，它的分界线在 O 的斜率，为方程

$$k^2-f(\gamma)k+g'(\gamma)=0 \tag{6.5.6}$$

的根.

所以(第五章，§2)，点 $C=(\gamma, F(\gamma))$ 是 (6.5.4) 的一个鞍点；它的分界线中的两条在 C 点的斜率为

$$\alpha_1=[f(\gamma)-\{f^2(\gamma)-4g'(\gamma)\}^{\frac{1}{2}}]/2<0,$$

这两条分界线记为 s^+ 和 d^- (图 117)；另外两条分界线记为 s^- 和 d^+，它们在 C 点的斜率为

$$\alpha_2=[f(\gamma)+\{f^2(\gamma)-4g'(\gamma)\}^{\frac{1}{2}}]/2>0,$$

上面的 α_1 和 α_2 是 (6.5.6) 的根.

3. 环及其性质

方程 (6.5.1) 有两个(周期)解 $x(t)=0$, $x(t)=\gamma$ (常数解). 现在我们要研究存在非常数周期解，即对应于 (6.5.4) 的环的解的可能性.

由于 O 的指标为 $+1$，C 的指标为 -1，所以，环内部只能包含奇点 O (第四章定理 40).

现在来讨论 (x, z) 平面被直线 $x=\gamma$, $x=0$ 和基本曲线 $\mathscr{F}: z=F(x)$ 所分成的 6 个区域 I, II, III, IV, V, VI, 如图 117 所示.

除了 C 与 O 外，(6.5.4) 的轨线与直线 $x=\gamma$, $x=0$ 相交时，

切线为水平;而与$\mathscr{F}$相交时，切线为垂直的．$\mathscr{F}$在C点的斜率等于$f(\gamma)$，而显然有$\alpha_1<0<f(\gamma)<\alpha_2$，$\alpha_1$，$\alpha_2$ 的含意已在§5.2中给出．

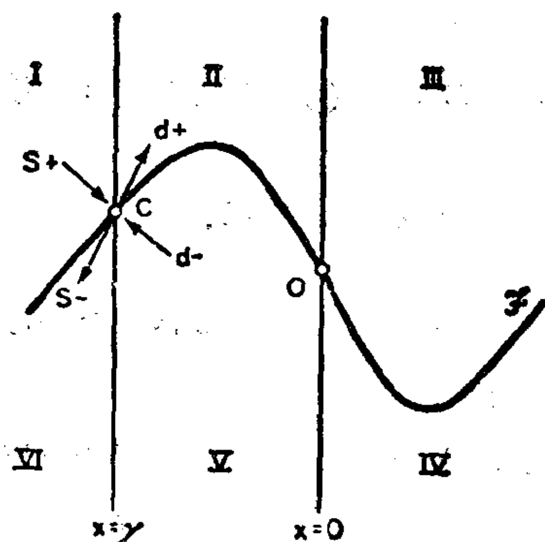


图 117

考虑分界线 d^+．它在C的斜率为α_2，当t增大时，它从C出发进入区域 II，在那里$\dot{x}>0$，$\dot{z}>0$．因此，在II中，d^+可以表示成$z=\theta(x)$，其中$\theta(x)$是

$$dz/dx=-g(x)/[z-F(x)] \tag{6.5.7}$$

的一个解．

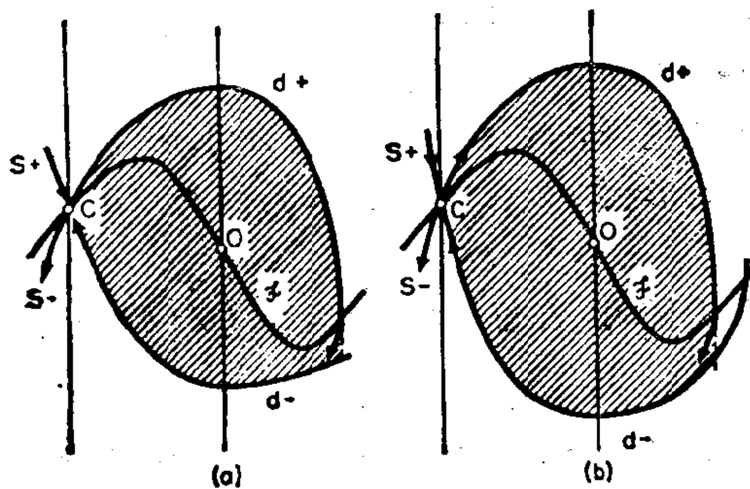
和(6.5.4)的每一条轨线一样，分界线 d^+ 不可能有垂直渐近线，因为如果这样，当$x\to x_0$时，将有 $\lim\theta'(x)=\infty$，而这是不可能的．所以d^+和直线 $x=0$ 水平相交于O的上方的一点，并进入区域 III，在那里，$\dot{x}>0$，$\dot{z}<0$．在这个区域中，d^+ 仍然可以表示成$z=\theta(x)$，$\theta(x)$ 是(6.5.7)的一个解，且递减．

现在有两种可能．首先注意到，根据假设(i)，$F(x)$在$x=\delta_1$有最小值，同时，当$x>\delta_1$时$(f(x)>0)$，$F(x)$是递增的;所以

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(s)ds\leqslant+\infty.$$

于是有A^+)：d^+与$\mathscr{F}$正交并进入区域IV；或者B^+)：d^+不与$\mathscr{F}$相交，并有一条纵坐标$\geqslant F(+\infty)$的水平渐近线．

再来考虑分界线 d^-，当t减小时，它以斜率α_1离开C而进入区域V，在那里$\dot{x}<0$，$\dot{z}>0$，所以 d^- 在那里可以表为 $z=\mathscr{G}(x)$，$\mathscr{G}(x)$为(6.5.7)的解，并且是递减函数．由于它不会有垂直的渐近线，d^- 将与直线 $x=0$ 相交并进入区域 IV，那里 $\dot{x}<0$，$\dot{z}<0$，所以d^-仍然可以表为$z=\mathscr{G}(x)$，$\mathscr{G}(x)$ 是(6.5.7)的解并为递减函数．



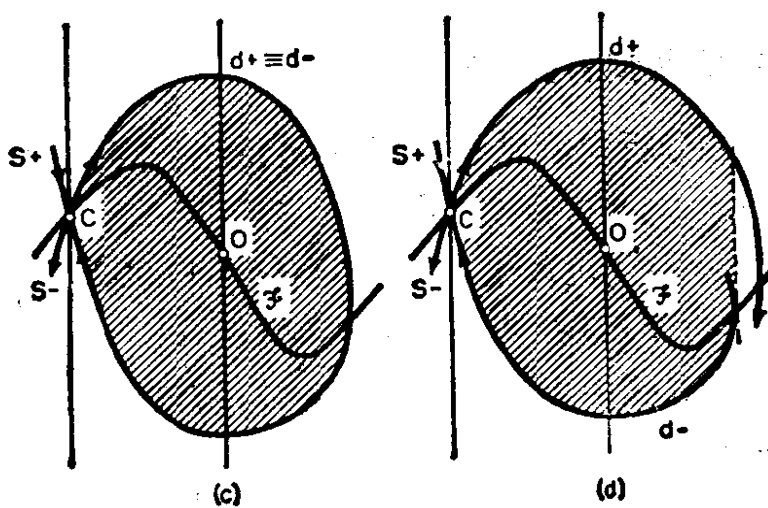


图 118

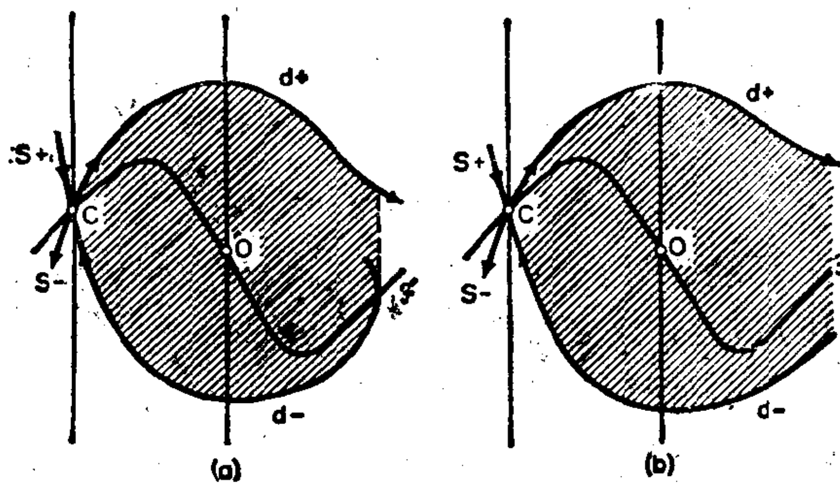


图 119

所以还是有两种可能，即 A^-)：d^- 不与 $\mathscr{F}$ 相交；或者 B^-)：d^- 与 $\mathscr{F}$ 相交并进入区域 III.

把所有这些可能性 A^+)，B^+) 与 A^-)，B^-) 综合起来，就得出轨线可能有的形状，如图 118 (a)，(b)，(c)，(d) 及 119 (a)，(b) 所示.

上述分析说明，在每一种情形，如 (6.5.4) 有环，它就必须与 $\mathscr{F}$ 的弧 $\widehat{OC}$ 相交，并属于图 118，119 中画斜线的开区域.

将这个区域记为 R，它在 x 轴上的(开)投影将记为 R_x.

分界线 s^+ 及 s^- 的性态无助于对环的研究.

4. 一种不存在周期解的情形

从前面的分析中明显看到，有可能给出 (6.5.4) 不存在极限环的充分条件.

为此，设 $x \geqslant \gamma$. 如果用 $g(x)$ 乘 (6.5.4) 的第一式，而第二式乘以 z，并将所得方程相加，沿每个轨线就有

$$d[z^2 + 2G(x)]/dt = -2g(x)F(x), \tag{6.5.8}$$

其中按通常设

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds. \tag{6.5.9}$$

如果假设

$$g(x)F(x) < 0, \text{ 当 } x \in R_x, \; x \neq 0, \tag{6.5.10}$$

则 (6.5.8) 说明，沿每条轨线，当 t 增大时，$z^2 + 2G(x)$ 是 t 的递增函数，所以，不可能存在闭轨，因为沿闭轨有

$$\int_\Gamma d(z^2 + 2G(x)) = 0.$$

于是，已经证明了：(6.5.1) 不可能存在(非常数)周期解，如果 (6.5.10) 成立，或者如果

$$xF(x) < 0, \text{ 当 } x \in R_x, \; x \neq 0.$$

由于(6.5.2)，这个条件等价于(6.5.10). (请将这个条件与 §3.2 (a) 中关于 Liénard 方程的相应条件加以比较).

因为根据假设 (i)，$F(x)=0$ 可能有的非零根是单根，还可以推出：(6.5.4) 的每一个可能有的环，必至少与一条直线 $x=\bar{x}$ 相交，$\bar{x}$ 满足 $F(\bar{x})=0$，$\bar{x}\in R_x$，$\bar{x}=0$。

5. 环的存在性

(a) 图 118 (c)，118 (d)，119 (a) 和 (119)(b) 所示的情况，不可能存在环，对比之下，图 118 (a)，118 (b) 所示的情形，则至少存在一个环：这可以由 Poincaré-Bendixson 定理，以及 O 是不稳定的而 C 为鞍点这个事实推出.

我们只考虑图 118 (a) 所示的情形. 首先看到，为了使分界线 d^+ 与基本曲线 $\mathscr{F}$ 相交，只要 (vi) $F(+\infty)=+\infty$ 就可以了.

相反，保证 d^- 不与 $\mathscr{F}$ 相交(就是图 118 (a) 的情形)的一个充分条件是：(vii)存在(6.5.7)的解 $w(x)$，使得当 $x\geqslant\delta_1$ 时 $w(x)\leqslant F(x)$，而且

$$F(\gamma)<F(\delta_1)-[F^2(\delta_1)+\{w(\delta_1)-F(\delta_1)\}^2+2G(\delta_1)]^{\frac{1}{2}}.$$

事实上，可以证明，对于分界线 d^-：$z=\mathscr{G}(x)$，不等式 $\mathscr{G}(\delta_1)<w(\delta_1)$ 成立(参看 G. Sansone-R. Conti[1]).

最后，有如下的定理.

定理. 条件 (i) 到 (vii) 足以保证 (6.5.4) 至少存在一个环，所以，(6.5.1) 至少有一个(非常数)周期解.

(b) 是否实际存在满足条件 (i) 到 (vii) 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 呢？特别是要满足最后一个条件. 这个问题可以从如下的例题中得到肯定的答复. 设 $f(x)$ 为这样的函数，当 $x=\delta_1$ 时它为零，当 $x>\delta_1$ 时，它为正，当 $x\to+\infty$ 时，积分 $\int_0^x f(s)ds$ 发散；设 $w(x)$ 为定义在 $(\delta_1,+\infty)$ 上的函数，函数值为负并使得 $dw/dx+f(x)>0$. 如果我们定义 $g(x)=[dw/dx+f(x)]\cdot[-w(x)]$，则 $f(x)$，$g(x)$，$w(x)$ 满足 (vi) 和 (vii). 不管 $f(x)$，$g(x)$ 当 $x<\delta_1$ 时怎么定义的，只要使它们满足条件 (i) 到 (v) 就行.

6. 环的唯一性的一个准则

假设 (i) 到 (vi) 保证了存在数 Δ_1，使得 $F(\Delta_1)=0$，$0<\delta_1<\Delta_1$. 同时，(i) 和 (vii) 或者只由 (i) 和 (vii)′ $F(\gamma)<0$，就保证存在 Δ_{-1}，使得 $F(\Delta_{-1})=0$，$\gamma<\Delta_{-1}<\delta_{-1}<0$.

另一方面，我们知道，每一个环都必须至少与直线 $x=\Delta_{-1}$ 及 $x=\Delta_1$ 中的一条相交 (§5.4). 如果能证明，每个环和这两条直线都相交，则可以用曾在 §3.3 (参看 G. Sansone [2]，399 页) 中提到的 Liénard 的论证方法，证明环不可能多于一个.

保证每个环和两条直线都相交的一个充分条件是：(viii) $G(\Delta_{-1})=G(\Delta_1)$.

事实上，首先假定环 Γ 与 $x=\Delta_1$ 交于点 $M=(\Delta_1, z_0)$，$z_0<0$，再假定当 t 增大时，Γ 可以延伸到达 x 轴上一点 $N=(\bar{x}, 0)$，横坐标 $\bar{x}$ 满足 $\Delta_{-1}<\bar{x}<0$. 于是，如果令 $U(x, z)=z^2/2+G(x)$，由 (6.5.8) 可以得到

$$G(\Delta_1)=U(\Delta_1, 0)<U(\Delta_1, z_0)<U(\bar{x}, 0)=G(\bar{x})<G(\Delta_{-1}),$$

而这与 (viii) 矛盾.

类似地，如果假设 Γ 与 $x=\Delta_{-1}$ 相交而不与 $x=\Delta_1$ 相交，也会导致矛盾. 所以，有如下的定理.

定理. 如果条件 (i) 到 (viii) (或者用 (vii′) 代替 (vii)) 成立，Δ_{-1} 和 Δ_1 为 $F(x)$ 等于零的两个点，则 (6.5.4) 恰有一个环，从而 (6.5.1) 恰有一个(非常数)周期解.

§ 6. 衰减振动方程 $A\ddot{x}+f(\dot{x})\dot{x}+Cx=0$

1. 引言

在某些单自由度的质点运动问题中，衰减因子设为与速度的幂成比例. 例如，在恢复力作用下在有液体阻力的介质中的运动，就是方程

$$A\ddot{x}+B|\dot{x}|\dot{x}+Cx=0$$

的解，其中 A，B，C 为正的常数.（参看 Signorini [1]; G. Sansone [1]; J. Parker van Zandt [1].）

可以将这类方程以及更一般的方程

$$\ddot{u} + H(\dot{u}) + u = E(t)$$

（其中 $H(\dot{u})$ 和 $E(t)$ 为可微的）微分，且若再令 $x = \dot{u}$，$H'(\dot{u}) = f(\dot{u}) = f(x)$ 以及 $e(t) = E'(t)$，于是就得到

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = e(t).$$

如果 $e(t) = 0$，这方程就是已经在 §3 中研究过的 Liénard 方程. $e(t) \neq 0$ 的情形将在第七章中加以研究.

然而，在这章里并不假设 $H(\dot{u})$ 可微，却转而考虑形如

$$A\ddot{x} + f(\dot{x})\dot{x} + cx = 0,\ A > 0,\ c > 0 \qquad (6.6.1)$$

的方程.

2. 原点为稳定点的条件

(a) 给定

$$A\ddot{x} + f(\dot{x})\dot{x} + cx = 0,\ A > 0,\ c > 0, \qquad (6.6.1)$$

其中

$$f(\dot{x}) = B + R(\dot{x}),\ B > 0, \qquad (6.6.2)$$

$R(0) = 0$，当 $|\dot{x}| > 0$ 时，$R(\dot{x}) > 0$. 还假定在每一个有限区间上，$R(\dot{x})$ 满足 Lipschitz 条件. 则对于任意给定的初值条件，等价于 (6.6.1) 的系统

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -(C/A)x - (B/A)y - [R(y)/A]y \quad (6.6.3)$$

存在唯一解.

O 是唯一的奇点，其它的轨线满足方程

$$dy/dx = [-(C/A)x - (B/A)y - (R(y)/A)y]/y. \quad (6.6.4)$$

立即可以推出 O 是稳定点. 为了弄清楚这一点，定义系统的能量函数 $U(x, y)$，

$$U = Ay^2 + Cx^2. \qquad (6.6.5)$$

于是，沿 (6.6.3) 的每个解 $x(t)$，$y(t)$，$\dot{U} = 2Ay\dot{y} + 2Cx\dot{x} = -2[B + R(y)]y^2 < 0$，由此可知所有轨线都进入中心在 O 的椭

圆族 $Ay^2+Cx^2=$ 常数.

(b) (6.6.4) 的简化方程 $dy/dx=[-(C/A)x-(B/A)y]/y$ 所对应的特征方程为

$$Ak^2+Bk+C=0. \tag{6.6.6}$$

如果 $B^2-4AC\geqslant 0$，则 (6.6.6) 的根是负实根. 可以证明，如果 $x(t)$, $y(t)$ 是 (6.6.3) 的任一解，则当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)$ 和 $y(t)$ 递减地趋近于 0.（参看 G. Sansone [2], p. 361). 在那里的论证中，只假设了当 $v\neq 0$ 时，$F(v)>0$，按我们的符号是当 $|\dot{x}|>0$ 时，$R(\dot{x})>0$.

如果 $B^2-4AC<0$,(6.6.6) 有共轭复根. 因为 $\lim\limits_{y\to 0}R(y)=R(0)=0$, O 就是 (6.6.3) 的(稳定的)焦点(第五章，§2). 而且，还可以从 (6.6.1) 直接推出(参看 G. Sansone [2], pp. 367—368)，如果 $\{t_n\}$ 表示 $x(t)$的零点序列，且按由小到大排列，又令 $\nu=4[(C/A)-(B/A)^2]^{\frac{1}{2}}$,则对于任意固定的 $\tau>0$, 存在 s_0，使得当 $s>s_0$ 时，有

$$t_{s+1}-t_s\leqslant 2\pi/\nu+\tau,\ (s=s_0+1,s_0+2,\cdots), \tag{6.6.7.1}$$

而且,如果 α_0 满足 $0<\alpha_0<\pi/2$, 并使得

$$\operatorname{ctg}\alpha_0=B/(\nu A), \tag{6.6.8}$$

则

$$t_{s+1}-t_s\geqslant 2(\pi-\alpha_0)/\nu. \tag{6.6.7.2}$$

(c) G. Sestini [1] 对于

$$B^2-4AC>0,\quad =0,\quad <0$$

的三个情形,推导出了 (6.6.3) 的解 $x(t)$, $y(t)$ 的渐近估值.

3. G. Malgarini 的一个定理

(a) 给定方程

$$\ddot{x}+H(\dot{x})+x=0, \tag{6.6.9}$$

其中 $H(y)$ 对所有 y 有定义，且满足下列假设: (i) $H(y)$ 连续; (ii) 当 $y\neq 0$ 时, $yH(y)>0$; (iii) $H(0)=0$; (iv) 当 $y\neq 0$ 时, $H'(y)$ 和 $H''(y)$ 存在,且 $H'(y)>0$, 及 $yH''(y)<0$; (v) 积分

$$\int_0^1 H^{-1}(y)dy,\ \int_0^{-1} H^{-1}(y)dy$$

收敛.

例如，$H(y) = \varepsilon|y|^{m-1}y$，$\varepsilon > 0$，$0 < m < 1$，就满足条件(i)到(v).

在这些假设下，G. Malgarini [1] 证明了如下定理.

定理. 和(6.6.9)等价的系统

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x - H(y) \tag{6.6.10}$$

的轨线，除了在第二和第四象限的两条在有限时间内趋于原点，并切于 y 轴外，当 t 增大时，全都趋近于原点.

关于这两条特殊轨线的性态，是基于这样的事实：如果 $x = x(y)$ 表示两条轨线的一条，则积分

$$\int_{y_0}^{0} \frac{dy}{x(y) + H(y)}$$

收敛.

(b) 原点 O 是(6.6.10)的奇点，而且是双切结点. 在两条轨线中之所以出现在有限时间内到达原点的情形，是由于在空间(x, y, t)里，所做的假设不足以保证(6.6.10)从 t 轴上的点出发的解的唯一性(参看第一章 §5.3 (b)).

§7. 一个关于绳索动力学与空气动力学的方程

1. 奇点

(a) G. Krall [1] 在研究绳索的动力学与空气动力学的时候，提出了如下的方程(变量有所变更)：

$$\ddot{x} + \dot{x}|\dot{x}| - q\dot{x} + x - p^2x^3 = 0,$$

$$\ddot{x} + \dot{x}|\dot{x}| - q\dot{x} + x - p^2x^3 = r\sin\omega t,$$

$(p, q, r, \omega$ 为常数)，这方程也被 J. Cecconi [1]，[2] 进一步研究过(他研究过当 $q = q(y)$，$q'(y) = o(|y|^{\frac{1}{2}})$ 时的第一个方程，参看 L. Neppi Modona [1]).

我们在这里考虑第一个方程

$$\ddot{x} + \dot{x}|\dot{x}| - q\dot{x} + x - p^2x^3 = 0. \qquad (6.7.1)$$

在 §7.3 里，我们证明对充分小的 $q>0$，$p>0$，它至少有一个(非零)周期解. 第二个方程将推迟到第七章 §6.2 再予以研究.

(b) (6.7.1) 等价于如下系统:

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = qy - y|y| + p^2x^3 - x, \qquad (6.7.2)$$

而轨线的方程为

$$dy/dx = (qy - y|y| + p^2x^3 - x)/y. \qquad (6.7.3)$$

假定

$$p>0,\ q>0, \qquad (6.7.4.1)$$

且看到(6.7.2)有三个奇点: $A=(0,0)$, $B=(-1/p,0)$, $C=(1/p,0)$.

对于 A，简化方程是 $dy/dx=(qy-x)/y$. 对应的特征方程为 $k^2-qk+1=0$，如果 $0<q<2$，则点 A 是不稳定的焦点；而如果 $q\geqslant 2$，则根据(6.7.2)的形状，A 是不稳定的结点(第五章，§2).

因为当我们把 x 换成 $-x$，y 换成 $-y$ 时，(6.7.3)保持不变，可知轨线由成对的对于 A 点对称的曲线所组成，特别是对于 B 和 C 的邻域中的轨线，只要考虑 $C=(1/p,0)$ 的邻域就够了.

由于 $dy/dx=[qy+2(x-1/p)-y|y|+p^2(x-1/p)^2(x+2/p)]/y$，关于 C 的简化方程为 $dy/dx=[qy+2(x-1/p)]/y$，它的特征方程是 $k^2-qk-2=0$；由第五章 §2 可知，C(从而 B)是(6.7.2)的鞍点，由它出发的两对分界线，它们在 C 点的斜率等于

$$q/2 \pm [(q/2)^2+2]^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.7.4.2)$$

2. 系统(6.7.2)所确定的方向场

(a) 向量 $(\dot{x},\dot{y})$ 平行于 x 轴或者 $\dot{y}$ 为零的点 (x,y) 的轨迹，可由方程 $qy-y|y|+p^2x^3-x=0$ 表出，它分成两条曲线(三次曲线弧):

$$C_3^{(1)}:\ qy - y^2 + p^2x^3 - x = 0,\ y\geqslant 0, \qquad (6.7.5.1)$$

$$C_3^{(2)}:\ qy + y^2 + p^2x^3 - x = 0,\ y\leqslant 0. \qquad (6.7.5.2)$$

这个轨迹中重要的点，除 A, B, C 外，还有 $D=(0; q)$ 和 $E=(0, -q)$.

由 (6.7.5.1) 有

$$(y-q/2)^2=p^2(x^3-x/p^2+q^2/(4p^2)), \qquad (6.7.6)$$

因为 (6.7.6) 右端的三次多项式的判别式等于 $q^4/(64\,p^4)-1/(27\,p^6)$，如果令 $p_0=8(3\sqrt{3}\,q^2)^{-1}$，则根据 $p<p_0, p=p_0, p>p_0$，可以推出 $C_3^{(1)}$ 将分别与直线 $y=q/2$ 或交于三个不同的实点，或交于三个实点而其中二者重合，或者只交于一个实点.

在第一种情形 $(p<p_0)$，三次式的根中有二者为正，一根为负，负根的绝对值等于其它二根之和. $C_3^{(1)}$ 和 $C_3^{(2)}$（关于 A 点与 $C_3^{(1)}$ 对称）的略图如图 120 所示. 弧 $C_3^{(1)}$ 和 $C_3^{(2)}$ 组成一个蛇形曲

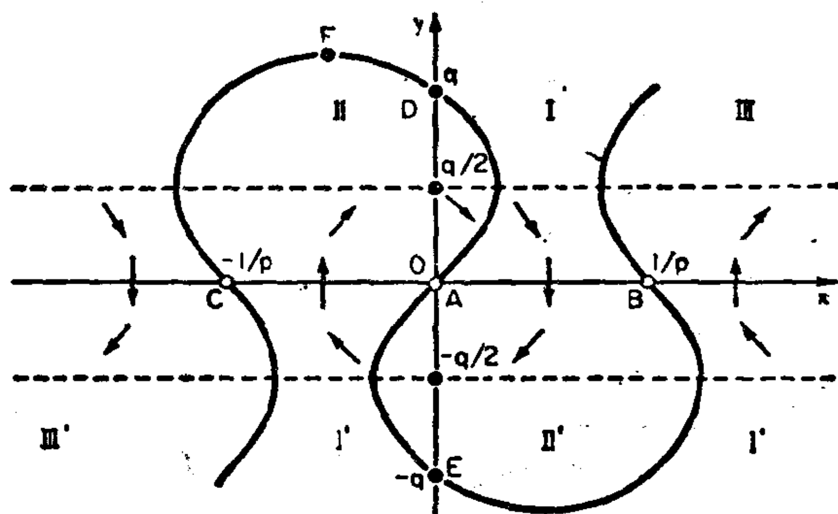


图 120

线，它连同 x 轴把 (x, y) 平面分成 I, II, III, I′, II′, III′ 等 6 个区域. 图中的箭头表示向量 $(\dot{x}, \dot{y})$ 在各个区域中的方向.

在第二种情形 $(p=p_0)$，$C_3^{(1)}$ 与直线 $y=q/2$ 交于一点 K，其横坐标 >0 且为 $C_3^{(1)}$ 的二重点，此外还交于一个横坐标为负的点；弧 $C_3^{(1)}$ 和 $C_3^{(2)}$ 共同组成一个环线，它与一条在第一与第三象限中的曲线相交(图 121). 这两条曲线连同 x 轴把平面分成由 I 到 IV 和由 I′ 到 IV′ 的 8 个区域.

最后，在第三种情形 $(p>p_0)$，$C_3^{(1)}$ 与直线 $y=q/2$ 只交于横

坐标为负的一点；弧 $C_3^{(1)}$ 和 $C_3^{(2)}$ 又组成一条蛇形曲线，它连同 x 轴把平面分成 I, II, III, I′, II′, III′ 6 个区域(图 122).

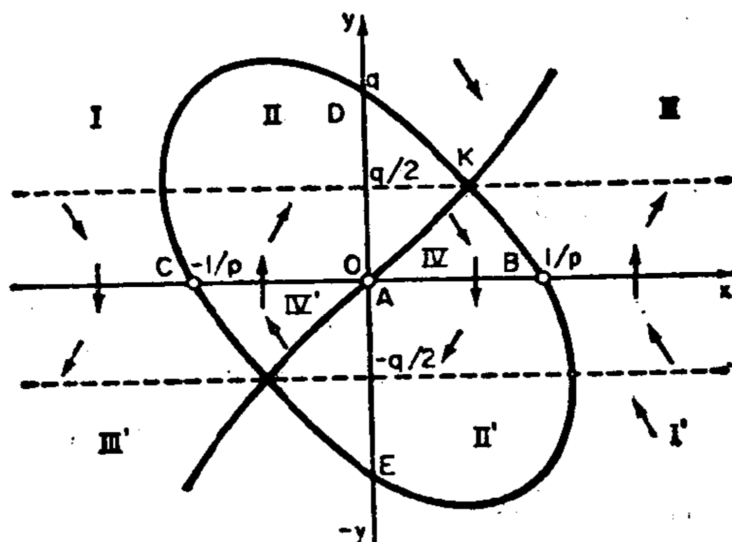


图 121

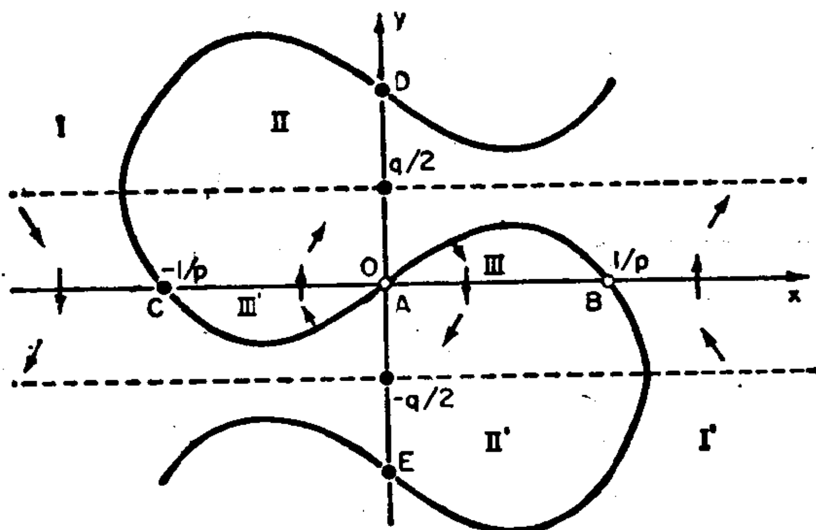


图 122

(b) 从向量 $(\dot{x}, \dot{y})$ 在各个区域的性态中似乎看出，在每一种情形都存在 A 的一个邻域，从它之中的 x 轴上的点出发的轨线，当 t 增大时，将再次与 x 轴相交，根据关于 A 的对称性，轨线要绕 A 点旋转一周. 当 A 是焦点 $(0 < q < 2)$ 时，这是明显的；在结点 $(q \geqslant 2)$ 的情形，也是易于验证的.

而且，如即将看到的，每一个在 A 周围的轨线都形如螺旋线的一部分，当 t 增大时，它远离 A 点. 事实上，沿这些轨线弧，可以假

设 $x < 1/p, y < q$. 考虑函数

$$G(x) = x^2/2 - p^2x^4/4, \tag{6.7.7}$$

由 (6.7.3)，有

$$d[y^2/2 + G(x)]/dx = y(q - |y|). \tag{6.7.8}$$

如果把任意轨线与负 x 半轴、正 x 半轴以及再与负 x 半轴相继的交点，表示为 $(-a, 0)$、$(b, 0)$ 及 $(-c, 0)$ $(a, b, c > 0)$，由 (6.7.8),就有

$$G(b) - G(-a) = \int_{-a}^{b} y(q - |y|)dx > 0. \ (y \geqslant 0),$$

$$G(-c) - G(b) = \int_{b}^{-c} y(q - |y|)dx > 0 \ (y \leqslant 0),$$

由此可知 $G(-c) > G(-a)$. 因为在 $(-1/p, 0)$ 有 $G'(x) = x - p^2x^3 < 0$,就可推得 $-c < -a$.

把这些弧中之一记为 Γ.

3. 当参数 p 充分小时,周期解的存在性

(a) 假定 $p < p_0(=8(3\sqrt{3}q^2)^{-1})$.

在半平面 $y > 0$ 上,通过 C 且在 C 的斜率为 $q/2 + [(q/2)^2 + 2]^{\frac{1}{2}}$ 的分界线 Γ_1, 必与 y 轴交于一点,交点的纵坐标不超过 $C_3^{(1)}$ 在第二象限的点的纵坐标的最大值. 根据 (6.7.5.1)，这个最大值在一点 F 取得,其横坐标等于 $-1/(p\sqrt{3})$. 所以 $F = (-1/(\sqrt{3} \cdot p), q/2 + [q^2/4 + 2/(3\sqrt{3}p)]^{\frac{1}{2}})$.

$C_3^{(1)}$ 在 B 点的斜率为 $-2/q$. 半平面 $y > 0$ 上,过 B 点的分界线 Γ_2 在 B 点的斜率为 $q/2 - [q^2/4 + 2]^{\frac{1}{2}}$. 因为 $-2/q < q/2 - [q^2/4 + 2]^{\frac{1}{2}}$, Γ_2 在开始时被包含在区域 I 之内. 可以推出如果 Γ_2 与正 y 半轴交于一点 M, 则存在充分小的 $\bar{p}$,使得当 $p < \bar{p}$ 时, M 的纵坐标 $|AM|$ 大于 F 的纵坐标. 事实上，将 (6.7.3) 从 0 到 $1/p$ 积分,

$$|AM| = \int_0^{1/p} [|y| - q + (x - p^2x^3)/y]dx$$
$$> -q/p + 1/|AM| \int_0^{1/p} (x - p^2x^3)dx$$

$$= -q/p + 1/(4p^2|AM|),$$

于是 $|AM| > [-q + (q^2+1)^{\frac{1}{2}}]/2p$. 只要这样确定 $\bar{p}$, 使得当 $\bar{p} \geqslant p$ 时, $q/2 + [q^2/4 + 2/(3\sqrt{3}\,p)]^{\frac{1}{2}} < [-q + (q^2+1)^{\frac{1}{2}}]/(2p)$, 就得到所求的结果.

(b) 现在假设对确定的 $q > 0$, 下列关于 p 的不等式成立:

$$\left.\begin{aligned} &0 < p < p_0, \\ &q/2 + [q^2/4 + 2/(3\sqrt{3}\,p)]^{\frac{1}{2}} < [-q + (q^2+1)^{\frac{1}{2}}]/(2p), \end{aligned}\right\} \quad (6.7.9)$$

(a) 中所考虑的分界线 Γ_2 或者不与正 y 半轴相交, 或者与它交于一点, 其纵坐标大于 Γ_1 与正 y 半轴交点的纵坐标. 考虑到 Γ_1 与 Γ_2 关于 A 对称, 可知 Γ_1 必相继与正 x 半轴、负 y 半轴及负 x 半轴相交, 与负 x 半轴的交点 N 在线段 AC 的内部.

现在考虑 (x, y) 平面上的这样的环域, 它的一个边界由 §7.2 (b) 中讨论过的螺旋线 Γ 的一段弧, 以及连接这弧的端点的 x 轴的一段所组成, 其(外)边界则由 Γ_1 上端点为 C 和 N 的一段, 以及线段 CN 组成.

因为这个区域不包含奇点 (奇点 C 在边界上出现并不影响结论), 它就至少包含一个环 (Poincaré-Bendixson 定理). 所以, 如果 p 满足 (6.7.9) (以及 $q > 0$), (6.7.1) 就至少有一个 (非常数) 周期解.

(c) 下面证明, 对于确定的 q, 存在 p 的值, 使得相应的(6.7.1) 无周期解.

根据前面的分析, (6.7.2) 只可能在带形区域 $|x| < t/p$ 之中存在环(因为 B 和 C 是鞍点), 而不会在带形区域 $|y| < q$ 之内.

事实上, 假定存在环 Γ, 沿它的所有点满足 $|y| < q$, 并把 Γ 与 x 轴的交点的横坐标记为 $-\gamma$ 和 γ. 将 (6.7.8) 沿着 Γ 在半平面 $y \geqslant 0$ 内的弧, 从 $-\gamma$ 积分到 γ, 由于所得方程左端为零, 而右端为正, 从而得出矛盾.

如果假定 $p = p_0(=8(3\sqrt{3}\,q^2)^{-1})$, 从图 121 中向量 $(\dot{x}, \dot{y})$ 的性态可以看出, 当 t 增大时, 围绕 A 点的轨线的纵坐标不能大于 K 的纵坐标, 因为 K 在直线 $y = q/2$ 上, 于是所考虑的轨线不可能

是环.

仿此，如果 $p > p_0$，围绕 A 的每一个轨线与端点为 A，B 的 $C_3^{(1)}$ 的弧相交，在交点处，轨线的纵坐标取最大值. 因为 $C_3^{(1)}$ 的这样的弧整个在带形 $0 \leqslant y < q/2$ 之中，所考虑的轨线就不可能是闭的.

于是得出结论，至少当 $p \geqslant p_0(= 8(3\sqrt{3}\ q^2)^{-1})$ 时，方程 (6.7.1) 不能有(非常数)周期解.

(d) 最后，我们看到，如果和前面所假定的相反，$q < 0$，则立即由第四章的定理 21 可以证明 (6.7.2) 没有环. 所以，当 $q < 0$ 时，除常数解 $x = -1/p$，$x = 0$，$x = 1/p$ 外，(6.7.2)没有周期解.

补　　充

1. 摆型方程的参考文献

最近十年来，相当多的论文讨论了摆的方程

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta - \beta = 0, \tag{1}$$

或者比较一般的"摆型"方程，如

$$\ddot{\theta} + \alpha f(\theta)\dot{\theta} + g(\theta) = 0, \tag{2}$$

其中

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta),\ g(\theta + 2\pi) = g(\theta),$$

或者

$$\ddot{\theta} + f(\alpha,\ \theta)\dot{\theta} + g(\theta) = 0, \tag{3}$$

其中 $f(\alpha,\ \theta + 2\pi) = f(\alpha,\ \theta)$, $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$; 或者

$$\ddot{\theta} = \varphi(\alpha,\ \theta,\ \dot{\theta}), \tag{4}$$

其中 $\varphi(\alpha, \theta + 2\pi, \dot{\theta}) = \varphi(\alpha, \theta, \dot{\theta})$.

例如可参看:

关于方程 (1): G. Seifert [1], [5], Yu. N. Bakayev [1], A. Giger [1]; 关于方程 (2): G. Seifert [2], M. Urabe [1], L. N. Belyustina [1], J. C. Lillo-G. Seifert[1], V. A. Tabuyeva [1], [4], [5]; 关于方程 (3): G. Seifert [4], [5], G. Sansone [6], [8], I. Barbalat-A. Halanay [2]; 关于方程 (4): L. Amerio [2], M. I. El'tsin [1], G. Seifert [3], V. A. Tabuyeva [2], [3], E. A. Barbashin-V. A. Tabuy-

eva [1], [2], W. A. Coppel [1].

2. 关于方程 $\ddot{\theta}+f(\alpha,\theta)\dot{\theta}+g(\theta)=0$ 的第二类极限环的存在性

(a) 设 $f(\alpha,\theta)$ 当 $\alpha>0$, $-\infty<\theta<+\infty$ 时有定义,取正值,为 θ 的连续函数且为 α 的递增函数,且设 $f(\alpha,\theta+2\pi)=f(\alpha,\theta)$; 如果 $g(\theta)$ 对所有实的 θ 有定义,满足 Lipschitz 条件,以 2π 为周期 $(g(\theta+2\pi)=g(\theta))$, 而且存在负数 m, 使得 $g(x)\leqslant m<0$, 则对任意 α, 方程

$$\ddot{\theta}+f(\alpha,\theta)\dot{\theta}+g(\theta)=0 \tag{1}$$

有一个第二类极限环.(参看 G. Sansone, [6], p. 64.)

(b) 设 $f(\alpha,\theta)$ 满足以上假设,且 $\partial f/\partial\theta$ 对 θ 连续,当 $\alpha\to 0+$ 时, $\lim f(\alpha,\theta)=0$ 对 θ 一致成立. 又设 $g(\theta)$ 属于 C^1 且有 $g(\theta+2\pi)=g(\theta)$. 如果 $\int_0^{2\pi}g(s)ds<0$ 且 $g(\theta)$ 在 $(0,2\pi)$ 中的零点集合为有限集,则存在某 $\bar{\alpha}>0$, 使得对任意 α, $0<\alpha<\bar{\alpha}$, 方程 (1) 有一个第二类极限环,且这样的 $\bar{\alpha}$ 的下确界(临界值)是一个正值,或者是 $+\infty$. (参看 G. Sansone, [6], p. 74.)

3. 关于 Liénard 方程

对于 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=0, \tag{1}$$

如下的定理成立:

设 $f(x)$ 对实 x 连续且和通常一样,设

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds.$$

如果 (i) 在 $x=0$ 的邻域内 $F(x)$ 不恒等于零; (ii) 当 $0\leqslant x\leqslant\Delta_1$ 时, $xF(x)\leqslant 0(\Delta_1>0)$; (iii) $F(\Delta_1)=F(-\Delta_1)=0$; (iv) $F(x)/x$ 为 $|x|$ 的递增函数,且当 $|x|<\Delta_1$ 时, $F(x)/x$ 为正,则(1)有(唯一的)极限环,它全局渐近轨道稳定 (参看 I. Barbalat [1]). 关于 Liénard 方程的其它结果,还可以参看: G. Manaresi [1], [2]; M. G. Hudai-Verenov [1]; M. I. Voilokov [1]; R. P. De Figueiredo [1].

4. 关于轨线全为闭曲线或者没有闭曲线的广义 Liénard 方程

对于广义 Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \tag{1}$$

如下的定理成立：

(a) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 连续，而且 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$，同时，当 $x>0$ 时，$xg(x)>0$. 和通常一样，令 $F(x)=\int_0^x f(s)ds$. 设存在正数 a，使得当 $0\leqslant x\leqslant a$, $\varepsilon>0$ 时，

$$\int_0^x \frac{g(s)}{F(s)}ds \geqslant \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)F(x),$$

则在原点 $(x=\dot{x}=0)$ 的一个邻域中的 (1) 的所有轨线全是闭曲线.（参看 Z. Opial [1].）

(b) 如果上述不等式换成：当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$\int_0^x \frac{g(s)}{F(s)}ds \leqslant \frac{1}{4}|F(s)|, \tag{2}$$

则原点的每一个邻域都被 (1) 的开轨线所穿过. 如果进一步假设当 $x\geqslant 0$ 时，(2) 成立，则 (1) 根本就没有闭的轨线(原点除外).（参看 Z. Opial [1].）

(c) 如果 f 和 g 满足上述假设；当 $0\leqslant x\leqslant x_1(x_1>0)$ 时，$F(x)\leqslant 0$；当 $x\geqslant x_2$ 时，$F(x)\geqslant 0$；且 $\int_0^\infty g(s)ds=\infty$，则 (1) 的所有轨线都是闭的(参看 J. G. Wendel [1]).

(d) 关于其它的结果，还可参看 E. A. McHarg [1].

5. 关于有孤立极限环的广义 Liénard 方程

关于广义 Liénard 方程的孤立极限环的存在性、唯一性和稳定性，下列作者已给出一些定理：I. Barbalat-A. Halanay [1]; Chang Chi-Fen (张芷芬) [1]; E. I. Zheleznov [1]; N. N. Kushkov [1], [2]. 还可参看 E. Gagliardo [1]; W. R. Utz [1], 以及下一段的

补充材料.

6. 关于方程 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$

关于方程

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0 \tag{1}$$

也有许多工作，这个方程首先是由 N. Levinson-O. K. Smith 开始研究的.

我们将摘录 W. R. Utz [2] 的如下结果:

如果 $f(x,y)$ 和 $g(x)$ 属于 C^1，且 $yf(x,y)\geqslant 0$，$xy(x)>0$ $(x\neq 0)$，以及 $\int_0^{+\infty}g(s)ds=+\infty$，则 (1) 的每一个当 $t\to+\infty$ 时存在的解是有界的，而且当 $t\to+\infty$ 时，它或者振动，或者递减且趋近于零.

关于其它结果，参看 A. De. Castro [1], [3], [4]; A. Mikolajska [2]; R. Reissig [2]; G. Seifert [6]; I. Barbalat [2]; E. A. Barbashin-E. V. Vdovina [1].

Z. Mikolajska [1] 考虑了一个较 (1) 更一般的方程，他给出了方程

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x,\dot{x})=0$$

存在周期解的充分条件.

7. R. Reissig 关于方程 $\ddot{x}+F(\dot{x})+G(x)=0$ 的一个定理

给定方程

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+G(x)=0, \tag{1}$$

其中 $F(y)$，$G(x)$ 分别对所有实的 x，y 连续，且解的唯一性成立，设

(a) 当 $|y|\leqslant\eta_1(\eta_1>0)$ 时 $yF(y)\leqslant 0$；当 $|y|\geqslant\eta_2>\eta_1$ 时，$F(y)\operatorname{sgn}y\geqslant c>0$；当 $|y|\leqslant y_2$ 时，$\max|F(y)|=M>0$；

(b) 当 $|x|\geqslant\delta(\varepsilon,\delta>0)$ 时，$G(x)\operatorname{sgn}x\geqslant M+\varepsilon$，则方程 (1) 至少有一个稳定的极限环.（参看 R. Reissig [1].）

8. 关于方程 $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+x=0$ 的解的渐近估值

给定方程

$$\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+x=0, \tag{1}$$

其中 $\varphi(u)$ 对实的 u 有定义，递增且属于 C^1. 设 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=2p>0$, 且存在三个数 σ, L, α, 使得当 $|u|\leqslant\sigma$ 时

$$|\varphi'(u)-2p|\leqslant(\alpha+1)L|u|/\alpha.$$

在这些假设下，A. Ghizzetti [1], [2] 对解及其导数的渐近展开式进行了认真的研究，他讨论了 $0<p<1$, $p=1$, $1<p<(\alpha+2)/2\sqrt{\alpha+1}$ 的三种情形. 例如，对于 $0<p<1$ 的情形，如下的公式成立:

$$x(t)=e^{-pt}\left(A\cos qt+\frac{pA+B}{q}\sin qt\right)+O(e^{-(\alpha+1)pt}),$$

$$x(t)=e^{-pt}\left(B\cos qt-\frac{A+pB}{q}\sin qt\right)+O(e^{-(\alpha+1)pt}),$$

其中 A, B 为常数而 $q=\sqrt{1-p^2}$.

参 考 文 献

AMERIO, L.

[1] Determinazione delle condizioni di stabilità per gli integrali di un'equazione interessante l'elettrotecnica, *Ann. Mat. pura ed appl.* (4) **30** (1949), 75–90.

[2] Studio asintotico del moto di un punto su una linea chiusa per azione di forze indipendenti dal tempo, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* (3) **3** (1950), 17–67.

ANDRONOV, A. A. and CHAIKIN, C. E.

[1] *Theory of oscillations*, Princeton Univ. Press, 1949.

BAKAYEV, YU. N.

[1] Approximate integration of the differential equation of the pendulum, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **16** (1952), 723–728 (Russian).

BARBALAT, I.

[1] Une propriété globale des trajectoires d'un système d'équations différentielles equivalant à l'équation des oscillations non linéaires de Liénard, *Bul. Sti. Sect. Sti. Mat. Fiz.*, **6** (1954) 853–860.

[2] Nonlinear autonomous systems possessing only closed orbits, *Comun. Acad. R. P. R.*, 1959, **9**, 691–696 (Rumanian).

BARBALAT, A. and HALANAY, A.

[1] Un critère d'existence d'un cycle limite stable pour l'équation des oscillations non-linéaires, *Studi Cerc. Mat.* 7 (1956), 81–941.

[2] Evaluation of the critical value for the generalised equation of a pendulum, *Communic. Acad. R. P. R.* **10** (1960), 385–389, (Rumanian).

BARBASHIN, E. A. and TABUYEVA, V. A.

[1] On the conditions for the existence of limit cycles, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **23** (1959) 832–835 (Russian).

[2] On the oscillations of a pendulum with dry friction, *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved. Matematika*, 1959, **5**, 48–57 (Russian).

BARBASHIN, E. A. and VDOVINA, E. V.

[1] On the conditions for uniqueness of limit cycles, *ibid.*, 1960, **3**, 43–47 (Russian).

BELYUSTINA, L. N.

[1] On an equation from the theory of electrical machines, Pamyati A. A. Andronova, *Izd. Ak. Nauk SSSR, Moscow*, 1955, 173–186 (Russian).

BÖHM, C.

[1] Nuovi criteri di esistenza di soluzioni periodiche di una nota equazione differenziale non lineare, *Ann. Mat. pura ed appl.*, (4), **35** (1953), 343–352.

BOTTANI, F.

[1] La Matematica vista da un ingegnere, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **9** (1936), 181–183.

CARTAN, H. and E.

[1] Note sur la génération des oscillations entretenues, *Annales des P. T. T.*, **14** (1925), 1196–1207.

CARTWRIGHT, M. L.

[1] Van der Pol's equation for relaxation oscillations; *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, vol. 2, 1955, 3–18.

CECCONI, J.

[1] Su di una equazione differenziale di rilassamento, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (8) **9** (1950), 38–44.

[2] Su di una equazione differenziale non lineare del secondo ordine, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* (3) 4 (1950), 245–278.

[1] On the uniqueness of limit cycles of certain equations of nonlinear oscillations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **119** (1958), 659–662 (Russian).

CONTI, R.

[1] Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard generalizzata. Esistenza ed unicità., *Boll. Un. Mat. Ital.,* (3) 7 (1952), 111–118.

COPPEL, W. A.

[1] On the equation of a synchronous motor, *Quart. J. Mech. appl. Math.,* **12** (1959), 242–256.

DE CASTRO, A.

[1] Estudios sobre la mecanica no-lineal, *Revista Mat. Hispano-Amer.,* (4) 12 (1952).

[2] Soluzioni periodiche di un'equazione differenziale del secondo ordine, *Boll. Un. Mat. Ital.,* (3) **8** (1953), 26–29.

[3] Sull'esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, *ibid.,* 9 (1954), 349–372.

[4] Un teorema di confronto per l'equazione differenziale delle oscillazioni di rilassamento, *ibid.,* **9** (1954), 280–282.

DE FIGUEIREDO, R. P.

[1] Existence and uniqueness of the periodic solution of an equation for autonomous oscillations, *Contr. to the theory of nonl. oscill.,* vol. 5, 1960, 269–284.

DORODNITSYN, A. A.

[1] Asymptotic solution of van der Pol's equation, *Prikl. Mat. i Meh.,* **2** (1947), 313–328 (Russian), *Amer. Math. Soc. Translation* No. 81 (1953).

DRAGILEV, A. D.

[1] Periodic solutions of the differential equation of nonlinear oscillations, *Prikl. Mat. i Meh.,* **16** (1952), 85–88 (Russian).

DUFF, G. F. D. and LEVINSON, N.

[1] On the non-uniqueness of periodic solutions for an asymmetric Liénard equation, *Quart. Appl. Math.,* **10** (1952), 86–88.

EDGERTON, H. E. and FOURMARIER, P.

[1] The pulling-into-step of a salient pole synchronous motor, *Trans. A. I. E. T.,* **50** (1931), 769–778.

EL'TSIN, M. I.

[1] On the phase space in the motion of a pendulum, *Uspekhi Mat. Nauk* VI 4 (44) (1951), 152–154 (Russian).

FILIPPOV, A. F.

[1] Sufficient conditions for the existence of stable limit cycles of second order equations, *Mat. Sbornik,* **30** (72), (1952), 171–180 (Russian).

FLANDERS, D. A. and STOKER, J. J.

[1] The limit case of relaxation oscillations, *Studies on nonl. vibr. theory,* edited by R. COURANT, Inst. for Math. and Mech., N. Y. U., 1946, 51–64.

GAGLIARDO, E.

[1] Sul comportamento degli integrali dell'equazione differenziale non lineare $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ con $g(x)$ crescente e $f(x)$ positiva per $|x| > M > 0$, *Boll. Un. Mat. Ital.,* (3) **8** (1953), 309–314.

GHIZZETTI, A.

[1] Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.,* (8), **24** (1958), 262–269.

[2] Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale $\ddot{x} + \dot{x} + \varphi(x) = 0$, *Ann. Mat. pura ed appli.*, (4) **51** (1960), 167–202.

GIGER, A.

[1] Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung, *Z. A. M. Ph.*, **7** (1956), 121–129.

GOMORY, R. and RICHMOND, D. E.

[1] Boundaries for the limit cycle of van der Pol's equation, *Quart. appl. Math.*, **9** (1951), 205–209.

GRAFFI, D.

[1] Sopra alcune equazioni della radiotecnica, *Mem. R. Acc. Sci. Ist. Bologna*, (9), **9** (1942), 83–91.

HAAG, J.

[1] Étude asymptotique des oscillations de relaxation, *Ann. Sci. Éc. Norm. Super.*, (3) **60** (1943), 35–111; 289.

HAYES, W. D.

[1] On the equation for a damped pendulum under constant torque, *Z. A. M. Ph.*, **4** (1953), 398–401.

JASSE, E.

[1] Der kritische Schlupf von Synchronmaschinen, *Archiv f. Elektrot.*, Berlin **39** (1948), 1.

KHUDAI VERENOV, M. G.

[1] Some theorems on limit cycles for the equation of Liénard, *Uspekhi Mat. Nauk* XII **3** (75) (1957), 389–396 (Russian).

KRALL, G.

[1] Dinamica ed aerodinamica dei fili, III. Problemi non lineari delle vibrazioni visibili, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (8) **5** (1948), 197–203.

KUSHKOV, N. N.

[1] Qualitative investigation of a system of two differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, XIII, **2** (80), 195–202, (Russian).

[2] Some theorems on limit cycles for systems of nonlinear oscillations, *ibid.*, 203–209 (Russian).

LASALLE, J.

[1] Relaxation oscillations, *Quart. appl. Math.*, **7** (1949), 1–19.

LEFSCHETZ, S.

[1] Notes on differential equations, (II, On the equation of van der Pol), *Contributions to the theory of nonlinear oscillation*, Vol. 2 (Princeton, 1952), 61–73, (67–73)

[2] On Liénard differential equation, *ibid.* 149–153.

LEVINSON, N. and SMITH, O. K.

[1] A general equation for relaxation oscillations, *Duke Math. J.*, **9** (1942), 382–403.

LIÉNARD, A.

[1] Étude des oscillations entretenues, *Revue génér. de l'électr.* **23** (1928), 901–902; 906–954.

[2] Oscillations auto-entretenues, *Proc. 3rd Int. Congr. Appl. Mech.*, Stockholm, 1930, **3** (1930), 173–177.

LILLO, J. C. and SEIFERT, G.

[1] On conditions for stability of solutions of pendulum type equations, *Z. A. M. Ph.*, **6** (1955), 239–243.

MALGARINI, G.

[1] Studio asintotico del moto di un oscillatore elastico con resistenza del tipo subviscoso, *Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett.*, **86** (1953), 258–280.

MANARESI, G.

[1] Sopra alcune limitazioni per l'ampiezza delle oscillazioni non lineari, *Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. Fis., Rend.*, 2 (1954–55), 184–189.

[2] Ulteriori limitazioni per l'ampiezza di oscillazioni non lineari, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) **10** (1955), 537–540.

MASSERA, J. L.

[1] Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard, *ibid.* (3) **9** (1954), 367–369.

MCHARG, E. A.

[1] A differential equation, *Jour. London Math. Soc.*, **22** (1947), 83–85.

MIKOLAJSKA, Z.

[1] Sur l'équation généralisée des oscillations entretenues, *Bull. Ac. Pol. Sci., Cl.*, 3, 2 (1954), 309–313.

[2] Sur un théorème de MM. N. Levinson et O. Smith relatif à l'équation différentielle des oscillations entretenues, *Ann. Pol. Math.*, **4** (1957), 1–7.

MINORSKY, N.

[1] *Introduction to nonlinear mechanics* (Ann Arbor, 1957).

NEPPI MODONA, L.

[1] Su di un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) **8** (1953), 428–441.

OPIAL, Z.

[1] Sur un théorème de A. Filippoff, *Ann. Pol. Math.*, **5** (1958), 67–75.

PARKER VAN ZANDT, J.

[1] Oscillating systems by resistance proportional to the square of the velocity, *Physical Review, Lancaster*, 1919, XV, 415–443.

REISSIG, R.

[1] Selbsterregung eines einfachen Schwingers, *Math. Nachr.*, **15** (1956), 191–196.

[2] Über die Eindeutigkeit gewisser Relaxationschwingungen, *Z. A. M. M.*, **38** (1958), 301–303.

SANSONE, G.

[1] Sulla durata delle oscillazioni di un punto soggetto a resistenza idraulica e a forza di richiamo. Valutazione asintotica, *Atti R. Ist. Veneto Sc. Lett. Arti*, **92** (1942–43).

[2] *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 2, Bologna, 1949.

[3] Sopra una classe di equazioni di Liénard prive di integrali periodici, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis Mat Nat.*, (8) **6** (1949), 156–160.

[4] Sopra l'equazione di A. Liénard delle oscillazioni di rilassamento, *Ann. Mat. pura ed appl.*, (4) **28** (1949), 153–181.

[5] Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard. Calcolo del periodo, *Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 10* (1950–51) 155–171.

[6] Soluzioni periodiche di seconda specie dell'equazione del pendolo generalizzata, *Atti Acc. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, Sez. 1, (8) **5** (1959), 59–79.

[7] *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 1, Bologna, 1949.

[8] Solutions périodiques de deuxième espèce de l'équation $\ddot{\theta} + f(\theta, \alpha)\, h(\dot{\theta}) = g(\theta)$, $f(\theta, \alpha)$, $g(\theta)$ périodiques par rapport à θ. *Journ. de Math. pures et appl.*, **40** (1961), 363–384.

SANSONE, G. and CONTI, R.

[1] Soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ avente due soluzioni singolari, *Abhandl. Math. Sem. Hamburg*, **20** (1956), 186–195.

SEIFERT, G.

[1] On the existence of certain solutions of nonlinear differential equation, *Z. A. M. Ph.*, **3** (1952), 468–471.

[2] On certain solutions of a pendulum-type equation, *Quart. Appl. Math.*, **11** (1953) 127–131.

[3] Limiting sets of trajectories of a pendulum type system, *Proc. Am. Math. Soc.*, **7** (1956), 1082–1084.

[4] On stability questions for pendulum-type equations, *A. Z. M. Ph.*, **7** (1956), 238–247.

[5] A rotated vector approach to a problem of stability of solutions of pendulum type equations, *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, Vol. 3, 1956, 1–16.

[6] Rotated vector fields and an equation for relaxation oscillations, *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, Vol. 4 (1958), 125–139.

SESTINI, G.

[1] Valutazioni asintotiche per un problema della dinamica non lineare, *Quaderno scient. Convegno Mat. di Modena*, 1952 (Modena 1953), 63–78.

SIGNORINI, A.

[1] Sul moto di un punto soggetto a resistenza idraulica e a forza di richiamo *Atti R. Ist. Veneto Sc. Lett. Arti*, **73** (1913–16), p. 2, 803–858.

TABUYEVA, V. A.

[1] Evaluation of the critical value of the parameter a for the differential equations $d^2x/dt^2 + a\,dx/dt + f(x) = 0$, *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved., Matematika*, 1958, 2 227–237; (Russian).

[2] Tricomi successive approximations for the research of the solutions of the differential equation $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ which are periodic in x, *ibid.*, 1959, **6**, 169–173 (Russian).

[3] On the shape of the region of attraction of the zero solution of the differential equation $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, *ibid.*, 1958, **45**, 248–264 (Russian).

[4] On the shape of the region of attraction of the zero solution of a certain second order differential equation, *Mat. Sbornik*, **47** (89), (1959), 209–220 (Russian).

[5] Conditions for the existence of motions of a Froude pendulum, *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved., Matematika*, 1961, **5** (24), 61–68 (Russian).

TRICOMI, F.

[1] Integrazione di un'equazione presentatasi in elettrotecnica, *Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (2) (1933), 1–20.

[2] A proposito della mia Nota "Integrazione...", *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (6) **18** (1933), 26–28.

URABE, M.

[1] Infinitesimal deformation of the periodic solution of the second kind and its application to the equation of a pendulum, *Jour. Sci. Hiroshima Un., Ser. A*, **18** (1954), 183–219; Supplement *ibid.* **19** (1955).

[2] The least upper bound of a damping coefficient insuring the existence of a periodic motion of a pendulum under constant torque, *ibid.*, **18** (1954), 379–389

UTZ, W. R.

[1] A note on second order nonlinear differential equations, *Proc. Am. Math. Soc.*, **7** (1956), 1047–1048.

[2] Properties of solutions of certain second order nonlinear differential equations, *ibid.*, **8** (1957), 1024–1028.

[3] Remarks on periodic solutions of van der Pol's equation, *ibid.* **24** (1960), 197–199.

VAN DER POL, B.

[1] Sur les oscillations de relaxation, *Philosophical Magazine*, (7) 2 (1926), 978–992.

[2] The non linear theory of electrical oscillations, *Proc. Inst. Radio Eng.*, **22** (1934), 1051–1086.

VLASOV, N. P.

[1] Sur les autooscillations des moteurs synchrones, *Jour. Techn. Phys. USSR*, **4** (1937), 72–82.

[2] Oscillations of synchronous motors, *ibid.* **9** (1939).

VOILOKOV, M. I.

[1] Sufficient conditions for the existence of exactly n limit cycles for the system $dx/dt = y$, $dy/dt = F(y) - x$, *Mat. Sbornik*, **44** (1958), 235–244 (Russian).

WENDEL, J. G.

[1] On a van der Pol equation with odd coefficients, *Jour. London Math. Soc.*, **24** (1949), 65–67.

ZHELEZNOV, E. I.

[1] Some sufficient conditions for the existence of limit cycles, *Izv. Vysh. Uchebn. Zaved., Matematika*, 1958, **1**, 56–59 (Russian).

第七章　具单个自由度的非自治系统

在这一章里我们考虑含有两个未知函数的非自治系统，其中特别注意了与非线性力学中的所谓强迫振动的二阶方程相联系的系统，以便使读者通过由具体情况所提出的问题的研究，来理解一般的理论.

关于解的有界性与周期解的存在性问题的讨论，是借助于 T. Yoshizawa 的定理（§3），以一般形式进行的，而对于某些重要的特殊情形，如 §5，§6，§7，§8 中的周期解的存在性，则是用 L. E. J. Brouwer 的不动点定理和 M. L. Cartwright，J. E. Littlewood 以及 J. L. Massera（§2）的定理加以推导的.

已经给出了把周期解问题化成积分方程的一般方法，这个积分方程可以用现代的泛函分析方法加以研究. 然而，在 §4 也考虑了这样的一个问题，其中的一个周期解的确定，是由古典的方法进行推导的.

最后的两节(§9 与 §10)专门讨论次调和解和关于周期解的一般问题.

§ 1. 强迫振荡问题. 线性情形

1. 调和情形的强迫振荡

(a) 首先，我们复习一些初等力学的概念.

人所熟知，线性情形的自由振荡问题取决于方程式

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \lambda^2 x = 0, \tag{7.1.1}$$

其中 $\varepsilon \geqslant 0$，$\lambda > 0$ 为常数.

若 $\varepsilon = 0$，就得到简谐运动的情形

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = 0, \tag{7.1.2}$$

它的解为

$$x = h\sin(\lambda t + \tau), \tag{7.1.3}$$

其中 h 和 τ 为由初始条件确定的常数.

常数 h 称为振荡的**振幅**, $2\pi/\lambda$ 为周期, $\lambda/2\pi$ 为**频率**, τ 称为**相位**.

(b) 如果对物理系统 (7.1.2) 施加一个仅依赖于时间 t 的外力 $P(t)$, 则运动方程为

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = P(t), \tag{7.1.4}$$

它的解是

$$x(t) = h\sin(\lambda t + \tau) + x_0(t), \tag{7.1.5}$$

其中

$$x_0(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t P(\theta)\sin\lambda(t-\theta)d\theta \tag{7.1.6}$$

为 (7.1.4) 满足条件 $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$ 的特解.

特别重要的是外力为正弦型的情形,即

$$P(t) = F\sin\omega t, \tag{7.1.7}$$

其中常数 $F > 0$, $\omega > 0$, 于是运动方程式为

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = F\sin\omega t. \tag{7.1.8}$$

设 $\lambda \neq \omega$. 如果在 (7.1.6) 中把关于 $\sin\lambda t$ 是线性的从而可以与 $h\sin(\lambda t + \tau)$ 合并的那些项略去,就得到 (7.1.8) 的特解

$$x_0(t) = F(\lambda^2 - \omega^2)^{-1}\sin\omega t. \tag{7.1.9}$$

这个解和外力有相同的周期, 而振幅等于 $F(\lambda^2 - \omega^2)^{-1}$. 于是 (7.1.8) 的通解为

$$x(t) = h\sin(\lambda t + \tau) + F(\lambda^2 - \omega^2)^{-1}\sin\omega t. \tag{7.1.9.1}$$

它是由两个振荡叠加而成, 其中之一的频率为 $\lambda/2\pi$, 而另一个的频率为 $\omega/2\pi$.

若 $\lambda = m\omega$, m 为大于 1 的整数, 则整个解 (7.1.9.1) 以 $2\pi/\omega$ 为周期, 但它是由两个振荡叠加而成, 其中之一的频率为 $\omega/2\pi$, 另外一个的频率为 $m\omega/2\pi$, 后者称为前者的一个**超调和振荡**.

若 $\lambda = \omega/n$, n 为大于 1 的整数,则整个解 (7.1.9.1)以 $2n\pi/\omega$

为周期，且也由两个振荡叠加而成，其一的频率为 $\omega/2\pi$，另外一个的频率为 $\omega/2n\pi$. 后者称为前者的次调和振荡.

若 $\lambda = m\omega/n$，m 和 n 为互质的正整数，则解 (7.1.9.1) 的各项有共同的周期 $2n\pi/\omega$，这个解也是由两个振荡叠加而成，其中一个的频率为 $\omega/2\pi$，另一个的频率为 $m\omega/2n\pi$，后者有时称为前者的超一次调和振荡.

最后还有 λ/ω 为无理数的情形，这时，(7.1.8) 只有一个周期解，即 (7.1.9)，所有其它的解 (7.1.9.1) 都是拟周期解.

(c) 若 $\lambda = \omega$，就得到方程式

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = F \sin \lambda t, \tag{7.1.10}$$

在 (7.1.6) 中把关于 $\sin \lambda t$ 为线性的项略去，就得到特解

$$x_0(t) = -F(2\lambda)^{-1} t \cos \lambda t, \tag{7.1.11}$$

于是 (7.1.10) 的通解为

$$x(t) = h \sin(\lambda t + \tau) - F(2\lambda)^{-1} t \cos \lambda t. \tag{7.1.12}$$

因此，(7.1.10) 没有周期振荡，并得到所谓共振现象.（一般的线性系统的共振现象将在第八章 §7.2 中加以考虑.）在这种情形，当 $t = (2k + 1)\pi/2\lambda$ 时，

$$|x[(2k + 1)\pi/2\lambda]| > F(2k + 1)\pi/(4\lambda^2) - |h|,$$

因此 (7.1.10) 的解是振荡的，且当 $t \to +\infty$ 时，振荡的振幅发散到 $+\infty$.

2. 非调和情形的强迫振荡

(a) 假设在 (7.1.1) 中 $\varepsilon \neq 0$，并考虑 $\varepsilon > 0$ 的情形.

如果 $\varepsilon^2 - \lambda^2 > 0$，$-\rho_1$ 及 $-\rho_2$ 表示特征方程式 $\rho^2 + 2\varepsilon\rho + \lambda^2 = 0$ 的二根，则 $\rho_1 = \varepsilon + (\varepsilon^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$，$\rho_2 = \varepsilon - (\varepsilon^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$，而 (7.1.1) 的通解为

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{-\rho_1 t} + c_2 e^{-\rho_2 t}, \tag{7.1.13}$$

其中 c_1 与 c_2 为任意常数，且

$$\lim_{t \to +\infty} \bar{x}(t) = \lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0. \tag{7.1.14}$$

如果 $\varepsilon^2-\lambda^2=0$，则 $\rho_1=\rho_2=\varepsilon$，这时

$$\bar{x}(t)=c_1e^{-\varepsilon t}(t+c_2), \tag{7.1.15}$$

(7.1.14) 仍然成立.

最后，如果 $\varepsilon^2-\lambda^2<0$，且令

$$\varepsilon^2-\lambda^2=-\mu^2, \tag{7.1.16}$$

则 (7.1.1) 的通解有表达式

$$\bar{x}(t)=he^{-\varepsilon t}\sin(\mu t+\tau), \tag{7.1.17}$$

其中 h，τ 为任意常数，(7.1.14) 也仍然成立.

(b) 现在，假设 (7.1.1) (ε，λ 为常数)的运动受到外力 $P(t)=F\sin\omega t$，F 与 ω 为正常数，于是运动方程式变成

$$\ddot{x}+2\varepsilon\dot{x}+\lambda^2x=F\sin\omega t\quad(\varepsilon>0,\ \lambda>0). \tag{7.1.18}$$

(关于方程式 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=e(t)$ 的应用的详细的讨论，可参看 G. Krall 的论文[1]的第一章，其中附有很多例题.)

(7.1.18) 的一个特解是

$$x_0(t)=F\Delta^{-\frac{1}{2}}\sin(\omega t-\varphi), \tag{7.1.19}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\Delta=(\lambda^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2;\\&\sin\varphi=2\,\varepsilon\omega/\sqrt{\Delta},\quad\cos\varphi=(\lambda^2-\omega^2)/\sqrt{\Delta},\end{aligned}\right\} \tag{7.1.20}$$

而 (7.1.18) 的通解是

$$x(t)=\bar{x}(t)+F\Delta^{-\frac{1}{2}}\sin(\omega t-\varphi), \tag{7.1.21}$$

其中 $\bar{x}(t)$ 根据 $\varepsilon^2-\lambda^2>0$，$=0$，$<0$ 而具有表达式 (7.1.13)，(7.1.15)，(7.1.17).

于是，得出结论：振幅为 F，频率为 $\omega/2\pi$，相位为 O 的外力 $F\sin\omega t$ 作用在系统 (7.1.1) 上，使系统产生唯一的周期解 $x_0(t)$，它的频率与外力的相同，振幅为 $F/\sqrt{\Delta}$，相位为 $-\varphi$，其中 φ 为由 (7.1.20) 所确定的满足 $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ 的角.

(7.1.18) 的每一个其它的解都有如下的性质

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0,\quad \lim_{t\to+\infty}|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|=0.$$

即 $x_0(t)$ 为全局渐近稳定的(第一章，§3.3).

3. 强迫振荡问题

在非线性力学的研究中，出现了形如

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = p(t)$$

的方程式(甚至更一般的)，其中 $p(t)$ 有界，特殊的还是周期的．一个基本的问题就是要确定方程的解的性态，特别是要确定是否存在周期解．

这一章余下的部分将专门讨论这个问题． 对于 $p(t) = 0$ 的自治情形，已经在第六章分析过了，对于非自治系统的很初等的情形，也在前几段讨论过了．

我们将经常用到 L. E. J. Brouwer 不动点定理．在第二节要专门讨论这个定理及其推广．

§2. L. E. J. Brouwer 不动点定理，M. L. Cartwright J. E. Littlewood 定理及 J. L. Massera 定理

1. Brouwer 不动点定理

(a) 数学分析的一条有名的定理指出，如果实函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且在区间端点的函数值反号，则在区间内部至少有一点，使函数值为零．

在 m 维欧几里得空间中相应的定理为：假设函数 $\Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$i = 1, 2, \cdots, m$，在 S_m 的长方体

$$R_m:\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i (i = 1, 2, \cdots, m;\ a_i < b_i) \tag{7.2.1}$$

上有定义且连续，且满足不等式

$$\left.\begin{array}{c} \Phi_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) > 0 \\ \Phi_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) < 0, \\ (i = 1, 2, \cdots, m) \end{array}\right\}, \tag{7.2.2.1}$$

则在 R_m 内部至少存在一点，使 m 个函数 Φ_i 同时为零．

(b) 易于证明：如果上述定理对于含 m 个变量的多项式成立，则其对 m 个任意的连续函数也成立．(参看 S. Cinquini [1],

168—169 页的注).

考虑m个在R_m上连续的函数Φ_i，并假设它们没有公共的零点. 根据连续性,存在$l_0>0$,使得在R_m上有$\sum_{i=1}^{m}|\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)|\geqslant l_0>0$. 把$|\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_m)|$在$x_i=a_i$与$x_i=b_i$的值的最小值记为$l_i$,并令$\bar{n}=m/l_0+1/l_1+\cdots+1/l_m$. 则根据 Weierstrass 逼近定理(参看 J. Dieudonné [1], 133 页),对确定的$n>\bar{n}$,存在m个多项式$\Phi_{i,n}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,它们在$R_m$内满足

$$|\Phi_{i,n}(x_1,x_2,\cdots,x_m)-\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)|<1/n,$$

因此

$$\Phi_{i,n}(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_m)$$
$$<\Phi_i(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_m)+\frac{1}{n}<-l_i+\frac{1}{n}<0,$$

$$\Phi_{i,n}(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\cdots,x_m)>l_i-1/n>0.$$

所以,多项式$\Phi_{i,n}$满足定理所要求的条件,因而存在一点$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m)$,使得$\Phi_{i,n}$在该点同时为零.由此可知$|\Phi_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m)|<1/n$,加起来可得

$$\sum_{i=1}^{m}|\Phi_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m)|<m/n,$$

并且可推得$l_0<m/n$,或者$n<m/l_0$,这与$n>\bar{n}$矛盾. 上述命题得证.

(c) C. Miranda [1] 证明了没有必要假设(7.2.2.1)是严格不等式,即**只要假设在**R_m**上满足**

$$\left.\begin{aligned}\Phi_i(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\cdots,x_m)\geqslant 0,\\ \Phi_i(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_m)\leqslant 0,\end{aligned}\right\}\qquad(7.2.2.2)$$

就可以保证在R_m**上至少存在一点(不一定在**R_m**的内部),使得**m**个函数**$\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m$**同时为零.**

事实上,由(7.2.2.2)可知对任意正整数$n>0$,函数$\Phi_i'=\Phi_i-[x_i-(a_i+b_i)/2]/n$满足(7.2.2.1),所以对于每个$n$,存在

一点 $(x_1(1/n), \cdots, x_m(1/n))$，使得 Φ_i' 同时为零．考虑点列 $(x_1(1/n), \cdots, x_m(1/n))$，$(n=1, 2, \cdots,)$ 的一个聚点，根据函数的连续性可知 Φ_i 在该点同时为零．

因此得到下面的定理:

定理 A．如果 $F_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为在由(7.2.1)所定义的长方体 R_m 上对变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 连续的 m 个函数，且它们满足不等式

$$\left.\begin{aligned} F_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) \geqslant 0, \\ F_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) \leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.2.2}$$

则 R_m 中至少存在一点使得

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{7.2.3}$$

(d) C. Miranda([1], 5—6 页)指出，定理 A 等价于下面的定理 B，后者就是著名的 Brouwer 不动点定理 [1]．这个定理的证明可以参看 C. Kuratowski [1]，第 196 页．

定理 B．如果 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的 m 个在长方体 (7.2.1) 上连续的函数，且满足不等式

$$a_i \leqslant f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) \leqslant b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{7.2.4}$$

则方程组

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m), \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{7.2.5}$$

至少存在一组解，或者等价于:

m 维欧氏空间的元素[1] 的每一个到其自身或者自身的一部分的连续变换，至少存在一个不动点．

我们先证明由定理 B 可以推出 A．

假设 (7.2.2) 为严格的不等式．设 m_i 与 M_i 分别表示 F_i 在 R_m 中的最小值 (<0) 与最大值 (>0)，而 δ_i' 及 δ_i'' 分别表示 R_m 中使 $F_i < 0$ 的点集到超平面 $x_i = a_i$ 的距离与使 $F_i > 0$ 的点集到超平面 $x_i = b_i$ 的距离．由于应有 $\delta_i' > 0$，$\delta_i'' > 0$，故存在 m 个数 ε_i，使得

---

[1] 欧氏空间 S_m 的元素或者 m-胞腔是指 S_m 的这样的点集，它与 S_m 的闭球 Σ 同胚，即在一对一双方连续变换下，任意与闭球 Σ 所对应的集合．

$$0 < \varepsilon_i < -\delta_i'/m_i,\ \delta_i''/M_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

令 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) = x_i + \varepsilon_i F_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，则在 $F_i = 0$ 的点 $(x_1, \cdots, x_m)$，有

$$a_i \leqslant x_i = f_i \leqslant b_i;$$

在使 $F_i > 0$ 的点，由于 $0 < F_i \leqslant M_i$，$0 < \varepsilon_i F_i \leqslant \varepsilon_i M_i$，$b_i - x_i \geqslant \delta_i''$，将有

$$\begin{aligned} a_i < x_i + \varepsilon_i F_i &\leqslant b_i - \delta_i'' + \varepsilon_i M_i \\ &= b_i - (\delta_i'' - \varepsilon_i M_i) < b_i; \end{aligned}$$

在使 $F_i < 0$ 的点，由于 $0 > F_i \geqslant m_i$，$0 > \varepsilon_i F_i \geqslant \varepsilon_i m_i$，$x_i - a_i \geqslant \delta_i'$，有

$$b_i > x_i + \varepsilon_i F_i \geqslant \delta_i' + a_i + \varepsilon_i m_i = a_i + (\delta_i' + \varepsilon_i m_i) > a_i,$$

由定理 B，至少存在 R_m 的一点，使 $x_i + \varepsilon_i F_i = x_i$，$(i = 1, 2, \cdots, m)$，所以 $F_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

反过来，由定理 A 也可以推出定理 B. 为了证明这一点，由给定的函数 f_i 定义函数 F_i 如下:

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) - x_i,$$

由于 f_i 在 R_m 上连续且满足 (7.2.4)，故 F_i 满足 (7.2.2). 所以，由定理 A，存在一点使得 F_i 同时为零，于是 (7.2.5) 满足.

2. 用 Brouwer 定理证明周期解的存在性

(a) 给定非自治系统 $\dot{x} = f(t, x)$，它的纯量形式为

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_m),\ (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{7.2.6}$$

其中函数 f_i 对 $(t, x_1, \cdots, x_m)$ 连续，t 在 $(0, +\infty)$ 内变化，而 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 在欧氏空间 S_m 内变化. 而且满足解的存在性、唯一性以及解对初值的连续相依性.

还假设 f_i 对于 t 以 $\omega > 0$ 为周期，即

$$f_i(t + \omega, x_1, \cdots, x_m) = f_i(t, x_1, \cdots, x_m),$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m). \tag{7.2.6'}$$

最后，假设存在 S_m 的区域 D，它的闭包 $\overline{D}$ 是 S_m 的一个元素，即 $\overline{D}$ 与 S_m 的一个闭球同胚. 而且存在 $t_0 \geqslant 0$，使得 (7.2.6) 在时

刻 t_0 经过点 $(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ 的解 $(x_1(t), \cdots, x_m(t))$ 对于 $t \geqslant t_0$ 有定义.

满足条件 $x_i(t_0) = x_i^0$ 的解把 $\overline{D}$ 的每一个点 $(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ 变换成点 $(x_1(t_0+\omega), \cdots, x_m(t_0+\omega))$，这个对应关系是从 $\overline{D}$ 到 S_m 的某个元素 D' 之间的双方连续的变换 T. 如果存在区域 $\Delta \subset D$，使得在 T 变换下，Δ 的闭包变换到它自身，或者变换到它的一部分，则由 Brouwer 定理，T 至少存在一个不动点，即至少存在 (7.2.6) 的一个解，使得

$$x_i(t_0) = x_i(t_0+\omega) \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

根据唯一性的假设及假设 (7.2.6′)，这就意味着系统 (7.2.6) 至少存在一个以 ω 为周期的解. 当然，ω 不一定就是解的最小周期.

(b) 在用于具体例题时，步骤通常如下：构造一个区域 Δ，使得 $\overline{\Delta}$ 与一个球同胚，且有这样的性质：如果 $x_1(t), \cdots, x_m(t)$ 为 $t = t_0$ 时由 Δ 的边界上的点出发的解，则当 $t > t_0$ 时，点 $(x_1(t), \cdots, x_m(t))$ 属于 Δ. 换句话说，Δ 的边界具有"捕捉"(7.2.6) 的积分曲线的性质. 则可以推出 T 存在一个不动点，它属于 Δ. 从而存在以 ω 为周期的解.

3. M. L. Cartwright-J. E. Littlewood 定理

M. L. Cartwright 和 J. E. Littlewood [2] 证明了如下的定理(也可参看 M. L. Cartwright [1], 174 页).

如果 T 是欧氏平面到其本身的双方连续变换，D_0 为一指定的区域，D 为一约当闭曲线所围成的区域，且 $D \supset D_0$. 假设对 D 的闭包的每一点 P，可以找到一个正整数 $n_0(P)$，使得当 $n > n_0(P)$ 时，每一个 $T^n(P)$ 都属于 D_0.

则存在依赖于 D 的区域 Δ，它具有如下的性质：(i) Δ 由一约当闭曲线所围成；(ii) $\Delta \supset D$；(iii) $T(\overline{\Delta}) \subset \overline{\Delta}$.

由于 $\overline{\Delta}$ 与圆(即欧氏平面的元素)同胚，在所述假设下，根据 Brouwer 定理可知，T 至少存在一个不动点.

4. J. L. Massera 定理

(a) 我们来考虑导致 J. L. Massera 拓扑学定理 (参看 J. L. Massera [1]) 的问题.

考虑微分方程

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{7.2.7}$$

其中 $f(t,x)$ 定义在 $0\leqslant t<+\infty$; $-\infty<x<+\infty$ 上. 假定 $f(t,x)$ 连续且满足唯一性定理. 此外,还假定

$$f(t+\omega,x)=f(t,x)\ (\omega>0). \tag{7.2.8}$$

如果(7.2.7)存在正向有界解 $x(t)$,即存在常数 $L>0$,使当 $t\geqslant 0$时,有 $|x(t)|\leqslant L$,则(7.2.7)至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

为了证明这个定理，按照如下的法则定义一个函数列: $x_0(t)=x(t)$; $x_n(t)=x(t+n\omega)$, $n=1,2,\cdots$, $x_n(t)$ 满足 (7.2.7) 及初始条件 $x_n(0)=x(n\omega)=x_n$.

如果 $x_1=x_0$, 则 $x_0(t)=x_1(t)$ 对所有的 t 都成立，从而 $x_0(t)=x(t)$ 为以 ω 为周期的解. 如不然, $x_1\neq x_0$, 为确定计，设 $x_0<x_1$, 由唯一性定理可知当 $t>0$ 时，均有 $x_0(t)<x_1(t)$, 用 $t+n\omega$ 代替 t, 可知 $x_n(t)<x_{n+1}(t)$. 所以，序列 $\{x_n(t)\}$ 单调增加,一致以 L 为上界. 因为 $x_n(t)$ 同等连续，于是在每一有限区间上,它一致收敛于一个连续函数 $\xi(t)$.

函数 $\xi(t)$ 为 (7.2.7) 的一个解，且由于 $\xi(0)=\lim x_n(0)$, $\xi(\omega)=\lim x_n(\omega)=\lim x_{n+1}(0)=\xi(0)$, 可知 $\xi(0)=\xi(\omega)$,定理于是得证.

很清楚,这个结果可以做如下的解释: 如果系统 $\dot{x}=f(t,x)$ 只含一个方程式(并假定满足保证解的存在与唯一性的条件)，则存在正向有界解(或负向有界解)是存在具有与 f 相同的周期 ω 的周期解的充要条件.

我们已经看到,这个结果对 $n=2$ 的自治系统成立(第四章定理 24),在 (b) 中我们来考虑 $n=2$ 的非自治系统的情形.

(b) 现在假定 (7.2.7) 为 $n=2$ 的向量形式,且 (7.2.8) 成立.

写开来，系统为

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad \dot{y} = g(t, x, y), \tag{7.2.7'}$$

其中 f, g 为实函数，当 $t \geqslant 0$, $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$ 时有定义且连续，且满足唯一性定理. 则 (7.2.8) 变成

$$\left.\begin{aligned} &f(t+\omega, x, y) = f(t, x, y), \\ &g(t+\omega, x, y) = g(t, x, y), \quad (\omega > 0). \end{aligned}\right\} \tag{7.2.8'}$$

把 (a) 中在 $n=1$ 时的结果(也是 $n=2$ 的自治情形的结果)直接推广过来是不行的，这我们会在 (c) 的一个例题中看到. 在现在的条件下，想得到周期解存在的定理，要用到 J. L. Massera ([1], 460 页)的如下的定理，这个定理我们只加以叙述而不予证明:

设 D 为平面上的单连通区域，而 T 为 D 到其自身或自身的一部分的双方连续和保向的变换: $TD \subset D$.

如果 D 中存在一点 x_0, 使得在变换 T 之下，x_0 的象的序列 $\{T^n x_0\}$ 具有收敛于一点 $\bar{x} \in D$ 的子序列，则 D 中至少存在 T 的一个不动点(不一定与 $\bar{x}$ 重合).

有了这个定理，可以推出下面的定理，它首先是由 J. L. Massera 提出的. 它推广了 N. Levinson 的一个定理，在 Levinson 的定理中，假定 (7.2.7') 的全部解正向一致有界.（参看 N. Levinson [1], 725 页.）

如果 $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ 满足前面叙述的条件，系统 (7.2.7') 具有一个正向有界的解，而且所有的解当 $t \to +\infty$ 时都存在，则至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

考虑 §2.2 中所定义的变换 T，并令 $(x(0), y(0))$ 为平面 $t=0$ 上的一点，在 $t=\omega$ 时，在变换 T 之下它的象为 $(x(\omega), y(\omega))$.

我们有 $T^n(x(0), y(0)) = (x(n\omega), y(n\omega))$. 如果 $(x^*(t), y^*(t))$ 为正向有界的解(它的存在性是我们已假设的)，则由于序列 $(x^*(n\omega), y^*(n\omega))$ 有界，我们可以挑出一个收敛的子序列. 根据 §2.4 (b) 中所提出的 Massera 的定理，上述定理即得到证明.

(c) 下面我们用 J. L. Massera ([1], 458—459 页) 的一个例

子来说明：如果把(7.2.7′)的全部解在正向均存在的条件去掉，定理可能不真.

考虑系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= f(u, v)\cos^2\pi t - g(u, v)\sin\pi t\cos\pi t - \pi y,\\ \dot{y} &= g(u, v)\cos^2\pi t + f(u, v)\sin\pi t\cos\pi t + \pi x,\end{aligned}\right\} \tag{7.2.9}$$

其中 x, y 为实变量而

$$u = x\cos\pi t + y\sin\pi t,\quad v = y\cos\pi t - x\sin\pi t. \tag{7.2.10}$$

设 f 与 g 满足如下假设：(i) f 与 g 有连续的导数；(ii) $f(-u, -v) = f(u, v)$, $g(-u, -v) = g(u, v)$; (iii) $f(1, 0) = g(1, 0) = 0$，对所有的 v, $f(0, v) = 0$, $g(0, v) > 0$; (iv) g 满足关系式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1/g(0, v))dv < 2/\pi.$$

在这种情形，$\omega = 1$，且满足保证解的存在与唯一性的条件.

把 u 与 v 设为未知函数，得到系统

$$\dot{u} = f(u, v)\cos\pi t,\quad \dot{v} = g(u, v)\cos\pi t, \tag{7.2.11}$$

从而

$$f(u, v)dv = g(u, v)du. \tag{7.2.12}$$

这个方程有解 $u = 1, v = 0$; $u = -1, v = 0$，根据(7.2.10)，对应这两个解，(7.2.9)有解 $x = \cos\pi t$, $y = \sin\pi t$; $x = -\cos\pi t$, $y = -\sin\pi t$，它们都以 2 为周期.

$u = 0$, $-\infty < v < +\infty$ 也是(7.2.12)的解，由此可以证明；如果 $u = u(t)$, $v = v(t)$ 是(7.2.11)的一个解，它在 t 的一个值 t_0 时满足条件 $u(t_0) > 0$ (或者 $u(t_0) < 0$)，则由关于方程(7.2.12)的唯一性定理可知对于 $t \geqslant t_0$，将有 $u(t) > 0$ (或 $u(t) < 0$).

因此，这个解不可能对应于(7.2.9)的以 1 为周期的周期解. 因为如果把 t 换成 $t+1$，从(7.2.10)可知它应改变符号.

最后，假定 $u = 0$, $v = v(t)$ 为(7.2.11)的对所有 t 都有定义的一个解. 则由(7.2.11)的第二个方程可知

$$\int_{v_0}^{v} \frac{ds}{g(0,s)} = \int_{t_0}^{t} \cos \pi\tau d\tau = \frac{1}{\pi}(\sin \pi t - \sin \pi t_0).$$

如果取 $t_0 = -1/2$，$t = 1/2$，就得到

$$\int_{v(-1/2)}^{v(1/2)} \frac{ds}{g(0,s)} = 2/\pi,$$

而这与 (iv) 矛盾．所以，不可能假定 $v(t)$ 对所有 t 有定义，从而 $v(t)$ 不可能是周期的．

这个例子说明系统 (7.2.9) 有以 2 为周期的周期解，但是没有一个以 1 为周期的周期解．

§3. T. Yoshizawa 定理

1. 最终有界性准则

(a) 这一节我们来考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad \dot{y} = g(t, x, y), \tag{7.3.1}$$

其中 f, g 在

$$\Delta_t: \ 0 \leqslant t < +\infty, \ |x| < +\infty, \ |y| < +\infty$$

上连续．(根据 T. Yoshizawa 的三篇文章，参看 T. Yoshizawa [1], [2], [3].)

首要的目的是去掉唯一性的假设而要给出 (7.3.1) 的解的有界性的一般准则．如果唯一性假设得到保证，且再假定 (7.3.1) 的右端具有周期 ω，就可以在前节的 Massera 定理的基础上，应用这个准则推出以 ω 为周期的周期解的存在了．

其次，我们将介绍 Yoshizawa 关于周期解的唯一性与稳定性的准则；我们还将把这些准则应用到一些特别重要的方程式上去．

(b) **引理 1.** 给定两个正常数 A_1 与 B_1，R_1 表示矩形区域

$$R_1: \ |x| < A_1, \ |y| < B_1.$$

设存在定义在 R_1 的余集 CR_1 上的函数 $\Phi(x, y)$，它满足下列条件：(1) $\Phi(x, y) > 0$；(2) (i) 当 $|x| \to +\infty$ 时，$\lim \Phi(x, y) = 0$ 对 y 一致成立；(ii) 当 $|y| \to +\infty$ 时，$\lim \Phi(x, y) = 0$

对 x 一致成立; (3) $\Phi(x, y)$ 满足局部 Lipschitz 条件; (4) 对任意固定的 $t \geqslant 0$ 及 CR_1 的任意内点 (x, y), 有

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{\Phi(x + hf(t, x, y),\ y + hg(t, x, y)) - \Phi(x, y)\} \geqslant 0, \tag{7.3.2}$$

则对一对固定的数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 存在两个常数 $L_1(\alpha, \beta) > 0$, $M_1(\alpha, \beta) > 0$ (只与 α 和 β 有关),使得,如果 (7.3.1) 的解 $x(t)$, $y(t)$ 在一点 $t_0 \geqslant 0$ 满足 $|x(t_0)| \leqslant \alpha$, $|y(t_0)| \leqslant \beta$, 则对每一个 $t \geqslant t_0$, 均有 $|x(t)| \leqslant L_1(\alpha, \beta)$, $|y(t)| \leqslant M_1(\alpha, \beta)$.

不失一般性,我们可以假设 $\alpha > A_1, \beta > B_1$.

令 R_0 为矩形区域(图 123):

R_0: $|x| < \alpha$, $|y| < \beta$.

于是,由假设 1 及 2 存在 $L_1 > 0$, 及 $M_1 > 0$, 使得

$$\min_{FR_0} \Phi(x, y) > \max_{FR_1^*} \Phi(x, y), \tag{7.3.3}$$

此处 R_1^* 表示矩形区域

R_1^*: $|x| < L_1$, $|y| < M_1$,

而 FR_0 和 FR_1^* 分别表示 R_0 与 R_1 的边界.

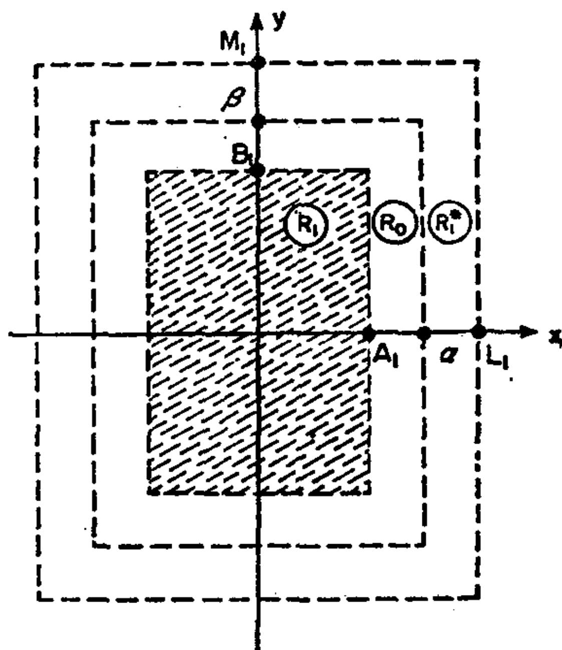


图 123

用反证法. 假定存在 (7.3.1) 的解 $x(t)$, $y(t)$, 它满足条件 $(x(t_0), y(t_0)) \in R_0$, 而当 t 增加时, 可以取到 FR_1^* 上的点.

令 t_2 为使得 $(x(t), y(t))$ 属于 FR_1^* 的 $t(>t_0)$ 的下确界, 则当 $t_0 < t < t_2$ 时, $(x(t), y(t)) \in R_1^*$, 而 $(x(t_2), y(t_2)) \in FR_1^*$ *). 设 t_1 为如此的 $\bar{t}$ 的下确界, 当 $\bar{t} < t < t_2$ 时, $(x(t), y(t)) \in R_1^*$ 一

*) 原书本小段有错误,译者作了改写. ——译者注

$\bar{R}_0$，则 $(x(t_1), y(t_1)) \in FR_0$，而当 $t_1 < t < t_2$ 时，$(x(t), y(t)) \in R_1^* - \bar{R}_0$. 由 (7.3.3)，有

$$\Phi(x(t_1), y(t_1)) > \Phi(x(t_2), y(t_2)). \qquad (7.3.4)$$

但可以证明，沿着 (7.3.1) 的积分曲线 $x = x(t)$，$y = y(t)$，当 $t \in [t_1, t_2]$ 时，函数 $\Phi(x(t), y(t))$ 为 t 的非减函数. 其证明如下：

首先，对于 $h > 0$ 及 $[t, t+h] \subset [t_1, t_2]$，有如下的恒等式：

$$\begin{aligned}
&\Phi(x(t+h), y(t+h)) - \Phi(x(t), y(t)) \\
&\quad = \Phi\Big(x(t) + \int_t^{t+h} f(\theta, x(\theta), y(\theta))d\theta, y(t) \\
&\qquad + \int_t^{t+h} g(\theta, x(\theta), y(\theta))d\theta \\
&\qquad - \Phi(x(t) + hf(t, x(t), y(t)), y(t) + hg(t, x(t), y(t))) \\
&\qquad + \Phi(x(t) + hf(t, x(t), y(t)), y(t) + hg(t, x(t), y(t))) \\
&\qquad - \Phi(x(t), y(t)).
\end{aligned}$$

于是，对于固定的 $\tau > 0$，由 (7.3.2)，存在 $h_0 > 0$，使得当 $0 < h \leqslant h_0$ 时，最后两项差将大于 $-h\tau/2$. 其次，把 Lipschitz 条件用到头两项上去，以 L 表示 Lipschitz 常数，就得到

$$\begin{aligned}
&\Phi(x(t+h), y(t+h)) - \Phi(x(t), y(t)) > -h\tau/2 \\
&\qquad - L\left\{\left|\int_t^{t+h} f(\theta, x(\theta), y(\theta))d\theta - hf(t, x(t), y(t))\right|\right. \\
&\qquad + \left.\left|\int_t^{t+h} g(\theta, x(\theta), y(\theta))d\theta - hg(t, x(t), y(t))\right|\right\}.
\end{aligned}$$

如果必要，只要把 h_0 取得小一点，就可以假定 $\Phi(x(t+h), y(t+h)) - \Phi(x(t), y(t)) > -h\tau$. 由于 τ 为任意的，就得到

$$\varliminf_{h \to 0^+} [\Phi(x(t+h), y(t+h)) - \Phi(x(t), y(t))]/h \geqslant 0, \qquad (7.3.5)$$

这正好证明 $\Phi(x(t), y(t))$ 是非减的，于是 $\Phi(x(t_1), y(t_1)) < \Phi(x(t_2), y(t_2))$，这与 (7.3.4) 矛盾. 如果在 (7.3.5) 中换成 $\varlimsup_{h \to 0^+} \cdots > 0$，可以得到同样的结论.（参看 E. W. Hobson, [1]. 365—366 页）

(c) 由于 (b) 中的证明只是根据 (7.3.3)，可知 $L_1(\alpha, \beta)$，$M_1(\alpha, \beta)$ 与 t_0 无关.

(d) 引理 2. 保留引理 1 的假设 1，2，3，把假设 4 换成如下

的 4′：对任意固定的 $t\geqslant 0$，对应于 CR_1 内部的每一点 (x, y)，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\Phi(x+hf(t,x,y),y+hg(t,x,y))-\Phi(x,y)\}\geqslant\varepsilon>0. \tag{7.3.2.1}$$

在这些假设下，如果 A_2，B_2 为两个满足 $A_2>A_1$，$B_2>B_1$ 的任意常数，而 R_2 为矩形区域

$$R_2:\ |x|<A_2,\ |y|<B_2,$$

又如果 t_0 为 t 的某个值，而 $x(t)$，$y(t)$ 为 (7.3.1) 的满足 $(x(t_0), y(t_0))\in\overline{R}_2-\overline{R}_1$ 的解，则存在 $t>t_0$，使得 $(x(t), y(t))\in\overline{R}_1$。

根据引理 1，对于 (7.3.1) 的满足条件 $(x(t_0), y(t_0))\in\overline{R}_2$ 的解 $x(t)$，$y(t)$，存在两个只依赖于 A_2 与 B_2，而与 t_0 无关的常数 $L_2>A_2>0$，$M_2>B_2>0$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时，$|x(t)|<L_2$，$|y(t)|<M_2$。

令 R_2^* 为矩形区域(图 124)

$$R_2^*:\ |x|<L_2,\ |y|<M_2.$$

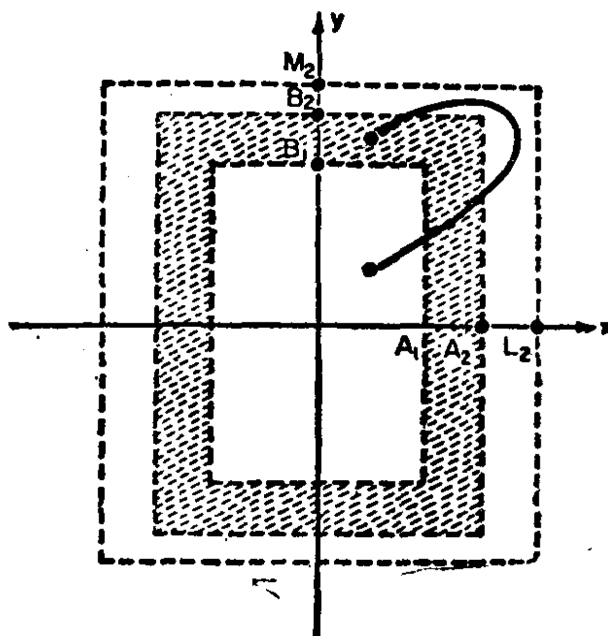


图 124

考虑定义在

$$\Delta_3: t_0\leqslant t<+\infty,\ (x, y)\in\overline{R}_2^*-R_1$$

内的函数 $\Phi(x, y)e^{-Nt}$，其中 $N>0$ 为即将予以确定的常数.

我们有：(i) 在 Δ_3 内 $\Phi(x, y)e^{-Nt}$ 关于 t 连续；(ii) 当 $t\to+\infty$ 时，$\lim\Phi(x, y)e^{-Nt}=0$ 对 $(x, y)\in\bar{R}_2^*-R_1$ 一致成立；(iii) 如果 (t, x, y)，$(t, x', y')\in\Delta_3$，则

$$|\Phi(x, y)e^{-Nt}-\Phi(x', y')e^{-Nt}|$$
$$=e^{-Nt}|\Phi(x, y)-\Phi(x', y')|\leqslant L[|x-x'|+|y-y'|],$$

此处 L 为一常数. 因此，$\Phi(x, y)e^{-Nt}$ 满足关于 (x, y) 的 Lipschitz 条件；(iv) 有

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[e^{-N(t+h)}\Phi(x+hf, y+hg)-e^{-Nt}\Phi(x, y)]$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[e^{-N(t+h)}\{\Phi(x+hf, y+hg)-\Phi(x, y)\}$$
$$+\Phi(x, y)\{e^{-N(t+h)}-e^{-Nt}\}]$$
$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{h}e^{-N(t+h)}\{\Phi(x+hf, y+hg)-\Phi(x, y)\}\right.$$
$$\left.-\Phi(x, y)\frac{e^{Nh}-1}{h}e^{-N(t+h)}\right]$$
$$\geqslant e^{-Nt}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{\Phi(x+hf, y+hg)-\Phi(x, y)\}$$
$$-Ne^{-Nt}\Phi(x, y)\geqslant e^{-Nt}\{\varepsilon-N\Phi(x, y)\}. \qquad (7.3.6)$$

由于在 $\bar{R}_2^*-R_1$ 内 $\Phi(x,y)>0$ 且连续，故N 可以取得如此之小，使得在 Δ_3 内有

$$[e^{-N(t+h)}\Phi(x+hf, y+hg)-e^{-Nt}\Phi(x, y)]/h>0.$$

根据和引理 1 中同样的理由，再利用 (7.3.6)，就可以推出，沿着 (7.3.1) 的每一个解 $(x(t), y(t))$，$\Phi(x, y)e^{-Nt}$ 是 t 的非减函数.

现在假定存在满足 $(x(t_0), y(t_0))\in\bar{R}_2-\bar{R}_1$ 的解 $x(t), y(t)$，且不存在任何 $t>t_0$，使得 $(x(t), y(t))\in\bar{R}_1$. 对于这个解，函数 $e^{-Nt}\Phi(x(t), y(t))$ 为 t 的非减函数. 但我们已经看到，根据 (ii) 却存在 T，使得

$$\min_{(x,y)\in\bar{R}_2-R_1}\Phi(x, y)e^{-Nt_0}>\max_{(x,y)\in\bar{R}_2^*-R_1}\Phi(x, y)e^{-NT}, \qquad (7.3.7)$$

这就得出了矛盾，于是引理 2 得证.

(e) 由前面的两条引理，我们可以得到如下的关于最终有界性的定理:

定理. 给定系统 (7.3.1)，如果 $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ 在 Δ_1 中连续，且满足引理 2 的假设，则系统的所有解都最终有界，即存在两个常数 $A>0$, $B>0$, 使得对于每个固定的点 (x_0, y_0)，如果 $x(t)$, $y(t)$ 为满足条件 $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ 的解，则存在 $T_0>t_0$ (T_0 与 (x_0, y_0) 有关)，使得当 $t \geqslant T_0$ 时，有

$$|x(t)|<A, \quad |y(t)|<B.$$

为了证明这个定理，考虑对应于任意点 $(x_0, y_0) \in \bar{R}_1$ 的解. 于是，根据引理 1，存在二常数 $A>0$, $B>0$，使得对于所有 $t \geqslant t_0$，均有 $|x(t)|<A$, $|y(t)|<B$. 对于其它每一个由 $(x_0, y_0) \in C\bar{R}_1$ 出发的解，根据引理 2 (因为在引理 2 中，由 A_2 与 B_2 所表示的常数是任意的)，存在 T_0，使得 $(x(T_0), y(T_0)) \in \bar{R}_1$，因此，当 $t \geqslant T_0$ 时有 $|x(t)|<A$, $|y(t)|<B$. 定理得证.

(f) 我们将运用这个定理来证明 G. E. H. Reuter [3] 提出的一个有界性定理.

给定方程式

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+g(x)=p(t), \tag{7.3.8}$$

其中 $g(x)$ 连续，当 $|x| \to +\infty$ 时，$g(x)\operatorname{sgn} x \to +\infty$; $F(y)$ 连续，当 $|y| \to +\infty$ 时，$F(y)\operatorname{sgn} y \to +\infty$; $p(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续且有界.

在这些假定下，存在常数 $A>0$, $B>0$，使得对于 (7.3.8) 的任意解 $x=x(t)$，存在相应的 T_0，当 $t \geqslant T_0$ 时，

$$|x(t)| \leqslant A, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant B. \tag{7.3.9}$$

为了证明这个定理，考虑等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y=f(t, x, y), \\ \dot{y}=-F(y)-g(x)+p(t)=g(t, x, y).\end{cases}$$

现定义 $u(x, y)$ 如下:

$$u=u(x, y)=-y^2/2-G(x), \quad G(x)=\int_0^x g(s)\,ds,$$

往证：如果把 a, b 取为充分大的正常数，则按下面的法则定义的函数 $\Phi(x, y)$，满足 (e) 中定理的条件，从而可以推出 (7.3.9) 的结论. $\Phi(x, y)$ 定义如下:

$$\Phi(x, y) = \exp(u), \tag{7.3.10.1}$$

$$\text{当} \quad -\infty < x < +\infty;\ y \geqslant b \text{ 时}; \tag{7.3.11.1}$$

$$\Phi(x, y) = \exp(u - y + b), \tag{7.3.10.2}$$

$$\text{当}\ x \geqslant a;\ |y| \leqslant b \text{ 时}; \tag{7.3.11.2}$$

$$\Phi(x, y) = \exp(u + 2b), \tag{7.3.10.3}$$

$$\text{当}\ x \geqslant a;\ y \leqslant -b \text{ 时}; \tag{7.3.11.3}$$

$$\Phi(x, y) = \exp(u + 2bx/a), \tag{7.3.10.4}$$

$$\text{当}\ |x| \leqslant a;\ y \leqslant -b \text{ 时}; \tag{7.3.11.4}$$

$$\Phi(x, y) = \exp(u - 2b), \tag{7.3.10.5}$$

$$\text{当}\ x \leqslant -a;\ y \leqslant -b \text{ 时}; \tag{7.3.11.5}$$

$$\Phi(x, y) = \exp(u + y - b), \tag{7.3.10.6}$$

$$\text{当}\ x \leqslant -a;\ |y| \leqslant b \text{ 时}. \tag{7.3.11.6}$$

只须检验在由 (7.3.11.1) 到 (7.3.11.6) 的六个集合的每一个中，a 和 b 可以如此选取，使得当 x 和 y 有界时，有关系

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} f(t, x, y) + \frac{\partial\Phi}{\partial y} g(t, x, y) > 0. \tag{7.3.11}$$

例如，在集合 (7.3.11.1) 中，(7.3.11) 的左端变成

$$\begin{aligned} &-\exp(u)g(x)y + \exp(u)(-y)[-F(y) - g(x) + p(t)] \\ &\quad = yF(y)\exp(u)[1 - p(t)/F(y)], \end{aligned}$$

如果 b 使得当 $y > b$ 时 $yF(y) > 0$, $|F(y)| > 2\sup|p(t)|$，则当 (x, y) 在有界区域内变化时，(7.3.11) 就成立. 类似地，在区域 (7.3.11.4) 中，(7.3.11) 的左端变为

$$\begin{aligned} &\exp(u + 2bx/a)(-g(x) + 2b/a)y \\ &\qquad + \exp(u + 2bx/a)(-y)[-F(y) - g(x) + p(t)] \\ &\quad = \exp(u + 2bx/a)yF(y)[1 - p(t)/F(y) + 2b/(aF(y))], \end{aligned}$$

如果 a 和 b 充分大，而 (x, y) 在有界区域内变化，则 (7.3.11) 也成立.

2. 周期解存在定理

(a) 给定系统

$$\dot{x}=f(t,x,y),\dot{y}=g(t,x,y), \tag{7.3.1}$$

假定 f, g 在 $\Delta_1(0\leqslant t<+\infty, |x|<+\infty, |y|<+\infty)$上连续，唯一性定理成立，且存在 $\omega>0$，使得 $f(t+\omega,x,y)=f(t,x,y)$，$g(t+\omega,x,y)=g(t,x,y)$.

还假定存在满足引理 2(§3.1 (d)) 的条件的函数 $\Phi(x,y)$.

则 (7.3.1) 至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

从 §3.1 的定理和 §2 中的 Massera 定理立即可以证明本定理.

(b) 由 §3.1 (f) 的结果和刚才证明的定理，立即可推出 G. E. H. Reuter [3] 的定理.

给定方程式

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+g(x)=p(t), \tag{7.3.8}$$

其中 $g(x)$ 连续；当 $|x|\to+\infty$ 时，$g(x)\operatorname{sgn}x\to+\infty$，$F(y)$连续，当$|y|\to+\infty$时，$F(y)\operatorname{sgn}y\to+\infty$，$p(t)$ 连续且以 ω 为周期，则至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

应当指出，如果 $F(0)+g(\alpha)=p(t)$ (所以 $p(t)$ 为常数)，则唯一的周期解就是常数解 $x=\alpha$.

3. 解的稳定性

(a) 假定 $f(t,x,y)$，$g(t,x,y)$ 在 Δ_1 内连续，且存在常数 $A>0$，$B>0$，使得对于 (7.3.1) 的每一个解，对于某个 t_0，当 $t\geqslant t_0$ 时，$|x(t)|<A$，$|y(t)|<B$，其中 t_0 与所取的解有关. 我们希望找到那样的条件，它足以保证对于 (7.3.1) 的每一对解 $(x(t),y(t))$，$(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$，都具有性质

$$\lim_{t\to+\infty}\{|x(t)-\tilde{x}(t)|+|y(t)-\tilde{y}(t)|\}=0.$$

为此，我们先提出两个引理，它们的证明方法和 §3.1 中的引理相类似.

(b) **引理 1.** 给定区域

$$\Delta_2:\ t_0 \leqslant t < +\infty;\ |x| \leqslant A;\ |u| \leqslant A;\ |y| \leqslant B;$$
$$|v| \leqslant B,$$

其中 $t_0 > 0$ 为指定的数.

设存在定义在

$$\bar{\Delta}:\ |x| \leqslant A;\ |u| \leqslant A;\ |y| \leqslant B;\ |v| \leqslant B$$

上的函数 $\Phi(x, u, y, v)$，它在 $\bar{\Delta}$ 上满足：(1) 当 $|x-u| + |y-v| > 0$ 时，$\Phi(x, u, y, v) > 0$；(2) 当 $|x-u| + |y-v| = 0$ 时，$\Phi(x, u, y, v) = 0$；(3) $\Phi(x, u, y, v)$ 在 $\bar{\Delta}$ 中一致满足 Lipschitz 条件；(4) 在 Δ_2 的每一个内点，有

$$\varlimsup_{h\to 0} \frac{1}{h} \{\Phi(x + hf(t, x, y), u + hf(t, u, v),$$
$$y + hg(t, x, y), v + hg(t, u, v)) - \Phi(x, u, y, v)\} \leqslant 0. \tag{7.3.12}$$

在这些假设下，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对于 (7.3.1) 的两个解 $(x(t), y(t))$，$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$，只要它们当 $t \geqslant t_0$ 时有

$$|x(t)| < A,\ |y(t)| < B,\ |\tilde{x}(t)| < A,\ |\tilde{y}(t)| < B, \tag{7.3.13}$$

且对某个 $T \geqslant t_0$，有

$$|x(T) - \tilde{x}(T)| + |y(T) - \tilde{y}(T)| < \delta, \tag{7.3.14}$$

则对所有的 $t \geqslant T$，均有

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| + |y(t) - \tilde{y}(t)| < \varepsilon. \tag{7.3.15}$$

对任意 $\varepsilon > 0$，令

$$\delta' = \min_{\substack{(x, u, y, v)\in\bar{\Delta} \\ |x-u|+|y-v|=\varepsilon}} \Phi(x, u, y, v). \tag{7.3.16}$$

因为集合

$$(x, u, y, v) \in \bar{\Delta},\ |x-u| + |y-v| = \varepsilon \tag{7.3.17}$$

为有界闭集，δ' 应是与 t 无关的正常数.

由条件 3，存在常数 $L > 0$，使得对于 $\bar{\Delta}$ 中的任意两点 (x, u, y, v)，(x', u', y', v') 有

$$|\Phi(x, u, y, v) - \Phi(x', u', y', v')|$$
$$\leqslant L(|x - x'| + |u - u'| + |y - y'| + |v - v'|).$$

令 $\delta = \min(\delta'/L, \varepsilon)$.

我们来证明：如果 $(x(t), y(t))$，$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 为 (7.3.1) 的对某个 $T \geqslant t_0$ 满足 (7.3.14) 的两个解，则对所有的 $t \geqslant T$，(7.3.15) 均成立．设如不然，存在 $T' > T$，使得

$$|x(T') - \tilde{x}(T')| + |y(T') - \tilde{y}(T')| = \varepsilon. \quad (7.3.18)$$

如果 (7.3.15) 不是对所有的 $t > T$ 都满足，T' 肯定是存在的．

现在要指出 $\Phi(x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t))$ 在 (T, T') 中是 t 的非增函数．

事实上，

$$\begin{aligned}
&\Phi(x(t+h), \tilde{x}(t+h), y(t+h), \tilde{y}(t+h)) \\
&\quad - \Phi(x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t)) \\
&= \Phi\left(x(t) + \int_t^{t+h} f(\theta, x(\theta), y(\theta))d\theta, \cdots\right) \\
&\quad - \Phi(x(t) + hf(t, x(t), y(t)), \cdots) \\
&\quad + \Phi(x + hf(t, x(t), y(t)), \cdots) - \Phi(x(t), \cdots),
\end{aligned}$$

对任意 $\tau > 0$，存在 $h_0 > 0$，使得对 $0 \leqslant h \leqslant h_0$，最后两项之差小于 $\tau/2$，而对前两项应用 Lipschitz 不等式，如果必要，可以把 h_0 取得更小一点．这样，可以假定

$$\begin{aligned}
&\Phi(x(t+h), \tilde{x}(t+h), y(t+h), \tilde{y}(t+h)) \\
&\quad - \Phi(x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t)) < h\tau,
\end{aligned}$$

因此有

$$\overline{\lim_{h \to 0+}} [\Phi(x(t+h), \cdots) - \Phi(x(t), \cdots)]/h \leqslant 0,$$

而这恰恰表明 $\Phi(x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t))$ 为 (T, T') 上的非增函数．

由 (7.3.18) 及 δ' 的定义，就有

$$\Phi(x(T), \tilde{x}(T), y(T), \tilde{y}(T)) \geqslant \delta', \quad (7.3.19)$$

但是，由 Lipschitz 条件及 (7.3.14)，还有

$$\begin{aligned}
&\Phi(x(T), \tilde{x}(T), y(T), \tilde{y}(T)) - \Phi(\tilde{x}(T), \tilde{x}(T), \tilde{y}(T), \tilde{y}(T)) \\
&\quad \leqslant L[|x(T) - \tilde{x}(T)| + |y(T) - \tilde{y}(T)|] < L\delta \\
&\quad \leqslant L\delta'/L = \delta',
\end{aligned}$$

这与 (7.3.19) 矛盾，所以 (7.3.15) 为真．

引理 2. 如果引理 1 的假定 1，2，3，4 成立，且增加假定 5：对任意 $\lambda > 0$，对应着一个数 $\chi(\lambda) < 0$，使得对满足 $|x-u| + |y-v| \geqslant \lambda$ 的每个点 $(x, u, y, v) \in \Delta_2$，都有

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\{\Phi(x+hf(t,x,y),\ u+hf(t,u,v),$$
$$y+hg(t,x,y), v+hg(t,u,v)) - \Phi(x,u,y,v)\}$$
$$\leqslant \chi(\lambda) < 0, \qquad (7.3.20)$$

于是，如果对 $\delta > 0$，(7.3.1) 存在满足 (7.3.13) 的两个解 $(x(t), y(t))$，$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$，对某个 $T \geqslant t_0$，有 $|x(T) - \tilde{x}(T)| + |y(T) - \tilde{y}(T)| \geqslant \delta$，则存在 $T' > T$，使得

$$|x(T') - \tilde{x}(T')| + |y(T') - \tilde{y}(T')| < \delta. \qquad (7.3.21)$$

取 δ' 满足 $0 < \delta' < \delta$，且定义 Δ_3, Δ_4 如下：

Δ_3: $T \leqslant t < +\infty$, $|x| \leqslant A$, $|u| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$, $|v| \leqslant B$,

Δ_4: $T \leqslant t < +\infty$, $|x-u| + |y-v| \leqslant \delta'$.

考虑函数 $\phi(x,u,y,v,t) = e^{Nt}\Phi(x,u,y,v)$，其中 $N = N(\delta') > 0$ 为一待定常数.

在 $\Delta_3 - \Delta_4$ 中(由于 $|x-u| + |y-v| > \delta'$)有：

(1) $\phi(x,u,y,v,t) > 0$; (2) 当 $t \to +\infty$ 时，$\phi(x,u,y,v,t) \to +\infty$ 对 (x,u,y,v) 一致成立; (3) 对固定的 t，$\phi(x,u,y,v,t)$ 对 $(x,u,y,v) \in \bar{\Delta}$ 满足 Lipschitz 条件. 我们还有

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\{\phi(x+hf(t,x,y), u+hf(t,u,v),$$
$$y+hg(t,x,y), v+hg(t,u,v), t) - \phi(x,u,y,v,t)\}$$
$$= \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\{e^{N(t+h)}[\Phi(x+hf(t,x,y), \cdots)$$
$$-\Phi(x,u,y,v)] + (e^{N(h+t)} - e^{Nt})\Phi(x,u,y,v)\}$$
$$= e^{Nt}\overline{\lim_{h\to 0}}[\Phi(x+hf(t,x,y),\cdots) - \Phi(x,u,y,v)]$$
$$+ Ne^{Nt}\Phi(x,u,y,v) \leqslant e^{Nt}[-|\chi(\delta')| + N\Phi(x,u,y,v)],$$

令 Φ 表示 $\Phi(x,u,y,v)$ 在 $\bar{\Delta}$ 上的最大值，如果 $N\Phi < |\chi(\delta')|$，则有

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\{\phi(x+hf(t,x,y),\cdots)-\phi(x,u,y,v,t)\}/h\leqslant 0. \tag{7.3.22}$$

现在假定 (7.3.21) 不成立. 如果令 Δ_5 表示集合 $|x-u|+|y-v|<\delta$; 取 T'' 使得

$$\min_{\bar{\Delta}-\Delta_5} e^{N(\delta')T''}\Phi(x,u,y,v) > \max_{\bar{\Delta}-\Delta_5} e^{N(\delta')T}\Phi(x,u,y,v). \tag{7.3.23}$$

但根据在引理 1 中所运用的相同的推理,可知 $\phi(x(t),\tilde{x}(t),y(t),\tilde{y}(t),t)$ 在 (T,T'') 内为非增函数, 所以

$$\begin{aligned}&\phi(x(T''),\tilde{x}(T''),y(T''),\tilde{y}(T''),T'')\\&\leqslant\phi(x(T),\tilde{x}(T),y(T),\tilde{y}(T),T),\end{aligned}$$

而这与 (7.3.23) 矛盾,于是引理得证.

(d) 由上述两个引理可以推出 (7.3.1) 的解的稳定性定理.

给定系统

$$\dot{x}=f(t,x,y),\quad \dot{y}=g(t,x,y), \tag{7.3.1}$$

如果 f, g 在 Δ_1: $|x|<+\infty$, $|y|<+\infty$, $0\leqslant t<+\infty$ 上连续; 且存在常数 $A>0$, $B>0$, 使得每个解都对应着一个 t_0, 当 $t\geqslant t_0$ 时, $|x(t)|<A$, $|y(t)|<B$; 又若引理 2 的假定都满足, 则对每一对解 $(x(t),y(t))$, $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$, 都有

$$\lim_{t\to+\infty}\{|x(t)-\tilde{x}(t)|+|y(t)-\tilde{y}(t)|\}=0. \tag{7.3.24}$$

为了证明这个定理, 令 t_0 为 t 的一个值, 当 $t\geqslant t_0$ 时, 解 $(x(t),y(t))$ 具有性质 $|x(t)|<A$, $|y(t)|<B$. 对 $\varepsilon>0$, 根据引理 1,存在 $\delta>0$, 使得只要对某个 $T\geqslant t_0$, $|x(T)-\tilde{x}(T)|+|y(T)-\tilde{y}(T)|<\delta$, 则对 $t\geqslant T$ 总有 $|x(t)-\tilde{x}(t)|+|y(t)-\tilde{y}(t)|<\varepsilon$. 另一方面,由引理 2, 如此的 T 值总存在,于是定理得证.

(e) 注意到,如果假定

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi(x,u,y,v)}{\partial x}f(t,x,y)+\frac{\partial\Phi(x,u,y,v)}{\partial u}f(t,u,v)\\&+\frac{\partial\Phi(x,u,y,v)}{\partial y}g(t,x,y)+\frac{\partial\Phi(x,u,y,v)}{\partial v}g(t,u,v)<0,\end{aligned} \tag{7.3.25}$$

则引理 1 的条件 4 和引理 2 的条件 5 都成立.

(f) 还要指出，根据所做的分析，如果 $\Phi(x, u, y, v)$ 满足条件 1 和 2; 在 $\bar{\Delta}$ 有连续导数,且对于 (7.3.1) 的任意一对解 $(x(t), y(t))$, $(u(t), v(t))$, $\Phi(x(t), u(t), y(t), v(t))$ 是 t 的非增函数，则在 (d) 中所证明的定理成立.

(g) 现在应用刚才在 (d) 中所证明的定理，来证明 G. E. H. Reuter 关于方程式

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t) \quad (k > 0) \tag{7.3.26}$$

的一个定理,其中 $f(x)$, $g(x)$, $p(t)$ 分别对所有实 x, t 连续.

暂时承认 G. E. H. Reuter 的如下定理,我们将在 §7.1 (b) 中加以证明(参看 G. E. H. Reuter [1], p. 538 (a)).

记

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s)ds, \quad P(t) = \int_0^t p(s)ds,$$

假定如下的假设满足: (i) 对所有 x, $f(x) > 0$; 当 $|x| \to +\infty$ 时，$F(x) \operatorname{sgn} x \to +\infty$; (ii) 当 $x \neq 0$ 时，$xg(x) > 0$; 当 $|x| \to +\infty$ 时，$G(x) \to +\infty$; (iii) $P(t)$ 及 $p(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

则存在与 k 无关的常数 $x_0 > 0$, $v_0 > 0$, 使得 (7.3.26) 的所有的解，当 t 充分大时，满足不等式

$$|x(t)| \leqslant x_0, \quad |\dot{x}(t)| \leqslant v_0. \tag{7.3.26.1}$$

下面要证明的定理(参看 G. E. H. Reuter [2]) 是 (d) 中的定理的一个应用.

如果*) 对所有的 x, $g(x)$ 有导数 $g'(x)$, $g''(x)$; 且存在正数 a_1, a_2, a_3, a_4 及 $\gamma(x_0)$ (与 k 无关), 使得

$$0 < a_1 \leqslant f(x) \leqslant a_2, \; 0 < a_3 \leqslant g'(x) \leqslant a_4, \; |g''(x)| \leqslant \gamma(x_0); \tag{7.3.26.2}$$

又 $P(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界; 则当 k 大于某一 $k_0 > 0$ 时，对 (7.3.26) 的任意两个解, $x(t)$, $u(t)$, 均有

---

*) 本定理叙述上有补充. ——译者注

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-u(t)|=0,\quad \lim_{t\to+\infty}|\dot{x}(t)-\dot{u}(t)|=0. \quad (7.3.26.3)$$

(7.3.26) 等价于系统

$$\dot{x}=y-kF(x),\quad \dot{y}=-g(x)+kp(t). \quad (7.3.26.4)$$

考虑函数(在 Reuter 的文章中记为 Q)

$$\Phi(x,u,y,v)=(g(x)-g(u))(x-u)$$
$$+(y-v)^2-2c(x-u)(y-v),\quad c\text{ 为常数}. \quad (7.3.26.5)$$

有 $\Phi(x,u,y,v)\geqslant a_3(x-u)^2+(y-v)^2-2c(x-u)(y-v)$,由此可知,当 $c^2<a_3$ 时,$\Phi(x,u,y,v)>0$.

易于验证,(g) 中第一个定理的条件成立. 因此存在 x_0 及 v_0,使 (7.3.26.1) 成立*).

现在设 $(x(t),y(t))$,$(u(t),v(t))$ 为 (7.3.26.4) 的二解,且令 $\omega(t)=(g(x)-g(u))/(x-u)$. 从 (7.3.26.2) 得到 $a_3\leqslant\omega(t)\leqslant a_4$,$|\dot{\omega}(t)|\leqslant 2v_0\gamma(x_0)$. 若令 $\sigma(t)=k[F(x)-F(u)]/(x-u)$,再由 (7.3.26.2) 即得 $ka_1\leqslant\sigma(t)\leqslant ka_2$.

如果令 $\dot{\Phi}$ 表示 $\Phi(x(t),u(t),y(t),v(t))$ 对 t 的导数,由 (7.3.26.5) 得到

$$\dot{\Phi}+c\Phi=-[2\omega\sigma-\dot{\omega}-3c\omega](x-u)^2$$
$$+2c(\sigma-c)(x-u)(y-v)-c(y-v)^2. \quad (7.3.26.6)$$

如果取 $k>2v_0\gamma(x_0)/(a_1a_3)$,就有 $2\omega\sigma-\dot{\omega}>2\ ka_1a_3-2v_0\cdot\gamma(x_0)>0$.

对于每一个这样的 k 值,(7.3.26.6) 右端的 $(x-u)$,$(y-v)$ 的二次型的判别式为负,只要取 $c^2(\sigma-c)^2<c[2\,ka_1a_3-2v_0\cdot\gamma(x_0)-3ca_4]$ 以及 $0<c<a_3^{1/2}$,也就是把 c 取得充分小.因为对于这样的 c 值,$\Phi\geqslant 0$,$\dot{\Phi}\leqslant 0$,从而 Φ 满足 (f) 所提出的条件,于是定理得证.

4. 关于周期解的唯一性与稳定性的一个定理

定理. 假定系统

*) 这小段为译者加的.

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad \dot{y} = g(t, x, y) \tag{7.3.1}$$

满足 §3.3 (d) 中定理的假设，且存在一个周期解，则这个周期解是唯一的，且其它的解都渐近于它.

假定 $(x(t), y(t))$ 是以 ω 为周期的周期解，根据 §3.3 (d) 的定理，其它的每一个解都渐近于它. 剩下的只要证明：如果 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 为另一个以 ω' 为周期的解，则应有 $\omega' = \omega$，$\tilde{x}(t) \equiv x(t)$，$\tilde{y}(t) \equiv y(t)$.

如果我们已经假定 (7.3.1) 满足唯一性定理条件，上述论断立即成立. 但是，即使没有这个假定，也可以得到相同的结论.

设若不然，在某个 t 有 $|x(t) - \tilde{x}(t)| = d > 0$. 现对于 $\varepsilon > 0$，存在 $m_0 > 0$，使得对所有 $m > m_0$，有 $|x(t + m\omega) - \tilde{x}(t + m\omega)| < \varepsilon$. 显然，还会有 $|x(t) - \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t + n\omega') - \tilde{x}(t + m\omega)| < \varepsilon$. 从而 $d - |\tilde{x}(t + n\omega') - \tilde{x}(t + m\omega)| < \varepsilon$. 如果 ω 与 ω' 是不可通约的，则由于存在无穷多对正整数 $m(>m_0)$，n，使得 $|\tilde{x}(t + n\omega') - \tilde{x}(t + m\omega)|$ 小于预先指定的正数，就会导出矛盾. 反过来，如果 ω 与 ω' 是可通约的，Ω 是一个公倍数，则对于任意固定的 t，任意的 $\varepsilon > 0$ 以及充分大的 m，有 $|x(t) - \tilde{x}(t)| = |x(t + m\Omega) - \tilde{x}(t + m\Omega)| < \varepsilon$，由此可知 $x(t) \equiv \tilde{x}(t)$. 定理得证.

5. 个别解的有界性准则

定理. 给定系统

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad \dot{y} = g(t, x, y), \tag{7.3.1}$$

其中 f, g 在 Δ_1: $0 \leqslant t < +\infty$, $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$ 上连续.

令 Δ_3: $|x| < k_1$, $|y| < k_2$ 及 Δ_2: $0 \leqslant t < +\infty$, $|x| \geqslant k_1$, $|y| \geqslant k_2$. 设 $\Phi(x, y, t)$ 在 Δ_2 上有定义且连续，对 (x, y) 满足局部 Lipschitz 条件，且满足下列假定：(1) $\lim\limits_{|y| \to +\infty} \Phi(x, y, t) = 0$ 关于 (t, x) 一致成立；(2) 对每一对常数 $N_1 > k_1$, $N_2 > k_2$，存在数 $G(N_1, N_2) > 0$，使得当 $0 \leqslant t < +\infty$, $k_1 \leqslant |x| \leqslant N_1$, $k_2 \leqslant$

$|y| \leqslant N_2$ 时，$\Phi(x, y, t) > C(N_1, N_2) > 0$（图 125）；(3) 在 Δ_2 的每一个内点有

$$\varliminf_{h \to 0} \{\Phi(x + hf(t,x,y), y + hg(t,x,y), t) - \Phi(x,y,t)\}/h \geqslant 0.$$

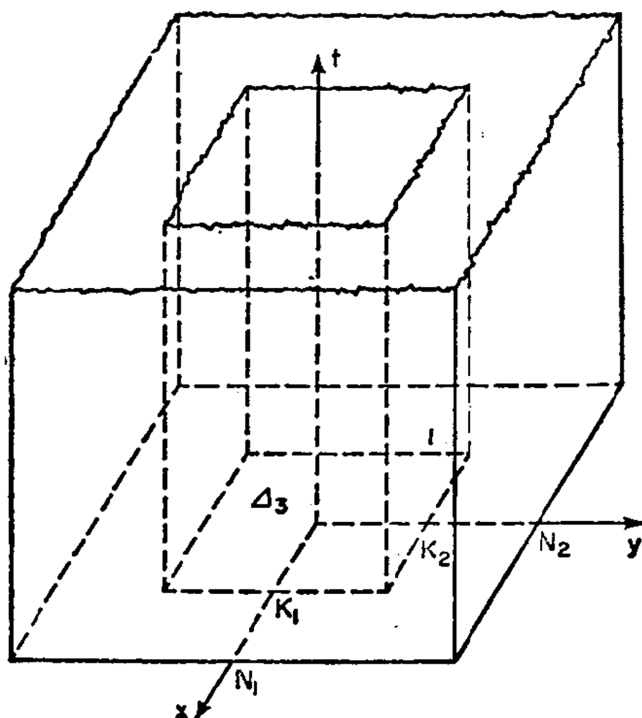


图 125

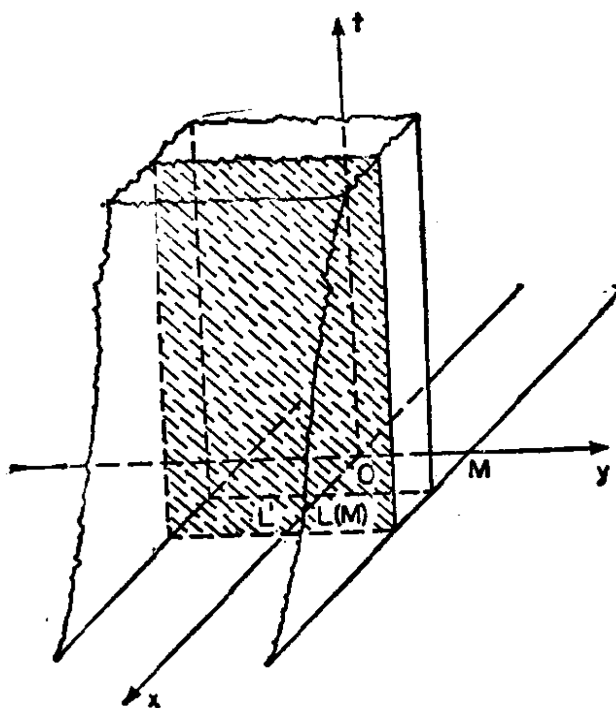


图 126

再假设对每一个常数 $M>0$，存在另一个常数 $L(M)>0$，使得存在两个正函数 $\psi_1(x,y,t)$ 及 $\psi_2(x,y,t)$，它们分别在集(图 126)

$$\Delta_4(M):\ x\geqslant L(M),\ |y|\leqslant M,\ 0\leqslant t<+\infty;$$
$$\Delta_5(M):\ x\leqslant -L(M),\ |y|\leqslant M,\ 0\leqslant t<+\infty$$

上有定义且连续，并满足下列条件：(4) 对每个 $L'>L(M)$，对应着一数 $H(L')>0$，使得

$$\psi_1(L',y,t)\geqslant H(L')>0,\ \psi_2(-L',y,t)\geqslant H(L')>0;$$

(5) 当 $|x|\to+\infty$ 时，$\lim\psi_1(x,y,t)=\lim\psi_2(x,y,t)=0$ 对 (y,t) 一致成立；(6) $\psi_1(x,y,t)$ 与 $\psi_2(x,y,t)$ 满足局部 Lipschitz 条件，而且

$$\varliminf_{h\to 0}\{\psi_i(x+hf,y+hg,t+h)-\psi_i(x,y,t)\}/h\geqslant 0,\quad (i=1,2).$$

在以上假定下，对于(7.3.1)的每个解，存在二常数 $A>0$, $B>0$，使得对于 $0\leqslant t<+\infty$，有

$$|x(t)|<A,\ |y(t)|<B. \tag{7.3.27}$$

如果 $x(t)$, $y(t)$ 为满足初始条件 $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ 的解。不失一般性，可以假定 $|x_0|<\bar{A}$, $|y_0|<\bar{B}$，此处 $\bar{A}>k_1$, $\bar{B}>k_2$.

首先，做为准备，我们证明存在常数 $M>0$，使得当 $0\leqslant t<+\infty$ 时，$|y(t)|<M$.

考虑假定 (2) 中的数 $G(\bar{A},\bar{B})$，并由假定 (1) 确定出数 $M>0$，使得

$$G(\bar{A},\bar{B})>\sup_{|x|<+\infty,\,0\leqslant t<+\infty}\Phi(x,\pm M,t), \tag{7.3.28}$$

不失一般性，还假定 $M>\bar{B}$.

我们断言 $|y(t)|<M$. 因为，否则就存在某个 t^*，使 $|y(t^*)|=M$. 运用 §3.1(b)中常见的讨论，可以看出当 $t\in(0,t^*)$ 时，$\Phi(x(t),y(t),t)$ 是 t 的非减函数，因此 $G(\bar{A},\bar{B})\leqslant\Phi(x_0,y_0,0)\leqslant\Phi(x(t^*),\pm M,t^*)$，而这与 (7.3.28) 矛盾。

剩下来证明 $x(t)$ 有界.

固定常数 $\bar{A}'$,使得 $\bar{A}' \geqslant \bar{A}$, $\bar{A}' \geqslant L(M)$,则由假定(4),有

$$\phi_1(\bar{A}', y, t) \geqslant H(\bar{A}'), \tag{7.3.29}$$

再由假定(5)确定出 $M' > \bar{A}'$, 使得

$$H(\bar{A}') > \sup_{|y|<M,\ 0\leqslant t<+\infty} \phi_1(M', y, t).$$

往证 $x(t) < M'$. 设不然,存在 t^*, 使 $x(t^*) = M'$. 由于 $x(0) < \bar{A} < \bar{A}' < M'$, 存在 $t^{**} < t^*$, 使得 $x(t^{**}) = \bar{A}'$. 和通常一样,可以看出在 (t^{**}, t^*) 内, $\phi_1(x(t), y(t), t)$ 是 t 的非减函数. 因此, $\phi_1(\bar{A}', y(t^{**}), t^{**}) \leqslant \phi_1(M', y(t^*), t^*) < H(\bar{A}')$, 这与 (7.3.29) 矛盾. 类似地,由 ϕ_2 的性质,可以证明存在常数 $-M''$, 使得 $x(t) > -M''$. 于是定理得证.

6. 由 Massera 定理推导周期解的存在性的一个准则. Mizohata 和 Yamaguti 定理

(a) 给定系统

$$\dot{x} = f(t, x, y),\quad \dot{y} = g(t, x, y), \tag{7.3.1}$$

其中 f, g 满足前段定理的假定,此外,解的唯一性定理成立. 而且存在 $\omega > 0$, 使得 $f(t+\omega, x, y) = f(t, x, y)$, $g(t+\omega, x, y) = g(t, x, y)$.

则 (7.3.1) 至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

这个定理是 §3.5 的定理和 §2.4 (b) 的 J. L. Massera 定理的直接的推论.

(b) 现在将用在 (a) 中所证明的定理来证明 S. Mizohata-M. Yamaguti 的如下的定理[1].

定理. 考虑方程式

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t), \tag{7.3.30}$$

其中 $f(x)$, $g(x)$, $p(t)$ 分别对所有实 x, t 连续,且

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds \to \pm\infty,\quad 分别当\ x \to \pm\infty\ 时, \tag{7.3.31.1}$$

$$g(x)\,\mathrm{sgn}\, x \geqslant 0,\ 当\ |x| > q\ (q\ 为正常数), \tag{7.3.31.2}$$

$$p(t+\omega)=p(t),\ (\omega>0);\ \int_0^\omega p(t)dt=0. \quad (7.3.31.3)$$

在上述假定下，(7.3.30) 至少有一个以 ω 为周期的周期解.

方程式 (7.3.30) 等价于系统

$$\dot{x}=y-F(x)+P(t),\ \dot{y}=-g(x)\left(P(t)=\int_0^t p(\tau)d\tau\right),$$

如果令

$$u=u(x,y)=G(x)+y^2/2\ \left(G(x)=\int_0^x g(s)ds\right).$$

对于充分大的 a, b, 定义函数 $\Phi(x,y,t)$ 如下:

$$\Phi(x,y,t)=\begin{cases}\exp(-u), & \text{当 } x\geqslant a,\ |y|<+\infty;\\ \exp(-u+x-a), & \text{当 } |x|\leqslant a,\ y\geqslant b;\\ \exp(-u-2a), & \text{当 } x\leqslant -a,\ y\geqslant b;\\ \exp(-u-2ay/b), & \text{当 } x\leqslant -a,\ |y|\leqslant b;\\ \exp(-u+2a), & \text{当 } x\leqslant -a,\ y\leqslant -b;\\ \exp(-u-x+a), & \text{当 } |x|\leqslant a,\ y\leqslant -b,\end{cases}$$

对于充分大的 $c>0$, 定义 ψ_1 与 ψ_2 如下:

$$\psi_1=e^{-x},\ \text{当 } x\geqslant c,$$
$$\psi_2=e^{x},\ \text{当 } x\leqslant -c.$$

易于检验，上述函数满足 (a) 中所有的假定，从而系统至少存在一个周期解.

如果 (7.3.31.1) 和 (7.3.31.3) 保留而将 (7.3.31.2) 换成较强的假定: $g(x)\operatorname{sgn} x>0$, 当 $|x|>q$, 且进一步假定当 $|x|\to+\infty$ 时, $\lim G(x)=+\infty$, 则所有的解一致有界(参看 S. Mizohata-M. Yamaguti [1], 111 页).

但是，在这种情形，也可以由 N. Levinson 定理 [1] 来证明周期解的存在.

§4. 方程 $\ddot{x}=F(x,\cos\omega t)$ 的异相调和解. F. John 定理

1. 解在整个 $(-\infty,+\infty)$ 上存在的问题

在 §1.1 中讨论强迫振荡的时候，我们考虑了方程 $\ddot{x}=-\lambda^2\cdot$

$x+F\sin\omega t$. 如果在其中用 $t+2\pi/\omega$ 代换 t，就得到形如

$$\ddot{x}=f(x)+c\cos\omega t$$

的方程.

当 $f(x)=\alpha x+\beta x^3$ 时，它就包含了 Duffing 方程.（参看 K. O. Friedrichs-J. J. Stoker, [1].）

现在我们将介绍 F. John 关于更一般的方程的结果(参看 F. John [1],[2]).

给定方程

$$\ddot{x}=F(x,\cos\omega t), \tag{7.4.1}$$

其中 $F(x,z)$ 满足如下的假定：(i) $F(x,z)$ 当 $-\infty<x<+\infty$, $-1\leqslant z\leqslant 1$ 时有定义；(ii) $F(x,z)$ 对 x 和 z 连续，F_x, F_z 存在且

$$F_x<0,\quad F_z>0; \tag{7.4.2}$$

(iii)
$$\lim_{x\to-\infty}F(x,z)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}F(x,z)=-\infty \tag{7.4.3}$$

关于 z 一致成立；

(iv) 存在常数 $C>0$，使得当 $|x|\geqslant|x_0|$, $|z|\leqslant 1$ 时，

$$|F(x,z)/x|\leqslant C, \tag{7.4.4.1}$$

或者

(iv′)
$$\lim_{|x|\to+\infty}|F_z(x,z)/F(x,z')|=0 \tag{7.4.4.2}$$

关于 z 和 z' 一致成立.

在这些假定下，(7.4.1) 的每一个解都以整个实数轴 $-\infty<t<+\infty$ 作为存在区域.

(F. John [2], 341 页，假定 $F(x,z)\in C^2$，用 $F_z>k>0$ 代替 (7.4.2) 的第二个不等式(比较 (7.4.4.1)，且设 (7.4.4.2) 成立).

对固定的 $d>0$，由 (7.4.3) 知存在 $x_0>0$，使得

$$\left.\begin{aligned}&F(x,-1)\geqslant d,\ \text{当}\ x\leqslant -x_0,\\&F(x,1)\leqslant -d,\ \text{当}\ x\geqslant x_0.\end{aligned}\right\} \tag{7.4.4}$$

在 (t,x) 平面上考虑两条与 t 轴平行且与 t 轴的距离为 x_0 的直线 r 与 r'（图 127).

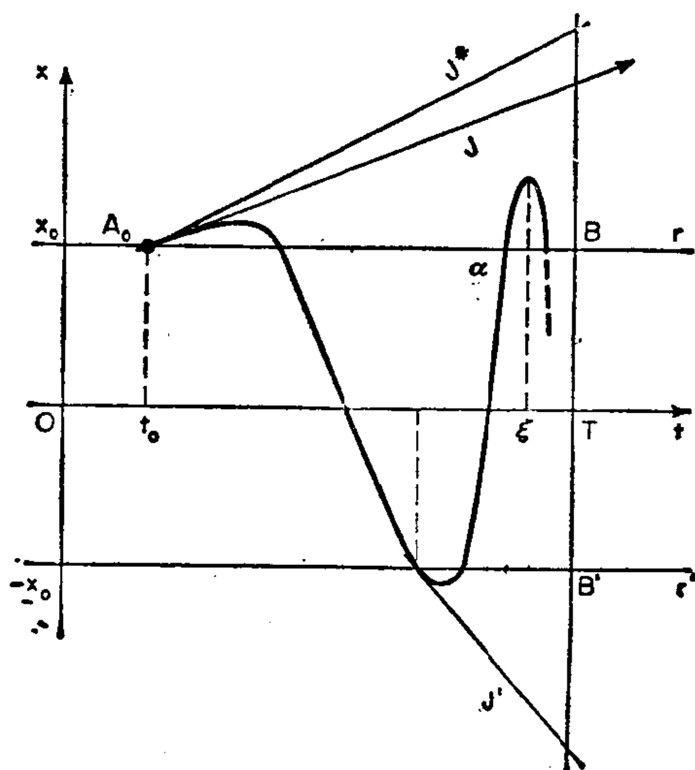


图 127

设 $x(t)$ 为 (7.4.1) 的满足初始条件 $x(t_0)=x_0$，$\dot{x}(t_0)>0$ 的解，假定定理结论不对，而 $x(t)$ 只在 $t_0\leqslant t<T<+\infty$ 上有定义．则当 $t_0\leqslant t<T$ 时，不应保持 $x(t)>x_0$．因为由 (7.4.4) 的第二个条件，积分曲线 Γ：$x=x(t)$ 将凹向下，并将整个在从 $A_0=(t_0,x_0)$ 出发而以 $\dot{x}(t_0)$ 为斜率的射线的下方，从而在 $[t_0,T)$ 上，$x(t)$ 就有界．由 (7.4.1)，$\ddot{x}(t)$ 在 $[t_0,T)$ 上也就会有界．当 $t\to T-0$ 时，$x(t)$ 与 $\dot{x}(t)$ 就会有有限极限，从而 $x(t)$ 还可以向 T 的右方进行延展．

所以，假设积分曲线 Γ 穿入直线 r 的下方．我们将证明：如果存在常数 $L>0$，使得对所有 $t_0\leqslant t<T$ 都有 $x(t)>-L$，则 $x(t)$ 还可以在 T 的右方进行延展．对于 $t_0\leqslant t<T$，有

$$\dot{x}(t)=\dot{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}F(x,\cos\omega\tau)d\tau$$

$$\leqslant\dot{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}F(-L,\cos\omega\tau)d\tau<C'\ (C'\text{ 为常数}),$$

从而 $\dot{x}(t)$ 就上方有界．于是，如果 Γ 最终不穿到 r 的上方，$x(t)$

在 $[t_0, T)$ 上就有界，且在 T 的右方可以延展. 如果 Γ 无限次与 r 相交，在交点处的斜率将小于 C'. 如果 s^* 为从 A 出发的以 C' 为斜率的射线，$x = x(t)$ 上点的纵坐标就不可能超过 s^* 上具有相同横坐标的点的纵坐标，从而 $x(t)$ 就有界.

因此，我们已经证明了当 $t \to T-0$ 时，$\underline{\lim}\, x(t) = -\infty$. 运用类似的推理可以证明当 $t \to T-0$ 时，$\overline{\lim}\, x(t) = +\infty$. 从而，$x = x(t)$ 无限次地穿过直线 r 与 r'.

由于对 Γ 与 r 或 r' 的每一个交点，在 r 或 r' 上对应着一个线段，这线段以交点为左端点，而不包含其它的交点，可以推出 $B = (T, x_0)$, $B' = (T, -x_0)$ 分别为 Γ 与 r 或 r' 的交点的聚点.

下面首先假定 (7.4.4.1) 满足. 设 α 表示 Γ 向上穿过 r 的交点的横坐标，而 ξ 表示其后的极大点的横坐标. 显然有 $x(\alpha) = x_0$. 由 (7.4.1)，有

$$\dot{x}(\alpha) = -\int_\alpha^\xi F(x(s), \cos\omega s)ds.$$

因为

$$x(\xi) = x_0 + (\xi-\alpha)\dot{x}(\alpha) + \int_\alpha^\xi (\xi - s)F(x(s), \cos\omega s)ds,$$

可知

$$0 < x(\xi) - x_0 \leqslant \int_\alpha^\xi (s-\alpha)|F(x(s), \cos\omega s)|ds,$$

从而

$$0 < x(\xi) - x_0 \leqslant |F(x(\xi), -1)|(\xi-\alpha)^2/2,$$

$$1 - \frac{x_0}{x(\xi)} \leqslant \left|\frac{F(x(\xi), -1)}{x(\xi)}\right| \frac{(\xi-\alpha)^2}{2} \leqslant C\,\frac{(\xi-\alpha)^2}{2}.$$

但是，$\overline{\lim\limits_{\xi\to T-0}}\, x(\xi) = +\infty$ 而 $\lim\limits_{\xi\to T-0} (\xi-\alpha)^2/2 = 0$，这就导致矛盾，从而 $x(t)$ 应在整个 $[t_0, +\infty)$ 上存在.

另一方面，按照 F. John 的条件，假定 (7.4.4.2) 成立，我们来证明定理. 如果令

$$g(x, z) = \int_0^x F(\xi, z)d\xi,$$

则函数 $g(x, z)$ 对 $z \in [-1, 1]$ 为单调的，且对某 $\bar{x}$，当 $|x| \geqslant \bar{x}$

时，$g(x, z)$ 为负，且绝对值为递增的．因此，当 $|x| \to +\infty$ 时，$\lim g(x, z) = -\infty$ 对于 z 一致成立．下面的极限也关于 z 一致成立：

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{g_z(x, z)}{g(x, z)} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\int_0^x F_z(\xi, z)d\xi}{\int_0^x F(\xi, z)d\xi} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{F_z(x, z)}{F(x, z)} = 0.$$

所以，如果有必要的话，我们可以增大 x_0，使得当 $|x| \geqslant x_0$ 及对所有的 z，有

$$g(x, z) < 0, \ |g_z(x, z)| < \varepsilon |g(x, z)|/[(T - t_0)\omega],$$
$$0 < \varepsilon < 1, \tag{7.4.5}$$

因为对于 $|x(t)| \geqslant x_0$ 的所有值，由 (7.4.1) 可推出

$$d[\dot{x}^2/2 - g(x, \cos \omega t)]/dt = \omega g_z(x, \cos \omega t) \sin \omega t,$$

我们有

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2(t) + |g(x(t), \cos \omega t)| = \omega \int_{t_0}^t g_z(x(s), \cos \omega s) \sin \omega s ds$$
$$+ \frac{1}{2} \dot{x}^2(t_0) - g(x(t_0), \cos \omega t_0). \tag{7.4.6}$$

当 $|x| \leqslant x_0$，$|z| \leqslant 1$ 时，函数 $g_z(x, z)$ 的绝对值小于某一常数 C''；而当 $|x(s)| \geqslant x_0$ 时，可以应用 (7.4.5) 的第二个不等式；从而，在 (7.4.6) 中如果 t 取 $x(t)$ 的最大点叙列 $\{t_n\}$，$\{t_n\}$ 如此选取，使得它为递增且收敛，还满足 $x(t_n) < x(t_{n+1})$，(即当 $n \to +\infty$ 时，$x(t_n) \to +\infty$)，我们有

$$|g(x(t_n), \cos \omega t_n)| \leqslant C''(T - t_0)\omega + \varepsilon |g(x(t_n), -1)|$$
$$+ \dot{x}^2(t_0)/2 - g(x(t_0), \cos \omega t_0),$$

所以

$$|g(x(t_n), 1)| \leqslant C''(T - t_0)\omega + \varepsilon |g(x(t_n), -1)|$$
$$+ \dot{x}^2(t_0)/2 - g(x(t_0), \cos \omega t_0)|,$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |g(x(t_n), 1)|/|g(x(t_n), -1)| \leqslant \varepsilon. \tag{7.4.7}$$

但是，由 (7.4.4.2)，我们有 $(0 < \theta < 1, 0 < \theta_1 < 1)$：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{g(x(t_n),1)}{g(x(t_n),-1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{g(x(t_{n+1}),1)-g(x(t_n),1)}{g(x(t_{n+1}),-1)-g(x(t_n),-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x(t_n)+\theta\{x(t_{n+1})-x(t_n)\},1)}{F(x(t_n)+\theta\{x(t_{n+1})-x(t_n)\},-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x(t_n)+\theta\{x(t_{n+1})-x(t_n)\},-1)}{F(x(t_n)+\theta\{x(t_{n+1})-x(t_n)\},-1)}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{2F_z(x(t_n)+\theta\{x(t_{n+1})-x(t_n)\},-1+2\theta_1)}{F(x(t_n)+\theta\{x(t_{n+1})-x(t_n)\},-1)}$$

$$=1.$$

这与 (7.4.7) 矛盾.

这样,我们已经证明了:或者在条件 (i)—(iv) 之下,或者在条件 (i),(ii),(iii),(iv) 之下,(7.4.1) 的解都以 $(t_0,+\infty)$ 为存在区间. 因为在 (7.4.1) 中用 $-t$ 换 t,方程并不改变,所以 (7.4.1) 的每一个解都在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在,于是定理得证.

2. 关于异相调和解存在的 F. John 定理

(a) 我们将把 (7.4.1) 的解 $x(t)$ 称为它的一个**异相**(**关于** $\cos\omega t$) **调和解**,如果它以 $2\pi/\omega$ 为周期,且在 $\cos\omega t$ 取最大值的点 $t=0,\pm2\pi/\omega,\pm4\pi/\omega,\cdots$ 处取最小值,而在 $\cos\omega t$ 取最小值的点 $\pm\pi/\omega,\pm3\pi/\omega,\cdots$ 处取最大值,而且再没有其它的极值点.

假定存在这样的解,值 $|x(0)|$ 称为解的**负振幅**,值 $|x(\pi/\omega)|$ 称为解的**正振幅**.

我们提出如下的问题:**给定方程** (7.4.1) **及固定的** $a>0$,**试确定是否存在** ω **的值,使** (7.4.1) **对应于** ω **的异相调和解的负振幅等于所指定的数** a.

作变量置换 $\omega t=s$,且令 $1/\omega=p$,(7.4.1) 就变成

$$d^2x/ds^2=p^2F(x(s),\cos s)\ (p>0).\qquad(7.4.8)$$

我们已经证明,前段的条件 (i)—(iv) (或者其中的 (iv) 用 (iv′) 代替) 足以保证解的唯一性及在整个实轴上存在. 在这些条件之外,假定把 (7.4.2) 的第二个不等式换成如下的较强的不等式

$$F_x > k > 0,\ k \text{ 为常数.} \tag{7.4.2.1}$$

我们立即看出，对于固定的 x，由条件 (i)，(ii)，(iii) 可知当 x 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，$\int_0^\pi F(x, \cos s)ds$ 连续地由 $+\infty$ 递减到 $-\infty$。所以，恰存在一个值 $x=\alpha$，使 $\int_0^\pi F(\alpha, \cos s)ds = 0$. 把 x 换成 $x+\alpha$，不失一般性，可以假定

$$\int_0^\pi F(0, \cos s)ds = 0, \tag{7.4.9}$$

于是，对于每个 $x \neq 0$，有

$$\operatorname{sgn}\int_0^\pi F(x, \cos s)ds = -\operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0). \tag{7.4.10}$$

(b) 现在来确定存在异相调和解的必要条件，首先，我们有

$$x'(0) = x'(\pi) = 0 \ (x' = dx/ds), \tag{7.4.11}$$

由 (7.4.8)，有

$$\int_0^\pi F(x(s), \cos s)ds = 0. \tag{7.4.9.1}$$

由 (7.4.10) 可知 $x(s)$ 不但取正值，而且还应取负值，所以

$$x(0) = -a \quad (a > 0),\ x(\pi) = b,\ b > 0. \tag{7.4.12}$$

而且有

$$x'(s) > 0,\ 0 < s < \pi. \tag{7.4.13}$$

因为，如果在某点 $\bar{s}$，$0 < \bar{s} < \pi$，有 $x'(\bar{s}) < 0$，$x(s)$ 在这点应为递减. 但总可以找到 $x(s)$ 为递增的点[*]，$x(s)$ 就会在 0 与 π 之间至少有一个最小值，而这是不可能的. 也不能有 $x'(\bar{s}) = 0$，$0 \leqslant \bar{s} < \pi$，因为，如果这样，由于 $\bar{s}$ 不是极值点，就有 $x''(\bar{s}) = 0$. 因为由 (7.4.8) 可得

$$p^{-2}d^3x/ds^3 = F_x(x(s), \cos s)x'(s) - F_z(x(s), \cos s)\sin s, \tag{7.4.14}$$

则由 (7.4.2.1) 可推出 $x'''(\bar{s}) < 0$. 于是 $x(s)$ 在 $\bar{s}$ 的左方为递减的. 正如我们已经指出的，这将推出在 0 与 π 之间存在 $x(s)$ 的极

---

[*] 这句话为译者修改的. ——译者注

值点，而这是不可能的．

(c) 立即可知，(7.4.11)，(7.4.12)，(7.4.13) 刻划了 (7.4.8) 的异相(关于 $\cos s$) 调和解(周期为 2π) 的特征．

事实上，如果令 $y(s)=x(-s)$，则有 $y''(s)=p^2F(y(s), \cos s)$，$y(0)=-a$，$y'(0)=0$，所以，由唯一性定理有 $x(-s)=x(s)$．同样，如果令 $y_1(s)=x(2\pi-s)$，则 $y_1''(s)=p^2F(y_1(s), \cos s)$，$y_1(\pi)=b$，$y_1'(\pi)=0$，于是又得到 $x(2\pi-s)=x(s)$，所以有 $x(s)=x(-s)=x(2\pi-s)$，因此，$x(s)$以 2π 为周期．

另外还有两个存在异相调和解的必要条件．因为，当 $0<s<\pi$ 时，$F(x,\cos s)<F(x,1)\leqslant F(-a,1)$．所以，由 (7.4.9.1)，有

$$F(-a,1)>0, \tag{7.4.15.1}$$

类似地，有

$$F(b,-1)<0, \tag{7.4.15.2}$$

其中 $-a<0<b$．

(d) 现在已为证明 F. John 定理做好了准备．

定理．在 (a) 中所列假设下，对每一个使(7.4.15.1)满足的数 a，对应着 p 的一个值(因为 $1/\omega=p$，所以也就对应着 ω 的一个值)，使得 (7.4.8) 的满足初值条件

$$x(0)=-a,\ x'(0)=0 \tag{7.4.16.1}$$

的解也满足条件

$$0<x'(s),\ 当\ 0<s<\pi,\ x'(\pi)=0, \tag{7.4.16.2}$$

这些条件是使 $x(t)$ 为异相调和解的充分条件．

首先证明对充分小的 p，(7.4.8) 的满足初值条件 (7.4.16.1)的解，也满足

$$x'(s)>0,\ 当\ 0<s\leqslant\pi, \tag{7.4.17}$$

于是，对于这样的 p 值，$x'(\pi)>0$．

事实上，s 的函数 $\int_0^s F(-a, \cos\tau)d\tau$ 当 $s=0$ 时等于 0，而当 $s=\pi$ 时为正．它的二阶导数等于 $-F_x(-a, \cos s)\sin s$，当 $0<s<\pi$ 时，这导数为负，所以这个函数是凸向上的函数．因此，当 $0<s<\pi$ 时，$\int_0^s F(-a, \cos\tau)d\tau>0$．

假设当 $-a-1\leqslant x\leqslant -a+1$，$0\leqslant s\leqslant \pi$ 时，$|F_x(x,\cos s)|<C$，C 为一常数．如此确定 ε，使 $0<\varepsilon<1$ 且 $\pi\varepsilon C<\int_0^s F(-a,\cos\tau)d\tau$，对于 $s\in(\delta,\pi)$，此处 δ 满足 $0<\delta<\pi$．对应于 ε，存在 $p_0>0$，使得当 $0<p\leqslant p_0$ 时，我们有 $x(s)=-a+\rho(s)$，其中当 $0\leqslant\delta\leqslant\pi$ 时，$|\rho(s)|<\varepsilon$．于是，我们有

$$x''(s)=p^2F(-a+\rho(s),\cos s)=p^2[F(-a,\cos s)$$
$$+F_x(-a+\theta(s)\rho(s),\cos s)\rho(s)],$$

其中 $0<\theta(s)<1$．所以，当 $0<p\leqslant p_0$ 及 $s\in(\delta,\pi)$，有

$$x'(s)=p^2\left[\int_0^s F(-a,\cos\tau)d\tau+\lambda(s)\pi\varepsilon C\right],$$

其中 $|\lambda(s)|\leqslant 1$．因此，在 (δ,π) 中 $x'(s)>0$．如果必要的话，我们还可以把 δ 取得更小些，使得当 $0\leqslant s\leqslant\delta$，$-a-\varepsilon\leqslant x\leqslant -a+\varepsilon$ 时，有 $F(x,\cos s)\geqslant C>0$，C 为常数．又由于 $x'(s)=p^2\int_0^s F(-a+\rho(\tau),\cos\tau)d\tau>0$，所以推出在 $(0,\delta]$ 上也有 $x'(s)>0$．

(c) 其次，我们来证明，对于充分大的 $p>0$，(7.4.8) 的由 (7.4.16.1) 所确定的解不可能当 $0<s<\pi$ 时满足条件 $x'(s)>0$．

只须证明，对于充分大的 p，如果当 $0<s<\pi$ 时，$x'(s)>0$，将有 $x'(\pi)<0$．

我们看到，在我们的假设下，由 (7.4.14)，有

$$x'''(s)<0,\quad 0<s<\pi. \tag{7.4.18}$$

取 δ，使 $0<\delta<F(-a,1)$，并确定 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，使得

$$F(x,\cos s)>\delta,\ 当\ -a-\varepsilon_1\leqslant x\leqslant -a+\varepsilon_1,\quad |s|\leqslant\varepsilon_2. \tag{7.4.19}$$

设 s_0 为沿着解 $x=x(s)$，使得 $F(x(\bar{s}),\cos\bar{s})=\delta$ 的 $\bar{s}$ 的最小值，而 s_1 为沿着同一个解，使得 $F(x(\bar{\bar{s}}),\cos\bar{\bar{s}})=0$ 的 $\bar{\bar{s}}$ 的最小值，不排除有可能 $s_1=+\infty$．可知对于所有解，有 $0<s_0<s_1\leqslant+\infty$．

由 (7.4.8) 可推出，当 $0<s<s_0$ 时，$p^2\delta<x''(s)$，所以当 $0<$

$s \leqslant s_0$ 时，$x(s) + a > p^2 s^2 \delta/2$.

取 $M>0$，使得对 $x \geqslant M$ 及所有 $z \in [-1, 1]$ 有 $F(x, z) < 0$. 由于 $p^2 s_0^2 \delta/2 - a < x(s_0)$ 及 $F(x(s_0), \cos s_0) = \delta > 0$，可知 $p^2 s_0^2 \delta/2 - a < M$，所以 $s_0 < p^{-1}[2(M + a)/\delta]^{1/2}$.

当 p^* 充分大时，对 $p \geqslant p^*$，有 $s_0 < \varepsilon_2 < \pi$，且当 $0 < s \leqslant s_0$ 时，$x''(s) = p^2 F(x(s), \cos s) < p^2 F(-a, \cos s) < p^2 F(-a, 1)$. 所以

$$x''(s) < p^2 F(-a, 1), \quad 0 < s \leqslant s_0, \tag{7.4.20}$$

因此 $0 < x(s) + a < p^2 s^2 F(-a, 1)/2$，$(0 < s \leqslant s_0)$.

由于当 $p \geqslant p^*$ 时，$F(x(s_0), \cos s_0) = \delta$，$s_0 < \varepsilon_2$，再由 (7.4.19)，不可能有 $x(s_0) + a \leqslant \varepsilon_1$. 由此可知 $\varepsilon_1 < x(s_0) + a < p^2 s_0^2 F(-a, 1)/2$，且当 $p \geqslant p^*$ 时，$s_0 > p^{-1}[2\varepsilon_1/F(-a, 1)]^{1/2}$.

当 $s_0 < s < s_1 \leqslant +\infty$ 时，有 $x''(s) > 0$，所以 $x'(s) > x'(s_0)$，$s_0 < s \leqslant s_1$. 再由关系 $M > x(s) > x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) > -a + (s - s_0)x'(s_0)$，$x'(s_0) = p^2 \int_0^{s_0} F(x(s), \cos s)ds > p^2 \delta \varepsilon_0 > p\delta [2\varepsilon_1/F(-a, 1)]^{1/2}$，当 $s = s_1$ 时，也得到 $M > -a + (s_1 - s_0)p\delta \cdot [2\varepsilon_1/F(-a, 1)]^{1/2}$. 所以，$s_1$ 有界，且

$$0 < s_1 - s_0 < (M + a)p^{-1}\delta^{-1}[F(-a, 1)/(2\varepsilon_1)]^{1/2},$$

因此，当 $p \to +\infty$ 时，s_0 和 s_1 都趋近于 0.

现在 $x''(s_1) = 0$，再由 (7.4.14) 及 (7.4.2.1) 知当 $s_1 < s < \pi$ 时，有 $x'''(s) < -p^2 k \sin s$，$x''(s) < p^2 k(\cos s - \cos s_1)$.

因此，

$$x'(\pi) < p^2 k(\sin \delta - s\cos s_1)|_{s_1}^{\pi} + x'(s_1), \tag{7.4.21}$$

又因由 (7.4.8)，有 $x''(s) < p^2 F(-a, 1)$，$x'(s_1) < p^2 s_1 F(-a, 1)$. 在 (7.4.21) 右端中略去 $-p^2 k \sin s_1$，得到 $x'(\pi) < -p^2 k(\pi - s_1) \cdot \cos s_1 + p^2 s_1 F(-a, 1)$. 由于当 $p \to +\infty$ 时，$s_1 \to 0$，这个不等式的右端当 $p \to +\infty$ 时为负，所以有 $x'(\pi) < 0$.

(f) 如果 $x(s, p)$ 表示 (7.4.8) 的对应于初值条件 (7.4.16.1) 的解，因此，我们已经证明对于充分大的 p，$x'(s, p)$ 必在 $(0, \pi)$

中至少有一个零点. 现既然对于充分小的 $p>0$, 当 s 在 $(0,\pi]$ 中时,有 $x'(s,p)>0$, 我们可以考虑这样的 p 值的上确界 p_0, 对于所有的 $p\in(0,\bar{p}_0)$, $x'(s,p)$在 $(0,\pi]$ 中都不为 0. 我们再来证明,对于解 $x(s,p_0)$, 有 $x'(\pi,p_0)=0$, 即 p_0 就是与事先指定的数 a 对应的值,使得 (7.4.8) 将有一个异相的调和解.

为此,首先,我们注意到 $x''(0,p_0)=p_0^2F(-a,1)>0$,所以,在 $s=0$ 的右方的一个区间上,有 $x'(s,p_0)>0$. $x'(s,p_0)$在 $(0,\pi)$ 上不会改变符号,因为如果那样,对于充分靠近 p_0 的小于 p_0 的 p, $x'(s,p)$ 就会在 $(0,\pi)$ 中有零点,而这不可能. 因此,在 $(0,\pi)$ 上有 $x'(s,p_0)\geqslant 0$. 但是,由 (7.4.14), $x'(s,p_0)$ 为凹向下的,所以当 $0<s<\pi$ 时, $x'(s,p_0)>0$. 从而有 $x'(\pi,p_0)\geqslant 0$.

现在, 如果 $x'(\pi,p_0)>0$, 我们在 $(0,\pi]$ 上就会有 $x'(s,p_0)>0$. 注意到, 对于 $s\in(0,\pi]$, 有 $\int_0^s F(x(\tau,p_0),\ \cos\tau)d\tau>0$,且如果对于 $p>p_0$, 令 $x(s,p)=x(s,p_0)+\sigma(x)$, 则可以重复 (d) 末了的推证方法,证明存在 $\delta>0$, 使得对于 $p\in[p_0,p_0+\delta]$ 及 $s\in[0,\pi]$, 有 $x'(s,p)>0$, 因此, p_0 就不再具有定义它时所指出的性质. 所以,最后就应有 $x'(\pi,p_0)=0$.

§5. 方程式 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=p(t)$

1. S. Lefschetz, N. Levinson, M. L. Cartwright 和 J. E. Littlewood 等人的结果

公认 S. Lefschetz [1] 在如下的假设下最先研究了方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=p(t). \tag{7.5.1}$$

设 $f(x)$ 连续; $g(x)$ 与 $g'(x)$ 连续;当 $x\to+\infty$ 时, $\lim g(x)/x=+\infty$; $p(t+\omega)=p(t)$, $\omega>0$; $p'(t)$ 连续;且补充假定存在两个两数 b 及 B, 使得 $|F(x)-bg(x)|\leqslant B|x|$, 其中 $F(x)=\int_0^x f(s)ds$. Lefschetz 应用 Brouwer 定理 (§2.1) 证明了至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

其后 N. Levinson [2] 考虑了更一般的方程

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=p(t),$$

其中 $p(t+\omega)=p(t)$，它也是应用 Brouwer 定理给出了一个充分条件，以保证存在唯一的以 ω 为周期的渐近稳定的周期解，这我们将在 §8.2 中较详细地介绍.

M. L. Cartwright 和 J. E. Littlewood (参看 M. L. Cartwright-J. E. Littlewood [1]，也可以参看 M. L. Cartwright [1]) 考察了方程式

$$\ddot{x}+kf(x,k)\dot{x}+g(x,k)=p(t,k)$$

的解的有界性，其中 k 为一参数；$f(x,k)$ 连续，且对 x 满足 Lipschitz 条件；当 $|x|\geqslant 1$ 时，$f(x,k)\geqslant b_1>0$，而对所有的 x，$f(x,k)>-b_2$；$g(x,k)$ 对 x 满足 Lipschitz 条件；当 $x\geqslant 1$ 时，$g(x,k)\operatorname{sgn}x\geqslant b_3>0$，当 $|x|\leqslant\xi$ 时，$g(x,k)\leqslant\gamma(\xi)$，其中 $\gamma(\xi)$ 与 k 无关，且对所有的 ξ 都有限；$p(t,k)$ 连续，$|p(t,k)|\leqslant p$，对所有 t_1,t_2，$\left|\int_{t_1}^{t_2}p(t,k)dt\right|\leqslant p$.

在这些假设下，存在常数 $B>0$，使得对固定的 (x_0,y_0)，存在对应于 (x_0,y_0) 的 $t_0=t_0(x_0,y_0)$，使得当 $t>t_0$ 时，满足 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=y_0$ 的解 $x(t)$，对充分大的 k，有 $|x(t)|<B$，$|\dot{x}(t)|<B(k+1)$，而当 k 充分小时，有 $|x(t)|<B$，$|\dot{x}(t)|<B$.

在 §3.6 中，我们引用了 S. Mizohata-M. Yamaguti 的一条定理，它给出了很一般的条件，足以保证 (7.5.1) 至少存在一个周期解. 在 §5.2 中，我们将介绍 A. de Castro 对于一个定理的证明，这个定理和上面所引用的 Lefschetz 与 Levinson 的定理是一个类型. 在 §5.3，§5.4，§5.5 中，将要介绍同类型方程的另外一些结果. 在 §7 中，将给出我们已经在 §3.3 (g) 中引用过的，关于方程

$$\ddot{x}+kf(x)\dot{x}+g(x)=kp(t),\ k>0$$

的 Reuter 定理.

2. N. Levinson 的一条存在性定理和一条关于渐近稳定性的定理

(a) 给定方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=p(t), \tag{7.5.1}$$

其中 $f(x)$, $y(x)$, $p(t)$ 分别对 x 与 t 在$(-\infty, \infty)$上连续，此外还假定：(i) $p(t)$ 为以 ω 为最小周期的周期函数， $p(t+\omega)=p(t)$，且对定义为

$$P(t)=\int_0^t p(s)ds, \tag{7.5.2}$$

的函数 $P(t)$，有

$$P(\omega)=\int_0^\omega p(s)ds=0, \tag{7.5.3}$$

或者，这等价于存在常数 $P>0$，使得

$$|P(t)|\leqslant P; \tag{7.5.4}$$

(ii) 如果 $f(x)>0$，且定义

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds, \tag{7.5.5}$$

则存在常数 $a>0$，使得

$$|F(\pm a)|>P+\varepsilon,\ \varepsilon>0;$$

(iii) 存在 $b>0$，使得当 $|x|\geqslant b$ 时，$xg(x)>0$，而对于所有 x，$g'(x)>0$.

在这些假定下，(7.5.1) 至少有一个以 ω 为周期的周期解.

这个定理的证明(是 A. de Castro 告知作者的)是 §2.2 (b) 中所述方法的一个应用.

不失一般性，假定 $a\geqslant b$，且考虑与 (7.5.1) 等价的如下系统

$$\dot{x}=y-F(x)+P(t),\quad \dot{y}=-g(x), \tag{7.5.6}$$

由假设，对这个系统，存在与唯一性定理成立.

和通常一样，定义

$$G(x)=\int_0^x g(s)ds, \tag{7.5.7}$$

且令 c 为如此的常数，使得

$$c>2|F(\pm a)|+2a\varepsilon^{-1}|g(\pm a)|. \tag{7.5.8}$$

在 xy 平面上构造一条闭曲线 Γ，它由下列弧段所组成(图 128).

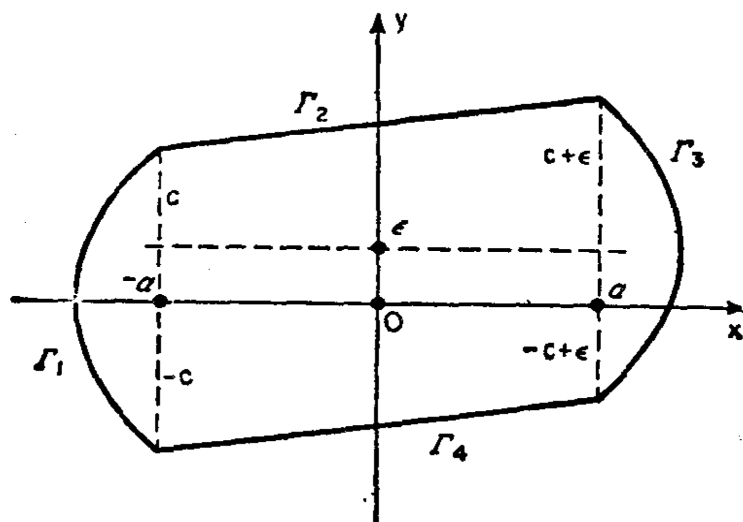


图 128

Γ_1: $y^2/2 + G(x) = c^2/2 + G(-a)$, 当 $x \leqslant -a$;

Γ_2: $y - \varepsilon(x+a)/(2a) = c$, 当 $-a \leqslant x \leqslant a$, $(y > 0)$;

Γ_3: $(y-\varepsilon)^2/2 + G(x) = c^2/2 + G(a)$, 当 $x \geqslant a$;

Γ_4: $y - \varepsilon(x+a)/(2a) = -c$, 当 $-a \leqslant x \leqslant a$, $(y < 0)$.

弧 Γ_1 和 Γ_3 分别对直线 $y = 0$ 及 $y = \varepsilon$ 对称，而线段 Γ_2 与 Γ_4 彼此平行,且把 Γ_4 沿 y 的正向平移 2ε，就得到了 Γ_2.

对任意的 $\bar{t}$，设 C 为 (7.5.6) 的过点 $(\bar{t}, x, y)$ 的积分曲线,其中 $(x, y) \in \Gamma_1$，而 $x < -a$. C 也用以表示由方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 所表示的平面曲线.

因为

$$y\dot{y} + g(x)\dot{x} = -yg(x) + g(x)[y - F(x) + P(t)]$$
$$= -g(x)[F(x) - P(t)] < 0, \qquad (7.5.9)$$

而 Γ_1 在任意点的斜率等于 $-g(x)/y$，可以推出 C 必与 Γ_1 相交. 我们来证明,当 t 增加时，C 进入 Γ.

首先,我们看到,由(7.5.6)的第二个方程可知 $\dot{y} > 0$，因此,如果 $y > 0$，则由(7.5.9)可知 $g(x)\dot{x} < 0$，从而 $\dot{x} > 0$，再由(7.5.9)，就有 $0 < \dot{y}/\dot{x} < -g(x)/y$，于是,当 t 增加时，C 进入 Γ. 这个事实当 $y < 0$, $\dot{x} \geqslant 0$ 时也是对的，因为这时有 $\dot{y}/\dot{x} > 0 > -g(x)/y$；当 $y < 0$, $\dot{x} < 0$ 时,由(7.5.9)可知 $\dot{y}/\dot{x} < -g(x)/y < 0$，也可

断定C穿入Γ. 如果$y=0$,则由于$\dot{x}>0$, $\dot{y}>0$, 也得到相同的结论.

现在假定C过Γ_3的一点(x, y), 其中$x>a$; 则$(y-\varepsilon)\dot{y}+g(x)\dot{x}=-g(x)(y-\varepsilon)+g(x)[y-F(x)+P(t)]=-g(x)[F(x)-P(t)-\varepsilon]<0$, 注意到$\Gamma_3$上任一点的斜率等于$-g(x)/(y-\varepsilon)$, 并考虑$y\gtreqless\varepsilon$的三种情形,仍然会得到$C$穿入$\Gamma$.

在Γ_2上的点, C的斜率为$\dot{y}/\dot{x}=-g(x)/[y-F(x)+P(t)]$. 因为$\dot{x}=y-F(x)+P(t)=c+\varepsilon(x+a)/(2a)-F(x)+P(t)>c-|F(\pm a)|-P>0$, 如果$\dot{y}\leqslant 0$, 可知当$t$增加时$C$进入$\Gamma$, 而当$\dot{y}>0$时, 由于$0<\dot{y}/\dot{x}\leqslant|g(\pm a)|/[c-|F(\pm a)|-P]<\varepsilon/(2a)$, 可以得出相同的结论.

对于Γ_4(Γ_4平行于Γ_2)上的点, 有$\dot{x}=-c+\varepsilon(x+a)/(2a)-F(x)+P(t)<-c+\varepsilon+|F(\pm a)|+P$. 因为$c\geqslant 2|F(\pm a)|>|F(\pm a)|+P+\varepsilon$, 所以可知$\dot{x}<0$. 因此,如果$\dot{y}\geqslant 0$, C就穿入Γ. 如果$\dot{y}<0$, 则有$0<\dot{y}/\dot{x}<|g(\pm a)|/(c-2|F(\pm a)|)<\varepsilon/(2a)$, 也得出相同的结论.

用相同的方法可以证明: 当C过Γ的四个顶点$(-a, \pm c)$, $(a, \pm c+\varepsilon)$时,当t增加时,C也穿入Γ.

现在,应用 Brouwer 不动点定理,即可证得 de Castro 定理.

上述论证也证明了: (7.5.6)的任意解C: $x=x(t)$, $y=y(t)$都是正向有界的. 因为, 只要增加a和c,就可以得到闭路Γ, 它能把任意事先指定的c上的点$(x(t_0), y(t_0))$包含在其内部,从而也就包含了C上对应于$t\geqslant t_0$的所有的点.

(b) 在$g(x)=x$的特殊情形,我们依据 N. Levinson [3] 的方法来证明下面的结果:

给定方程式

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=p(t), \tag{7.5.10}$$

如果$f(x)$与$g(x)$满足(a)中的条件(i)及(ii),则它存在唯一的以ω为周期的周期解,且所有其它的解都渐近于它; 换句话说, 在(a)中已证明其存在的周期解,在(7.5.10)的情形是唯一的; 而

且是全局渐近稳定的.

为了证明这个结果，我们首先注意到，如果 $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$ 为系统

$$\dot{x} = y - F(x) + P(t),\quad \dot{y} = -x \tag{7.5.11}$$

的两个不同的解,且定义一个非负函数 $D(t)$ 如下

$$D(t) = [(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2]^{1/2},$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{D} &= [(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)]/D \\ &= -(x_2 - x_1)[F(x_2) - F(x_1)]/D,\end{aligned}$$

由此可知 $\dot{D} \leqslant 0$. 当 $x_2(t) \neq x_1(t)$ 时,有 $\dot{D} < 0$. 故当 t 增加时, $D(t)$ 减少.

现设 $x = \bar{x}(t)$ 为(7.5.10)的最小周期为 ω_1 的周期解. 则由于我们排除了 $p(t)$ 为常数的情形, $\omega = l\omega_1$, 其中 l 为正整数. $\bar{x}(t)$ 对应着(7.5.11)的解 $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$. 假定定理的结论不对, 则存在解 $(x_0(t), y_0(t))$, 它在 $t \to +\infty$ 时不趋近于$(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$.

如果 $D_0(t)$ 表示点 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 和 $(x_0(t), y_0(t))$ 之间的欧氏距离,就有

$$\lim_{t\to+\infty} D_0(t) = A > 0. \tag{7.5.12}$$

如果 $D_n(t)$ 表示点 $(x_0(t + n\omega_1), \ y_0(t + n\omega_1))$ $(n = 1, 2, \cdots)$与 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 之间的距离,则由 $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ 的周期性,有 $D_n(t) = D_0(t + n\omega_1)$, 从而

$$\lim_{n\to+\infty} D_n(t) = A. \tag{7.5.13}$$

如果 $P_n = (x_0(n\omega_1), \ y_0(n\omega_1))$, $\bar{P} = (\bar{x}(0), \bar{y}(0))$, 则点列 $\{P_n\}$至少有一个极限点 Q, 由(7.5.13),有 $|Q\bar{P}| = A$.

现设 $x(t)$, $y(t)$ 为 $t = 0$ 时过点 Q 的解. 则当 $t \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}A \geqslant D(t) &= [(\bar{x}(t) - x(t))^2 + (\bar{y}(t) - y(t))^2]^{1/2} \\ &\geqslant D_n(t) - [(x_0(t+n\omega_1) - x(t))^2 + (y_0(t+n\omega_1) - y(t))^2]^{1/2}.\end{aligned} \tag{7.5.13$'$}$$

于是看出 $x_0(t + n\omega_1)$, $y_0(t + n\omega_1)$ 与在 $t = 0$ 时过 P_n 的解重合.

对固定 t, 根据解对初值的连续相依性, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在

$n_0 > 0$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，$[x_0(t+n\omega_1)-x_0(t))^2+(y_0(t+n\omega_1)-y_0(t))^2]^{1/2} < \varepsilon$，所以，由(7.5.13)和(7.5.13)′可知对所有的 t 有 $D(t)=A$，即 $D(t)$ 是常数．所以 $\bar{x}(t)=x(t)$，从而也有 $\bar{y}(t)=y(t)$．由此可知 $A=0$．但是我们已假定 $A>0$．矛盾．于是定理得证．

3. 方程 $\ddot{x}+g(x)=p(t)$，$p(t)$ 为偶函数．G. R. Morris 定理

(a) 给定方程式

$$\ddot{x}+g(x)=p(t), \tag{7.5.14}$$

其中 $g(x)$，$p(t)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，$g(x)$ 满足 Lipschitz 条件；$p(t)$ 以 $\omega>0$ 为周期；$p(t)$ 为偶函数，$p(-t)=p(t)$．则满足条件 $\dot{x}(0)=0$ 的解 $x(t)$ 具有周期 $m\omega$，m 为整数的充分且必要条件为 $\dot{x}(m\omega/2)=0$．

首先证明如果 $u(t)$ 为(7.5.14)的满足 $\dot{u}(k\omega/2)=0$ 的解，k 为整数，则有 $u(t)=u(k\omega-t)$．为此令 $v(t)=u(k\omega-t)$．于是有

$$\begin{aligned}\ddot{v}(t)+g(v(t))&=\ddot{u}(k\omega-t)+g(u(k\omega-t))\\&=p(k\omega-t)=p(t),\end{aligned} \tag{7.5.15}$$

所以 $v(t)$ 是(7.5.14)的解．现 $v(k\omega/2)=u(k\omega/2)$，$\dot{v}(k\omega/2)=-\dot{u}(k\omega/2)=0=\dot{u}(k\omega/2)$，因此，由唯一性定理有 $u(t)=v(t)$，即 $u(k\omega-t)=u(t)$．

由此立即可知问题中的条件是必要的．事实上，如果 $x(t)$ 是以 $m\omega$ 为周期的满足 $\dot{x}(0)=0$ 的解，则由(7.5.15)，$x(-t)$ 也是一个解，且由条件 $\dot{x}(0)=0$ 可知 $x(-t)=x(t)=x(m\omega+t)$，所以 $-\dot{x}(-t)=\dot{x}(m\omega+t)$，因此，当 $t=-m\omega/2$ 时，$-\dot{x}(m\omega/2)=\dot{x}(m\omega/2)=0$．

反过来，如果 $\dot{x}(m\omega/2)=0$，由上述分析，取 $k=m$，就得到 $x(t)=x(-t)=x(m\omega+t)$．

(b) G. R. Morris [1] 证明了如下的定理，它讨论了(7.5.14)的一个特殊情形：

给定方程式

$$\ddot{x} + 2x^3 = p(t), \tag{7.5.16}$$

其中 $p(t)$ 为以 ω 为周期的偶函数,则对于正整数 m,(7.5.16)有无穷多个以 $m\omega$ 为最小周期的解.

4. 奇周期调和解. 关于具强迫项的 Duffing 方程的 W.S. Loud 定理

(a) 如果函数 $p(t)$ 以 $\omega > 0$ 为周期,且具有性质 $p(t + \omega/2) = -p(t)$,则称为以 ω 为周期的奇周期函数.

关于这样的函数,有如下的性质:

给定方程式

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t),$$

其中 f, g, p 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, $g(x)$ 满足 Lipschitz 条件, $p(t)$ 为周期为 ω 的奇周期函数,则当存在以 ω 为周期的调和解 $x_0(t)$ 时, $x_0(t)$ 必为奇调和函数,即 $x_0(t + \omega/2) = -x_0(t)$.

如果令 $y_0(t) = -x_0(t + \omega/2)$, 则 $y_0(t)$ 以 ω 为周期, 且 $\ddot{y}_0(t) + f(y_0)\dot{y}_0 + g(y_0) = -p(t + \omega/2) = p(t)$, 由解的唯一性即知 $x_0(t) = y_0(t) = -x_0(t + \omega/2)$.

(b) 我们介绍 W. S. Loud [1] 的如下的定理而不加证明.

给定 Duffing 方程

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + \beta x^3 = p(t),$$

其中 c, β 为正常数,$p(t)$ 为连续的以 ω 为周期的奇周期函数, $\max|p(t)| = 1$, $c^2 > 48A\beta$, $A = \min[1 + 4/c, 1 + 4/c^2, \beta^{-1/3} + 4/c^2]$, 则存在唯一的调和解 $x_0(t)$, 且它是奇调和的.

(c) 我们在这里要提及关于 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t)$ 的两个特殊情形的结果,其中 $p(-t) = -p(t)$. T. Shimizu ([1], 93 页)证明了: 如果 $c \geqslant 0, d > 0$, 且 c, d 及 ε 都充分小, 则方程 $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + cx + dx^3 = e\sin 2\pi t/\omega$, $\omega > 0$, 具有周期为 $h\omega$ 的周期解, $h = 1, 3, \cdots, 2n + 1, \cdots$.

T. Manacorda [2] 研究了方程式 $\ddot{x}+[\Gamma^2-B^2(1+x^2)^{-1/2}]x=p(t)$，其中 B，Γ 为常数，$0<B^2<\Gamma^2\leqslant 1/4$，$p(t)$ 连续，且为以 2π 为周期的奇周期函数．他用逐次逼近法证明了这个方程有唯一的以 2π 为周期的调和解．

5. 关于方程式 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+\lambda^2x=F\sin\omega t$ $(\lambda>0,\omega>0,F>0)$的周期解的 D. Graffi 不等式

方程式

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+\lambda^2x=F\sin\omega t, \qquad (7.5.17)$$

$$(\lambda,\ F,\ \omega \text{ 均为正常数})$$

当 $f(x)=2\varepsilon$ 时变成在 §1.2 所考虑过的线性强迫振荡．

假定 $f(x)$ 满足足以保证至少存在一个以 $T=2\pi/\omega$ 为周期的调和解 $x(t)$ 的条件，例如 $f(x)$ 连续，$\int_0^x f(s)ds\to\pm\infty$，当 $x\to\pm\infty$．(S. Mizohata-M. Yamaguti 定理，§3.7 (b))．我们将介绍 D. Graffi 的几个关于 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 的不等式．

用 $x(t)$ 乘(7.5.17)，并用到

$$\int_0^T \ddot{x}x dt=-\int_0^T \dot{x}^2dt,\quad \int_0^T f(x)x\dot{x}dt=0,\quad (T=2\pi/\omega)$$

就得到

$$-\lambda^2\int_0^T x^2dt+\int_0^T \dot{x}^2dt=-F\int_0^T x(t)\sin\omega t dt. \qquad (7.5.18)$$

将(7.5.17)由 0 到 T 积分，就得到 $\int_0^T x dt=0$．于是，如果将 $x(t)$，$\dot{x}(t)$ 展开成 Fourier 级数(关于这个展开的合理性，请参看 G. Sansone [1]，§3.4，第 52 页)，有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t],$$

$$\dot{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n\omega[b_n\cos n\omega t-a_n\sin \omega t],$$

此处

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x\cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x\sin n\omega t dt.$$

由 Bessel 恒等式(见 G. Sansone [1], §2.4, 第 47 页),有

$$\int_0^T x^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \tag{7.5.19.1}$$

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\omega^2(a_n^2 + b_n^2). \tag{7.5.19.2}$$

设 $\omega > \lambda$, 就有

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt - \lambda^2\int_0^T x^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2\omega^2 - \lambda^2)(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\geqslant \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\omega^2 - \lambda^2)(a_n^2 + b_n^2) = (\omega^2 - \lambda^2)\int_0^T x^2 dt,$$

由(7.5.18),根据 Schwarz 不等式 (G. Sansone [1], 第一章 §2.2, 第 4 页),有

$$(\omega^2 - \lambda^2)\int_0^T x^2 dt \leqslant F\left|\int_0^T x(t)\sin \omega t dt\right|$$

$$\leqslant F\left[\int_0^T x^2(t)dt\right]^{1/2}(T/2)^{1/2},$$

于是

$$\int_0^T x^2 dt \leqslant \frac{F^2 T}{2(\omega^2 - \lambda^2)^2} \quad (T = 2\pi/\omega). \tag{7.5.20.1}$$

我们还有

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt - \lambda^2\int_0^T x^2 dt$$

$$\geqslant \frac{T}{2}(\omega^2 - \lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega^2 - \lambda^2}{\omega^2}\int_0^T \dot{x}^2 dt,$$

从而

$$\frac{\omega^2 - \lambda^2}{\omega^2}\int_0^T \dot{x}^2 dt \leqslant F\left[\int_0^T x^2 dt\right]^{1/2}(T/2)^{1/2},$$

由(7.5.20.1),有

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt \leqslant \frac{\omega^2 F^2 T}{2(\omega^2 - \lambda^2)^2} \quad (T = 2\pi/\omega). \tag{7.5.20.2}$$

由(7.5.19.2),(7.5.20.2),有 $Tn^2\omega^2(a_n^2+b_n^2)\leqslant\omega^2F^2T/(\omega^2-\lambda^2)^2$,所以 $x(t)$ 的 Fourier 级数展开式的 n 阶调和项的振幅满足

$$(a_n^2+b_n^2)^{1/2}\leqslant\frac{F}{n(\omega^2-\lambda^2)}(n=1,2,\cdots).\quad(7.5.20.3)$$

不等式(7.5.20.1),(7.5.20.2),(7.5.20.3)就是 Graffi 不等式.

§6. 方程式 $\ddot{x}+F(\dot{x})+x=p(t)$

1. R. Caccioppoli, A. Ghizzetti 和 A. Ascari 关于周期解的存在性、唯一性与稳定性的准则

(a) A. Signorini 在研究舶波中推导出如下的方程式

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+x=p(t).\quad(7.6.1)$$

如果 $F(\dot{x})$ 和 $p(t)$ 分别对各自的自变量可微,则根据第六章 §6.1 中的方法,可以把(7.6.1)化成在 §5 中研究过的方程之一.

然而,我们放弃了关于可微性的假设,而在较弱的条件下来证明一个存在性、唯一性和稳定性的定理.

这个定理是 R. Caccioppoli 和 A. Ghizzetti (参看 R. Caccioppoli-A. Ghizzetti [1])的贡献,他们在 1940 年最先提出了关于这一类方程的拓扑方法. 他们证明了:在 $F(\dot{x})$ 是连续可微的递增函数,而 $p(t)$ 是以 ω 为周期的周期函数的情形,由正向有界解的存在性,可推知存在以 ω 为周期的周期解,且其它所有的解都渐近于这个解.

如果 $F(\dot{x})$ 和 $p(t)$ 满足相同的条件,除了 $F(\dot{x})$ 的连续可微性由条件,当 $|\dot{x}|\to+\infty$ 时,$\overline{\lim}\,F(\dot{x})/\dot{x}>0$ 代替,则可以证明(7.6.1)存在正向有界的解,因此也就存在以 ω 为周期的周期解,并且其它所有的解都渐近于它.

我们将以更为一般的形式介绍这个定理,它是由 A. Ascari [1] 给出的.

定理. 给定方程(7.6.1),其中 $p(t)$ 连续,以 $\omega>0$ 为周期,且

$$|p(t)|\leqslant M,\ -\infty<t<+\infty,\quad(7.6.2)$$

又 $F(y)$ 连续，满足局部的 Lipschitz 条件，且

$$\varliminf_{y\to+\infty} F(y) > M,\quad \varlimsup_{y\to-\infty} F(y) < -M, \qquad (7.6.3)$$

则方程（7.6.1）至少有一个以 ω 为周期的周期解，而且每一个解 $x(t)$ 及其导数 $\dot{x}(t)$ 都正向一致有界.

方程(7.6.1)等价于系统

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x - F(y) + p(t). \qquad (7.6.4)$$

首先证明可以做出一个闭曲线 Γ，使得(7.6.4)的过 Γ 上的点的每一条积分曲线，在 x,y 平面上的投影 C 当 t 增加时都穿入 Γ. 正如以前多次看到的，由此即可推出至少存在一个周期为 ω 的周期解.

作为准备，我们注意到，如果 $M_0=(x_0,y_0)$是一个固定点，而 $P=(x,y)$ 是(7.6.4)的积分曲线的投影 C 上的动点，以 ρ 表示向量 $\overrightarrow{M_0P}$ 的模，则 $\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. 从而 $\dot{\rho}=\rho^{-1}[(x-x_0)\dot{x}+(y-y_0)\dot{y}]$. 如果 γ 表示以 M_0 为中心，ρ 为半径的圆，则 C 在 P 点的切线的指向(按 t 增加的方向)，将根据 $(x-x_0)\dot{x}+(y-y_0)\dot{y}>0$，$=0$ 或 <0，而指向 γ 的外部，与 γ 相切或者指向 γ 的内部.

取 $h>0$，使得当 $y\to+\infty$ 时，$\varliminf F(y)>M+h$，而当 $y\to-\infty$ 时，$\varlimsup F(y)<-M-h$. 又取 $A>0$，使得

$$F(y)>M+h,\quad 当\ y\geqslant A, \qquad (7.6.5)$$

$$F(y)<-M-h,\ 当\ y\leqslant -A, \qquad (7.6.6)$$

且

$$|F(y)|<L,\ 当\ |y|\leqslant A, \qquad (7.6.7)$$

$$R_0=[A^2+(L+M+h+A^2/h)^2]^{1/2}. \qquad (7.6.8)$$

考虑直线 $r: y=A$; $s: y=-A$，以及分别在半径为 $R\geqslant R_0$ 的圆 $(x+h)^2+y^2=R^2$，$(x-h)^2+y^2=R^2$ 上的弧 $\Gamma_1=\widehat{DE}$，$\Gamma_3=\widehat{GH}$，这些弧分别属于半平面 $y\geqslant A$ 与 $y\leqslant A$，其中

$$D=(-h-(R^2-A^2)^{1/2},A);\ E=(-h+(R^2-A^2)^{1/2},A);$$

$$G=(h+(R^2-A^2)^{1/2},-A);\ H=(h-(R^2-A^2)^{1/2},-A).$$

(图 129)而线段 $\overline{EG}=\Gamma_2$ 和 $\overline{HD}=\Gamma_4$ 彼此平行,其斜率为 $-A/h$。

我们来证明闭曲线 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4$ 具有所要求的性质.

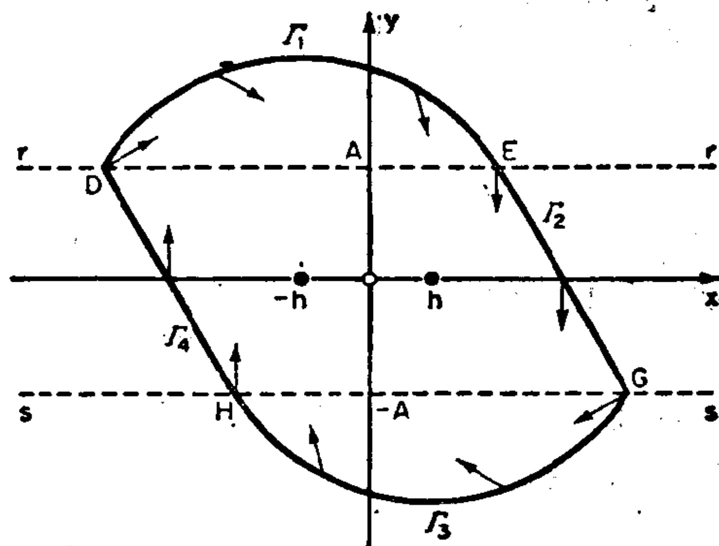


图 129

在弧 $\widehat{DE}=\Gamma_1$ 上,由(7.6.5)有:$(x+h)\dot{x}+y\dot{y}=y[h-F(y)+p(t)]\leqslant y[h+M-F(y)]<0$,在弧 $\widehat{GH}=\Gamma_3$ 上,由(7.6.6)有:

$$(x-h)\dot{x}+y\dot{y}=y[-h-F(y)+p(t)]$$
$$=|y|[h+F(y)-p(t)]\leqslant|y|[M+h+F(y)]<0. \quad (7.6.9)$$

根据上述分析,其投影经过 Γ_1 或 Γ_3 的点的积分曲线具有所要求的性质.

线段 $\overline{EG}$ 和 $\overline{HD}$ 也可以证明具有所要求的性质,所以整个 Γ 就有问题所要求的性质.

对于 R 的每一个值,就可以做出一个上述类型的闭曲线,记为 $\Gamma(R)$. 当 $R\to+\infty$ 时,$\Gamma(R)$ 在各个方向都趋于无限远. 这就表明,其投影 C 在 t_0 时从 $\Gamma(R_0)$ 之外的任意点 P 出发的(7.6.4)的任意解 $x(t)$, $y(t)$ 都是正向有界的. 因此,如果我们能证明曲线 C: $x=x(t)$, $y=y(t)$ 有 $\Gamma(R_0)$ 内部的点,则解的一致有界性,从而整个定理就将成立.

这可以由下面的考虑加以证明．对于在 $\Gamma(R_0)$ 之外的 C 上每一点 $(x(t), y(t))$，对应着 R 的一个值，记为 $R(t)$，根据前面的讨论，当 $t\to+\infty$ 时，它是 t 的非增函数．如果 C 上没有 $\Gamma(R_0)$ 内的点，则当 $t\to+\infty$ 时，就会有 $\lim R(t)=\bar{R}_0\geqslant R_0$，$C$ 上的点 $P_n=(x(t_0+n\omega), y(t_0+n\omega))$，$n=0, 1, \cdots$，全部在 $\Gamma(\bar{R}_0)$ 之外，它们至少有一个属于 $\Gamma(\bar{R}_0)$ 的极限点，不失一般性，假定当 $n\to+\infty$ 时，$\lim P_n=P_0$．

设满足初始条件 $x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$ 的解的投影为曲线 C_0，则当 t 增加时，C_0 将穿入 $\Gamma(\bar{R}_0)$ 并一直保持在它的内部．

所以，由于在 t_0 时过 P_n 的(7.6.4)的解与 $(x(t), y(t))$ 重合，根据对初值的连续性，它应该有 $\Gamma(\bar{R}_0)$ 内部的点．而这却导致矛盾．

(b) 我们还有下面的定理，只加以叙述而不予以证明（参看 A. Ascari [1]，第 285—287 页）．

定理．如果在上述定理的假设之外，还假设 $F(y)$ 在 $(-A, A)$ 上为递增函数，其中 A 为 (a) 中所定义的常数，则 (7.6.4) 恰有一个周期为 ω 的周期解，而所有其它的解，当 $t\to+\infty$ 时都渐近于它，即这个周期解为全局渐近稳定的．

2. 关于绳索力学的一个微分方程．J. Cecconi 和 F. Stoppelli 的结果

(a) 再一次考虑在第六章 §7 中提到过的 G. Krall 方程：

$$\ddot{x}+|\dot{x}|\dot{x}-q\dot{x}+x-p^2x^3=r\sin\omega t, \qquad (7.6.10)$$

其中 p, q, r, ω 为常数，$p>0$，$r>0$，$\omega>0$．

在 $q<0$ 的假设下，J. Cecconi [1] 证明了：对于充分小的 p 和 r 的值，(7.6.10)至少有一个周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解．

其后，F. Stoppelli [1] 考察了更一般的方程

$$\ddot{x}+|\dot{x}|\dot{x}+q(t)\dot{x}+x-p^2(t)x^3=f(t), \qquad (7.6.11)$$

他利用泛函分析的方法证明了如下的定理．

定理．如果 $p(t)$，$q(t)$，$f(t)$ 为周期为 ω 的连续周期函数，且

$p^2(t) > 0$，则(7.6.11)至少有一个周期为 ω 的周期解.

我们在这里只给出证明的一个简要提纲.

为了证明这个定理，只须证明(7.6.11)至少有一个解满足条件

$$x(0) = x(\omega),\quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega). \tag{7.6.12}$$

因为关于这些条件，方程

$$\ddot{x} - x = g(t) \tag{7.6.13}$$

的 Green 函数(参看 G. Sansone [2]，第五章，§3.2)是

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \cosh(t-\tau+\omega/2)/(2\sinh(\omega/2)), & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \cosh(t-\tau-\omega/2)/(2\sinh(\omega/2)), & \text{当 } \tau < t \leqslant \omega, \end{cases}$$

而(7.6.13)的满足(7.6.12)的解由

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,\tau)g(\tau)d\tau$$

给出，为了证明定理，只须证明方程

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,\tau)[f(\tau) + p^2(\tau)x^3(\tau) - 2x(\tau) - |\dot{x}(\tau)|\dot{x}(\tau) - q(\tau)\dot{x}(\tau)]d\tau \tag{7.6.14}$$

有解.

这相当于要证明：在满足 (7.6.12) 的函数 $x(t) \in C^1(t \in (0,\omega))$ 的空间 Σ 中，把 $x(t)$ 映射到同一空间的 $y(t)$ 的泛函变换

$$T:\ y(t) = \int_0^\omega G(t,\tau)[f(\tau) + p^2(\tau)x^3(\tau) - 2x(\tau) - |\dot{x}(\tau)|\dot{x}(\tau) - q(\tau)\dot{x}(\tau)]d\tau, \tag{7.6.15}$$

至少有一个不动点，即至少有一个 $x(t)$ 映射到自身.

如果用 α 表示有序数组 (f, p, q)，则 (7.6.15) 也可以写成

$$y = F(x,\alpha), \tag{7.6.16}$$

而问题变成要证明存在元素 x，使得

$$x = F(x,\alpha). \tag{7.6.17}$$

如果在 Σ 中引进 x 的模 $\|x\| = \max|x| + \max|\dot{x}|$，并把 α 看成空间 Σ_0 的一个元素，在 Σ_0 中 $\|\alpha\| = \max|f| + \max|p| + \max|q|$，则根据 T. Leray-J. Schauder [1] 的方法，可以证明所考虑的变换 T 是全连续的，连续依赖于 α，且存在元素 α_0，对于它，(7.6.17)

有奇数个解，同时还可以证明 T 满足足以保证(7.6.16)存在不动点的其它条件(参看 C. Miranda [2]).

§7. 关于方程式 $\ddot{x}+kf(x)\dot{x}+g(x)=kp(t)$ 和 $\ddot{x}+kF(\dot{x})+g(x)=kp(t)$ 的 G. E. H. Reuter 定理

1. 方程 $\ddot{x}+kf(x)\dot{x}+g(x)=kp(t)$

(a) 在研究方程

$$\ddot{x}+kf(x)\dot{x}+g(x)=kp(t),$$
$$\ddot{x}+kF(\dot{x})+g(x)=kp(t)$$

的时候，如果 f, F, g, p 满足某些性质，这些性质在力学中有明显的物理意义，则可以导出一些保证解正向有界的充分条件，这种有界性还与参数 k 无关.

这类定理见于在 §5.1 中所引用过的 M. Cartwright-J. E. Littlewood 的论文中，也见于 M. A. H. Newman 和 G. E. H. Reuter 的论文中.

(b) 已经在 §3.3 (g) 中引用的 G. E. H. Reuter 的第一个定理是关于方程

$$\ddot{x}+kf(x)\dot{x}+g(x)=kp(t) \tag{7.7.1}$$

的，其中假定 f, g, p, k 满足下列条件：(i) $f(x)$, $g(x)$ 当 $|x|<+\infty$ 时有定义且连续；(ii) $p(t)$ 在任意有限区间上可积分；(iii) k 为正常数；(iv) $g(x)$ 在每一个有限区间上满足 Lipschitz 条件.

我们定义

$$P(t)=\int_0^t p(\tau)d\tau. \tag{7.7.2}$$

我们说 $x(t)$ 是(7.7.1)的解，如果 $x(t)$ 在每一个使 $\dot{P}(t)=p(t)$的点都满足方程(7.7.1).

定义

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds. \tag{7.7.3}$$

于是(7.7.1)等价于系统

$$\dot{x} = y + kP(t) - kF(x), \quad \dot{y} = -g(x). \tag{7.7.4}$$

根据条件 (i)—(iv)，对于(7.7.4)，存在与唯一性定理成立。

Reuter 定理现可以叙述如下：

定理. 如果在上述定理的条件 (i)—(iv) 之外，还假定：(v) 当 $t \geqslant 0$ 时 $P(t)$ 有界；(vi) 当 $x \to +\infty$ 时，$\lim F(x) = +\infty$；当 $x \to -\infty$时，$\lim F(x) = -\infty$；(vii) 当 $|x| \geqslant x_0$时，$xg(x) > 0$；当 $|x| \to +\infty$ 时，$G(x) = \int_0^x g(s)ds \to +\infty$，则对于任意的 t_0, x_0, y_0，由初值条件

$$x(t_0) = x_0, \ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \tag{7.7.5}$$

所确定的(7.7.1)的解的存在区间都是 $(t_0, +\infty)$，且存在依赖于 f, g, p 而与 k 无关的常数 B，使得(7.7.1)的每一个解 $x(t)$，当 t 充分大时，满足不等式

$$|x(t)| < B, \ |\dot{x}(t)| < B(k+1). \tag{7.7.6}$$

为了证明这个定理，只须证明系统 (7.7.4) 的解有性质 $|x(t)| < B, |y(t)| < B(k+1)$. 因为，由 (7.7.4) 的第一个方程和 $x(t)$ 为有界这一事实，可以推出

$$\begin{aligned} |\dot{x}| &< |y| + k(|P(t)| + |F(x)|) \\ &< B(k+1) + B'k < B''(k+1). \end{aligned}$$

(c) 我们可将 Reuter 的证明步骤简述如下。

设

$$|P(t)| \leqslant A_1, \tag{7.7.7}$$

并选取横坐标 $x_1 > x_0$ (图130)，使得

$$F(x) \operatorname{sgn} x > A_1, \ xg(x) > 0, \ \text{当} \ |x| \geqslant x_1. \tag{7.7.8}$$

设

$$|F(x)| < A_2, \ |g(x)| < A_3, \ \text{当} \ |x| \leqslant x_1, \tag{7.7.9}$$

及

$$A_4 = (A_3 + 1)(A_1 + A_2). \tag{7.7.10}$$

由 (vi), (vii)，存在 $x_2 \geqslant x_1$，使得

$$F(x) \operatorname{sgn} x > A_1 + A_4, \ G(\pm x_2) \geqslant x_1, \ \text{当} \ |x| > x_2 \geqslant x_1. \tag{7.7.11}$$

设

$$A_5 = 2(A_3 + 1)x_1 + 2\max[G(x_2),\ G(-x_1)] + (x_1/A_4)^2 + 1. \tag{7.7.12}$$

$$当\ k \geqslant 1\ 时, a = 1;\ 当\ 0 < k \leqslant 1\ 时, a = k, \tag{7.7.13}$$

$$b = kA_4, \tag{7.7.14}$$

且设 y_0 如下:

$$当\ k \geqslant 1\ 时,\ y_0^2 = b + A_5,\ 当\ 0 < k \leqslant 1\ 时,\ y_0^2 = A_4^2 + A_5, \tag{7.7.15}$$

图 130

因此对任意 $k > 0$, 都有 $y_0^2 \geqslant b^2 + A_5$.

如果定义

$$u = u(x,y) = y^2/2 + G(x), \tag{7.7.16}$$

沿(7.7.4)的任意解,有

$$\dot{u} = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = kg(x)[P(t) - F(x)],$$

于是,由(7.7.7),(7.7.8),有

$$\dot{u} < 0,\ 当\ |x| \geqslant x_1. \tag{7.7.17}$$

(d) 考虑位于带形 $0 \leqslant x \leqslant x_1$ 内,而一个端点为 $P_0 = (0, y_0)$ 的弧

$$\Gamma_1: \ u - ax = y_0^2/2, \tag{7.7.18}$$

它在 $P_1 = (x_1, y_1)$ 穿过直线 $x = x_1$, 其中

$$y_1^2 = y_0^2 - 2G(x_1) + 2ax_1(>b^2). \tag{7.7.19}$$

于是弧

$$\Gamma_2: \ y^2/2 + G(x) = y_0^2/2 + ax_1 \tag{7.7.20}$$

位于直线 $y = b$ 的上方，且在点 $P_2 = (x_2, y_2)$ 穿过直线 $x = x_2$, 其中

$$y_2^2 = y_0^2 + 2ax_2 - 2G(x_2). \tag{7.7.21}$$

设 Γ_3 为过点 P_2 而位于半平面 $x \geqslant x_2$ 的方程为

$$\Gamma_3: \ u - by = u(x_2, y_2) - by_2 \tag{7.7.22}$$

的弧. 当 x 增加时，y 减少. Γ_3 在 $P_3 = (x_3, b)$ 与直线 $y = b$ 相交,满足

$$G(x_3) = G(x_2) + (y_2 - b)^2/2. \tag{7.7.23}$$

Γ_3 分为关于直线 $y = b$ 对称的两个弧 $\widehat{P_2P_3}$ 与 $\widehat{P_3P_4}$. 若 $P_4 = (x_2, y_4)$, 由对称性可知

$$y_4 = 2b - y_2. \tag{7.7.24}$$

设 $P_7 = (0, -y_0)$ 且考虑过 P_7 的曲线 $u + ax = y_0^2/2$, 它第一次交直线 $x = x_1$ 于 $P_6 = (x_1, y_6)$, 其中

$$y_6 = -(y_0^2 - 2ax_1 - 2G(x_1))^{1/2}. \tag{7.7.25}$$

过 P_6 的弧 $u = y_0^2/2 + G(x_1)$ 第一次交直线 $x = x_2$ 于点 $P_5 = (x_2, y_5)$, 可以证明

$$y_5 < y_4. \tag{7.7.26}$$

把线段 $\overline{P_5P_4}$ 记为 Γ_4. 并且在半平面 $x \leqslant 0$ 中，由 $P_0' = P_7$ 开始,在(7.7.4)中把 x, y 换成 $-x$, $-y$, 得到一个新的系统,对于这个系统考虑分别与 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_6$ 相对应的弧 $\Gamma_1', \cdots, \Gamma_6'$.

弧的组合 $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_6 + \Gamma_1' + \cdots + \Gamma_6'$ 是一条闭曲线,它具有这样的性质：如果任意解 $x(t)$, $y(t)$ 在某时刻 $\bar{t}$ 与 Γ 相交,则当 $t > \bar{t}$ 时,它就将进入 Γ 的内部,这就完成了定理的证明.

(e) 利用 M. L. Cartwright 和 J. E. Littlewood [1]的结果,可以建立如下的定理:

定理. 如果在 Reuter 定理的条件中，把 (vi) 换成假设 (vi)′: 在$(-\infty,+\infty)$上 $f(x)>0$, $p(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界，则存在与 k 无关的常数 B，使得(7.7.1)的每一个解当 t 充分大时都满足

$$|x(t)|<B, \quad |\dot{x}(t)|<B.$$

(f) M. H. A. Newman ([1], 定理 3)证明了: 如果在(7.7.1)中 $f(x)$ 对所有 x 连续；当 $|x|\geqslant a_0$ 时 $f(x)\geqslant 2h>0$; $g(x)$ 对所有 x 连续; 当 $|x|\geqslant a_0$ 时, $xg(x)>0$; 当 $|x|\to+\infty$ 时, $|g(x)|\to+\infty$; 且在 $(0,+\infty)$ 上 $p(x)$, $P(t)$ 有界; $k\geqslant 1$, 则存在与 k 无关的常数 B, 使得每一个解 $x(t)$, 当 t 充分大时, 有性质 $|x(t)|<B$, $|\dot{x}(t)|<Bk$. 对于 $a_0=0$ 的情形，存在 B, 对于充分大的 t, $|x(t)|<B$, $|\dot{x}(t)|<B$.

这个结果的证明的基本思想是拿 (7.7.1) 和方程 $\ddot{x}+h\dot{x}+g(x)=0$ 比较.

2. 方程 $\ddot{x}+kF(\dot{x})+g(x)=kp(t)$

Reuter 运用与 §7.1 (a) 相类似的论证方法，证明了如下的定理(参看 G. E. H. Reuter [3]):

定理. 给定方程

$$\ddot{x}+kF(\dot{x})+g(x)=kp(t), \tag{7.7.27}$$

其中: (i) 在每个有限区间上, $g(x)$ 连续且满足 Lipschitz 条件，当$|x|\to+\infty$时, $g(x)\operatorname{sgn} x\to+\infty$; (ii) $F(y)$ 连续，且当 $|y|\to+\infty$时, $F(y)\operatorname{sgn} y\to+\infty$; (iii) $p(t)$ 连续且有界; (iv) $0<k\leqslant 1$.

在这些条件下，存在与 k 无关的两个常数 B_1, B_2, 使得对于(7.7.27) 的每一个解，都存在一个 t_0, 使对于所有的 $t\geqslant t_0$, 有 $|x(t)|<B_1$, $|\dot{x}(t)|<B_2$.

§ 8. 方程 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=p(t)$

1. H. A. Antosiewicz 关于解的正向有界性的准则

H. A. Antosiewicz [1] 所建立的两个定理推广了 G. Sestini [1] 的结果. 我们来证明这两个定理, 其中头一个定理接着被 P. Santoro [1] 推广了.

(a) 定理. 给定方程

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=p(t), \tag{7.8.1}$$

其中 $f(x,\dot{x})$, $g(x)$ 对其变量的所有实数值都有定义, 且关于这些变量满足局部的 Lipschitz 条件; 又 $f(x,\dot{x})$ 与 $g(x)$ 还满足条件:

$$f(x,\dot{x})\geqslant 0,\ 当\ |x|<+\infty,\ |\dot{x}|<+\infty, \tag{7.8.2}$$

$$G(x)=\int_0^x g(s)ds>0,\ 当\ x\neq 0;\quad \lim_{|x|\to+\infty} G(x)=+\infty, \tag{7.8.3}$$

设 $p(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续; 且令

$$P(t)=\int_0^t |p(t)|dt, \tag{7.8.4.1}$$

而

$$|P(t)|\leqslant M<+\infty. \tag{7.8.4.2}$$

在这些假定下, (7.8.1) 的每一个解 $x(t)$ 和它的导数 $\dot{x}(t)$ 都正向有界.

方程(7.8.1)等价于系统

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-f(x,y)y-g(x)+p(t), \tag{7.8.5}$$

而所列条件足以保证解的存在性与唯一性. 为了证明这个定理, 只须证明沿着每个解, 函数

$$u=u(x,y)=y^2/2+G(x) \tag{7.8.6}$$

有界. 事实上, 我们有

$$\dot{u}=y[-f(x,y)y+p(t)]\leqslant|y|\,|p(t)|,$$

$$d\sqrt{u}/dt\leqslant|p(t)|[|y|(y^2/2+G(x))^{-1/2}/2]\leqslant 2^{-1/2}|p(t)|,$$

从而沿着从 (x_0,y_0) 出发的解, 有

$$\sqrt{u(x,y)} \leqslant \sqrt{u(x_0,y_0)} + 2^{-\frac{1}{2}}M. \tag{7.8.7}$$

(b) 如果 $f(x,\dot{x}) = f_1(x) + f_2(x)\dot{x}$，其中 $f_2(x)$ 不恒为零，则(7.8.2)不成立．然而，在这个情形有如下的定理：

定理．给定方程

$$\ddot{x} + [f_1(x) + f_2(x)\dot{x}]\dot{x} + g(x) = p(t), \tag{7.8.8}$$

其中 f_1, f_2, g 对 x 的所有实数值都有定义，且满足局部的 Lipschitz 条件．令

$$a(x) = \exp\left(\int_0^x f_2(s)ds\right),\ b(x) = \int_0^x a(s)f_1(s)ds, \tag{7.8.8.1}$$

且假定

$$a(x) \leqslant A < +\infty,\ \text{当}\ |x| < +\infty, \tag{7.8.9}$$

$$b(x)g(x) \geqslant 0, \tag{7.8.10}$$

$$G^*(x) = \int_0^x a^2(s)g(s)ds > 0,\ \text{当}\ x \neq 0. \tag{7.8.11}$$

还假定 $p(t)$ 连续，且由(7.8.4.1)所定义的 $P(t)$ 满足(7.8.4.2).

在这些条件下，(7.8.8)的任意解 $x(t)$ 及其导数 $\dot{x}(t)$ 都正向有界．

由(7.8.8.1)，方程(7.8.8)等价于系统

$$\dot{x} = [y - b(x)]/a(x),\ \dot{y} = -a(x)[g(x) - p(t)].$$

如果类似于(7.8.6)那样定义 $u(x,y) = y^2/2 + G^*(x)$，则沿系统的解，有 $\dot{u} = a(x)p(t)y - a(x)b(x)g(x)$. 而由(7.8.9)和(7.8.10)，可以推出

$$\sqrt{u(x,y)} \leqslant \sqrt{u(x_0,y_0)} + 2^{-1/2}AM.$$

注意到，如果 $f_2(x) \equiv 0$，则 $a(x) \equiv 1$，$b(x) = \int_0^x f_1(s)ds$，我们就得出方程

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = p(t)$$

的解的有界性的准则，它是 §7.1 (a) 的 Reuter 方程的一个特殊情形．

2. N. Levinson 和 C.E. Langenhop 关于周期解的存在性的准则

(a) 我们在 §5.1 中提到过的 N. Levinson 定理如下：

定理. 给定方程

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = p(t), \tag{7.8.1}$$

假如下列条件满足：(i) 对 $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$, $f(x, y)$ 和 $g(x)$ 连续；$g(x)$ 可微而 $f(x, y)$ 有一阶偏导数；(ii) $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y) > m > 0, \text{ 当 } |x| > a, \ |y| > a, \ (a > 0), \tag{7.8.12}$$

$$f(x,y) > -M (M > 0), \text{ 当 } |x| \leqslant a, |y| < +\infty, \tag{7.8.13}$$

(iii) $g(x)$ 满足

$$xg(x) > 0, \text{ 当 } |x| > a, \tag{7.8.14.1}$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} |g(x)| = +\infty; \tag{7.8.14.2}$$

(iv) 令

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds, \tag{7.8.15}$$

并设

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)/G(x) = 0; \tag{7.8.16}$$

(v) $p(t)$ 连续且以 $\omega > 0$ 为周期.

在这些假定下，(7.8.1) 至少有一个以 ω 为周期的周期解.

方程(7.8.1)等价于系统

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -f(x, y)y - g(x) + p(t), \tag{7.8.5}$$

证明定理的方法是作一个闭曲线 Γ，使得，只要系统(7.8.5)的解在 x, y 平面上的投影 C: $x = x(t)$, $y = y(t)$ 在 $t = t_0$ 时过 Γ 上的一点，则当 $t > t_0$ 时，C 就完全被包含在 Γ 之内.

和通常一样，考虑函数

$$u(x, y) = y^2/2 + G(x), \tag{7.8.17}$$

于是沿 C 有

$$\dot{u} = -f(x, y)y^2 - p(t)y. \tag{7.8.18}$$

令

$$p = \max_{0 \leqslant t < +\infty} |p(t)|. \tag{7.8.19}$$

如果必要，可增大 a，使得

$$ma > 2p. \tag{7.8.20}$$

其次，确定 $x_0 > a$，使得当 $|x| \geqslant x_0$ 时，有

$$\left.\begin{aligned} g(x) &> 2(Ma+p), \quad (x \geqslant x_0) \\ g(x) &< -2(Ma+p), \quad (x \leqslant -x_0) \end{aligned}\right\} \tag{7.8.21.1}$$

$$|g(x)| > 2mM^{-1}(\max_{|x|\leqslant a} |g(x)| + p), \tag{7.8.21.2}$$

$$G(x) > 16aMm^{-1}g(x), (|x| \geqslant x_0), \tag{7.8.21.3}$$

$$G(x) > 16aMp/m + 64a^2M^2 + 4a^2 + 8a^3M + 2G(a). \tag{7.8.21.4}$$

考虑曲线(图 131)

$$y = -[g(x) + p]/m, \quad (x \geqslant x_0). \tag{7.8.22}$$

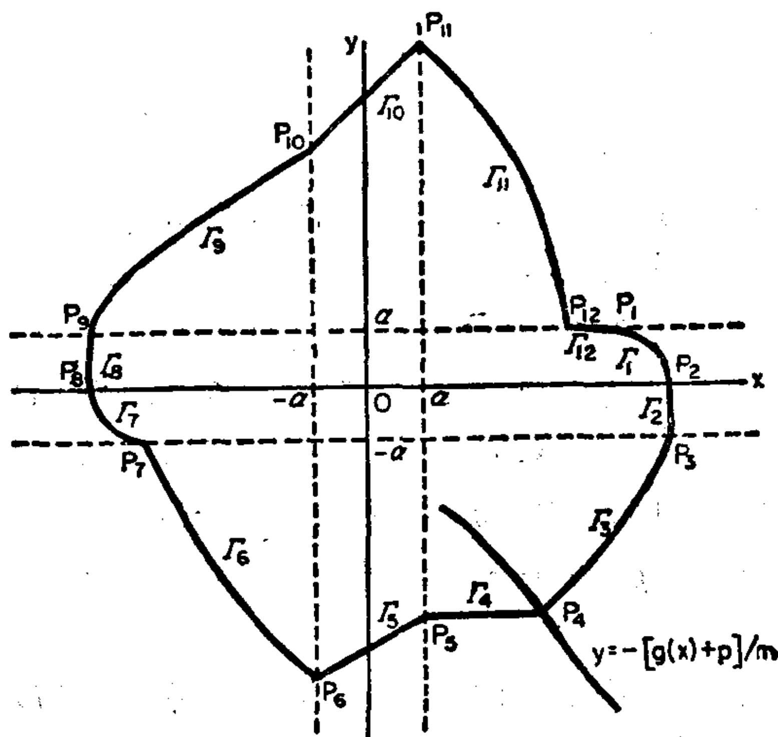


图 131

这曲线位于第四象限，且当 $x \to +\infty$ 时，$y \to -\infty$. 在曲线上取一点 $P_4 = (x_4, y_4)$，使得 $x_4 \geqslant x_0$，且

$$y_4^2 = [g(x_4) + p]^2/m^2 > 3a^2. \tag{7.8.23}$$

考虑曲线

$$u(x, y) = u(x_4, y_4)(x \geqslant x_4, \ y < 0) \tag{7.8.24}$$

上由 P_4 出发的弧 Γ_3，并延长至它与 $y = -a$ 的交点 $P_3 = (x_3, -a)$，则

$$a^2/2 + G(x_3) = y_4^2/2 + G(x_4). \qquad (7.8.25)$$

由(7.8.18)和(7.8.12)，有 $\dot{u} < -my^2 + p|y| = -my^2[1 - p/(m|y|)]$. 因为 $|y| \geqslant a$，由(7.8.20)也有 $\dot{u} < -my^2[1 - p/(ma)] < -my^2/2 < 0$. 从而，由开弧 P_3P_4 上一点出发的曲线 C，当 t 增加时将在这个开弧的上方.

现设 $P_2 = (x_3, 0)$，而 Γ_2 为以 P_2 和 P_3 为端点的线段. 于是，在开线段 $\overline{P_2P_3}$ 上的点，有 $\dot{x} < 0$，从而过 $\overline{P_2P_3}$ 上的点的曲线 C，当 t 增加时由右方穿向左方.

在第一象限中考虑曲线 $y^2/2 + G(x) - (Ma + p)x = G(x_3) - (Ma + p)x_3$. 它经过点 P_2，且由于 $x \geqslant x_4$ 时，$d[G(x) - (Ma + p)x]/dx = g(x) - (Ma + p) > 0$，所以当 x 由 x_3 减小到 x_4 时，y 增加. 只要指出 $G(x_3) - (Ma + p)(x_3 - x_4) - G(x_4) > a^2/2$，就易于验证当 $x = x_4$ 时，$y > a$. 但由(7.8.21.1)，$G(x_3) - G(x_4) > 2(x_3 - x_4)(Ma + p)$，所以，只要证明 $[G(x_3) - G(x_4)]/2 > a^2/2$ 就够了，或者，由(7.8.25)，只要证明 $y_4^2 - a^2 > 2a^2$ 就行了. 而这是(7.8.23)的一个推论. 于是，可取 Γ_1 如图 131.

Γ_1 在任何一点的斜率为 $dy/dx = [-g(x) + Ma + p]/y$，而 C 在过 Γ_1 的点时的斜率为 $dy/dx = [-f(x, y)y - g(x) + p(t)]/y < [Ma - g(x) + p]/y$，所以，当 t 增加时，C 从 Γ_1 的右方穿入左方.

我们已经作出了所要求的闭曲线的一部分 $P_1P_2P_3P_4$. 其余部分，Levinson 的作法如下.

Γ_4 为与 x 轴平行的线段 $\overline{P_4P_5}$，其一个端点为 P_4，另一个端点为 $P_5 = (a, y_4)$；Γ_5 为方程为 $y = 2M(x - a) + y_4$ 的线段，其一个端点为 $P_6 = (-a, y_6)$；弧 $\Gamma_6 = \widehat{P_6P_7}$ 在第三象限，其方程为 $y^2/2 + G(x) = y_6^2/2 + G(-a)$，一个端点在 P_6，另一个端点在 $P_7 = (x_7, -a)$.

$\Gamma_7 = \widehat{P_7P_8}$ 的方程为 $y^2/2 + G(x) + (Ma + p)x = a^2/2 + G(x_7) + (Ma+p)x_7$，它在第三象限，一个端点为 P_7，另一个为 $P_8 = (x_8, 0)$. $\Gamma_8 = \overline{P_8P_9}$ 为平行于 y 轴的线段，一个端点在 P_8，另一个

在 $P_9=(x_8, a)$；$\Gamma_9=\widehat{P_9P_{10}}$ 是方程为 $y^2/2+G(x)=a^2/2+G(x_8)$ 的曲线的一段弧，在第二象限，一个端点在 P_9，而另一个在 $P_{10}=(-a, y_{10})$；$\Gamma_{10}=\overline{P_{10}P_{11}}$ 是方程为 $y=2M(x+a)+y_{10}$ 的线段，一个端点为 P_{10}，而另一个端点在 $P_{11}=(a, y_{11})$；$\Gamma_{11}=\widehat{P_{11}P_{12}}$ 是方程为 $y^2/2+G(x)=y_{11}^2/2+G(a)$ 的曲线在第一象限中的一段弧，一个端点在 P_{11}，而另一个为 $P_{12}=(x_{12}, a)$.

Levinson 证明了：如果 x_4 充分大，则 $x_{12}<x_1$，而由线段 $\Gamma_{12}=\overline{P_{12}P_1}$ 封口的闭曲线 $\Gamma=\Gamma_1+\cdots+\Gamma_{12}$ 就具有如下的性质：过 Γ 上的点(包括顶点 P_1，……，P_{12} 在内)的曲线 C，当 t 增加时，完全在 Γ 的内部.

(b) C.E.Langenhop [1] 把 Levinson 的方法稍加改进，证明了：**如果条件**(7.8.16) **代以** $\overline{\lim_{x\to+\infty}}\dfrac{g(x)}{x}=+\infty$，**则方程**(7.8.1)**至少有一周期为** ω **的解**(也可参看 Z. Opial [4]).

(c) 关于周期解存在的其它条件，见本章的补充.

§9. 具有次调和解的非线性系统

1. 次调和解

(a) 我们在 §1 中已指出，在线性情形有所谓存在次调和解的现象. 这种现象在非线性情形也会出现. 关于它的一些特殊情形，例如可参看 L. Minozzi[1]，他作出了具有事先指定个数的次调和解的 Liénard 方程. 也可参看 A. Rosenblatt [1]，[2] 和 A. M. Kats [1].

考虑 Liénard 型方程

$$\ddot{x}+\alpha f(x)\dot{x}+\omega^2x=-2\omega\sin(4n+3)\omega t,$$

其中 α 与 ω 为常数，$\omega>0$，$n=0, 1, 2, \cdots$，且

$$f(x)=\binom{4n+3}{1}^{*}x^{4n+2}-\binom{4n+3}{3}x^{4n}(1-x^2)+\cdots$$

* 组合数. ——译者注

$$+\binom{4n+3}{5}x^{4n-2}(1-x^2)^2-\cdots-\binom{4n+3}{4n+3}(1-x^2)^{2n+1}.$$

方程等价于系统

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\alpha f(x)y-\omega^2 x-\alpha\omega\sin(4n+3)\omega t.$$

右端对 t 具有周期 $2\pi/[(4n+3)\omega]$，而系统有 $2n+3$ 个次调和解：

$$x=\cos\omega(t+2l\pi/[(4n+3)\omega]),$$
$$y=-\omega\sin\omega(t+2l\pi/[(4n+3)\omega]),$$
$$(l=0,1,\cdots,2n+2),$$

它们全以 $2\pi/\omega$ 为周期.

(b) 关于系统

$$\dot{x}=f(t,x,y),\ \dot{y}=g(t,x,y)$$

的次调和解的个数，N. Levinson [1] 提出了一个定理. 此处假定系统右端为关于 t 的最小周期为 ω 的周期函数. 这类定理也见于 J. L. Massera [1], [2] 的论文中. 在 §9.2 和 §9.3 做了一些必要的准备之后，我们将在 §9.4 中介绍两个这种类型的定理.

2. *D* 类系统

给定

$$\dot{x}=f(t,x,y),\ \dot{y}=g(t,x,y), \tag{7.9.1}$$

其中 f 和 g 当 $|t|<+\infty$, $|x|<+\infty$, $|y|<+\infty$ 时有定义，对 t, x, y 连续，对 x 和 y 有连续的偏导数，而对于 t，是以 1 为最小周期的周期函数，即

$$f(t+1,x,y)=f(t,x,y),\ g(t+1,x,y)=g(t,x,y). \tag{7.9.2}$$

按照 N. Levinson 和 J. L. Massera 的说法，把系统(7.9.1)称为*D*类系统(或者称为对于大位移的耗散系统)，如果在 x, y 平面上存在一个以 O 为圆心，$R>0$ 为半径的圆域，以及整数 $N>0$，它们具有如下的性质：若 $x(t)$, $y(t)$为系统(7.9.2)的任意解，它在 x, y 平面上的投影有 C 内的点，且若存在时刻 t_0 使得 $(x(t_0),y(t_0))\in$

C时，对于所有 $t>t_0+N$，都有 $(x(t),\ y(t))\in C$.

3. D 类系统的变换的不动点的分类

(a) 若 $(x_0,\ y_0)$ 为 $x,\ y$ 平面的任意一点，而 $x=x(t,\ x_0,\ y_0)$，$y=y(t,\ x_0,\ y_0)$ 为(7.9.1)的由初值条件 $x(0,\ x_0,\ y_0)=x_0$，$y(0,\ x_0,\ y_0)=y_0$ 所确定的解，我们考虑 $x,\ y$ 平面到其自身的变换，它把 $(x_0,\ y_0)$ 映射到 $(x_1,\ y_1)$，此处 $x_1=x(1,\ x_0,\ y_0)$，$y_1=y(1,\ x_0,\ y_0)$.

变换 T 作用在 C 的点上，有这样的性质：当 $n>N$时，$T^nC\subseteq C$. 由此可知(参看 §2.2, §2.3)C 至少存在一个不动点，相应地，(7.9.1)也就至少存在一个以 1 为周期的解.

(b) 现在，我们将对变换 T 的不动点进行分类.

设 $(x_0,\ y_0)$ 为 x,y 平面内的一点，它在变换 T 之下的像为$(x_1,\ y_1)$，设 $(x_0,\ y_0)$ 的面积为 I_0 (Peano-Jordan 意义下的) 的邻域对应着 $(x_1,\ y_1)$ 的面积为 I_1 的邻域. 在分析中已熟知，当 $I_0\to 0$ 时，比值 I_1/I_0 的极限值为雅可比 (Jacobi) 行列式:

$$\Delta(t)=\det\begin{pmatrix}\partial x/\partial x_0 & \partial x/\partial y_0\\ \partial y/\partial x_0 & \partial y/\partial y_0\end{pmatrix}$$

当 $t=1$ 时的值.

对于系统(7.9.1)，我们有(参看第一章，§3.5 (b))$\dot{\Delta}(t)=(\partial f/\partial x+\partial g/\partial y)\cdot\Delta(t)$. 因为 $\Delta(0)=1$，可知

$$\frac{d(x_1,y_1)}{d(x_0,y_0)}=\det\begin{pmatrix}\partial x_1/\partial x_0 & \partial x_1/\partial y_0\\ \partial y_1/\partial x_0 & \partial y_1/\partial y_0\end{pmatrix}$$

$$=\exp\left(\int_0^1[f_x(t,\ x(t),\ y(t))+g_y(t,\ x(t),y(t))]dt\right).\quad(7.9.3)$$

设 $(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$ 是这样的点，使得(7.9.1)的由初值条件 $\tilde{x}(0)=\tilde{x}_0$，$\tilde{y}(0)=\tilde{y}_0$ 所确定的解 $x=\tilde{x}(t)$，$y=\tilde{y}(t)$ 以 1 为周期，即

$$\tilde{x}(1)=\tilde{x}(0),\ \tilde{y}(1)=\tilde{y}(0).\quad(7.9.4)$$

换句话说，$(\tilde{x}(0),\ \tilde{y}(0))$ 是 T 的一个不动点.

如果用 $(\tilde{x}(0)+u_1,\ \tilde{y}(0)+v_1)$ 表示在 T 的作用下 $(\tilde{x}(0)+u_0,\ \tilde{y}(0)+v_0)$ 的像，我们希望用 $u_0,\ v_0$ 把 $u_1,\ v_1$ 表示出来.

如果 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 是 (7.9.1) 的由初值条件 $x(0)=\tilde{x}(0)+u_0$, $y(0)=\tilde{y}(0)+v_0$ 所确定的解，则根据 $x(t)$, $y(t)$ 对于 u_0 和 v_0 的连续性和可微性，有

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=\tilde{x}(t)+c_{1,0}(t)u_0+c_{0,1}(t)v_0+O(|u_0|+|v_0|),\\ y(t)&=\tilde{y}(t)+c_{2,0}(t)u_0+c_{0,2}(t)v_0+O(|u_0|+|v_0|).\end{aligned}\right\}\quad(7.9.5)$$

由于 $x(1)=\tilde{x}(0)+u_1$, $y(1)=\tilde{y}(0)+v_1$, 在(7.9.5)中令 $t=1$, 再由(7.9.4)，可以推出

$$\left.\begin{aligned} u_1&=au_0+bv_0+O(|u_0|+|v_0|),\\ v_1&=cu_0+dv_0+O(|u_0|+|v_0|),\end{aligned}\right\}\quad(7.9.6)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a&=\partial u_1/\partial u_0|_{t=1},\quad b=\partial u_1/\partial v_0|_{t=1},\\ c&=\partial v_1/\partial u_0|_{t=1},\quad d=\partial v_1/\partial v_0|_{t=1}.\end{aligned}\right\}\quad(7.9.7)$$

但是，$x_1=\tilde{x}(0)+u_1$, $y_1=\tilde{y}(0)+v_1$, 所以，由(7.9.6)和(7.9.3)可知

$$\begin{aligned}\frac{d(x_1,y_1)}{d(x_0,y_0)}&=\frac{d(u_1,v_1)}{d(u_0,v_0)}=ad-bc\\ &=\exp\left(\int_0^1[f_x(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))+g_y(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))]dt\right),\end{aligned}$$

从而 $ad-bc\neq0$.

如果 ρ_1 和 ρ_2 是方程

$$\begin{vmatrix} a-\rho & b\\ c & d-\rho\end{vmatrix}=\rho^2-(a+d)\rho+(ad-bc)=0$$

的两根，我们有 $\rho_1\rho_2>0$. 我们假定所讨论的是**简单情形**，即方程没有模为 1 的根，否则就需要更为广泛的检验(参看 T.Levi Civita [1]).

对于简单情形，有下列可能性：(i) $|\rho_1|<1$, $|\rho_2|<1$; (ii) $|\rho_1|>1$, $|\rho_2|>1$; (iii) $\rho_1>1>\rho_2>0$; (iv) $\rho_2<-1<\rho_1<0$.

在情形 (i), 不动点 $(\tilde{x}(0),\tilde{y}(0))$ 的面积 I_0 充分小的每一个邻域都映射成围绕同一个点其面积为 $\rho_1\rho_2I_0<I_0$ 的区域. 如果对 u_0, v_0 作仿射变换，则当 ρ_1 和 ρ_2 为实数时，系统 (7.9.6) 可以写成

（参看第二章 §1）

$$u_1 = \rho_1 u_0 + O(|u_0| + |v_0|),\quad v_1 = \rho_2 v_0 + O(|u_0| + |v_0|),$$

而当 $\rho_1 = r + is$ 与$\rho_2 = r - is$ 为共轭复数（$0 < r^2 + s^2 < 1$）时，(7.9.6)可以写成

$$u_1 = ru_0 + sv_0 + O(|u_0| + |v_0|),$$
$$v_1 = su_0 - rv_0 + O(|u_0| + |v_0|).$$

从而，如果 d_0 与 d_1 表示从（$\tilde{x}(0)$，$\tilde{y}(0)$）到两点（$\tilde{x}(0) + u_0$，$\tilde{y}(0) + v_0$），（$\tilde{x}(0) + u_1$，$\tilde{y}(0) + v_1$）的距离，这两个点是变换 T 之下的对应点，就可以得出 $d_1 < d_0$.

逐次运用 T，并用 P_n 表示 P_0 在 T^n 下的像，可以证明当 $n \to +\infty$ 时，$P_n \to P_0$.

因此，在情形 (i)，我们说不动点及其相应的(7.9.1)的周期解是完全稳定的.

另一方面，在情形 (ii)，我们说不动点及相应的周期解为完全不稳定的；在情形 (iii)，称它们是正不稳定的；在情形 (iv)，称它们是逆不稳定的.

4. N. Levinson 和 J. L. Massera 关于次调和解的个数的定理

关于 D 类系统，我们有如下的 N. Levinson 和 J. L. Massera 的定理，我们只予以叙述而不加证明.

定理. (N. Levinson [1], J. L. Massera [2]). 如果系统

$$\dot{x} = f(t, x, y),\quad \dot{y} = g(t, x, y) \tag{7.9.1}$$

是 D 类系统，且 §9.3 中所定义的变换 T 的不动点以及 T^n 的不动点都是简单情形，而 q 是大于 1 的奇整数，则以 q 为最小周期的次调和解的个数 $N(q)$ 为 q 的偶倍数，且这些次调和解至少有一半是正不稳定的.

定理. (J. L. Massera [1].) 设 $N(1)$，$N(2)$，…，$N(q)$，…为任意的这样的序列，其中 $N(q)$ 为 0，或者为 q 的整倍数，或者为无穷大. 如果 $N(1) > 0$，则存在一个系统 (7.9.1)，它恰有 $N(q)$ 个周期为 q 的次调和解 ($q=1, 2, \cdots$)，而没有其它的周期

解．而且，系统的所有的解都在 $[0, +\infty)$ 上存在．

我们还有：如果 $\Sigma N(q) < +\infty$，则系统是 D 类系统．

对于受扰的 van der Pol 方程 $\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = bk\lambda \cos(\lambda t + \varphi)$ 的次调和解的稳定性与不稳定性（按 §3.3 (d) 的意义）的研究，参看 M. L. Cartwright–J. E. Littlewood [1], M. L. Cartwright [1], J. G. Wandel [1]. G. Colombo [1] 考虑了临界情形 $b = 2/3$，$\lambda = 3$，$\varphi = \pi/2$，且证明了，对于充分小的 k，此方程有不稳定的次调和解 $x = 2\cos t$.

S. Lundquist [1] 运用 M. L. Cartwright–J. E. Littlewood 的方法，假设 ε，F，k 为正常数，$f(x) + f(-x) = 0$，$f(x)/x \geqslant 0$，$f'(x)$ 存在且 ε 充分小，给出了计算方程 $\ddot{x} + x = \varepsilon[F\sin(pt + a) - k\dot{x} - f(x)]$ 的次调和振荡和位相的近似公式．

§ 10. 关于周期解的一般讨论

1. 自治系统

(a) 自治系统可以用向量符号记为

$$\dot{x} = X(x), \tag{7.10.1}$$

要确定它的周期解的问题相当于（第一章 §5）确定其闭轨线：奇点和环．

由于确定奇点就是求解方程组 $X(x) = 0$，因此通常并不困难．

关于环的确定，已经对 $n = 2$ 的情形（第四章 §3）进行了很广泛的讨论，且已经给出了环存在与不存在的准则．我们特别提到 Poincaré–Bendixson 定理，在第六章中我们经常用它来证明二阶方程的周期解（非常数解）的存在性，这些方程在应用上是很有意义的．

(b) 如果系统(7.10.1)的方程的个数 $n > 2$，困难就变得相当大了．这一方面是因为便于运用的 Poincaré–Bendixson 定理不能进行推广（参看 H. Poincaré [1]，197 页及其后的部份），另一方面也

是因为当 $n \geqslant 4$ 时，几何直观再也无效了.

关于 $n=3$ 的情形，我们要提到 G. Colombo [2] 的结果，而对于 $n \geqslant 4$ 的情形，则要提到 G. Colombo[3]，[4] 和 A. de Castro [2].

关于这样的系统的周期解的周期的下限问题，可参看 D. Graffi [2]，[3].

关于 $n=3$，$n=4$ 情形的参考文献，参阅 G. Sansone [3].

2. 周期的非自治系统

在这一章里，我们已经广泛地研究了在 $n=2$ 情形下，系统

$$\dot{x}=f(t, x), \tag{7.10.2}$$

$$f(t+\omega, x)=f(t, x), \ (\omega>0) \tag{7.10.3}$$

的周期解. 在这些研究中，如果假定解对初值条件的唯一性成立，此外还存在一个有界解，且所有解都在 $0 \leqslant t<+\infty$ 或 $-\infty<t \leqslant 0$ 上有定义，则 J. L. Massera 定理在保证存在以 ω 为周期的周期解上，起着基本的作用.

然而，如果 $n>2$，尽管系统(7.10.2)，(7.10.3)满足所有上述条件，也可能并不存在周期为 ω 的解.（参阅 J. L. Massera [1]，定理 8.）

在这种情形，我们分别有如下的 J. L. Masser 定理（[1]，定理 3）和 B.Viswanatham 定理 [1]:

定理. 如果(7.10.3)成立，则(7.10.2)有周期为 ω 的解的充要条件为存在一个在 $0 \leqslant t<+\infty$ 或 $-\infty<t \leqslant 0$ 上有界的解 $(y_1, \cdots, y_n)$，且 $y_i=y_i(t)$ 中有 $n-1$ 个以 ω 为周期.

定理. 如果(7.10.3)成立，且(7.10.2)有一个在 $0 \leqslant t<+\infty$ 或 $-\infty<t \leqslant 0$ 上有界的解 $(y_1, \cdots, y_n)$，则系统有周期为 ω 的解的充分条件为函数 $y_i=y_i(t)$ 是单调的.

关于这方面的进一步的结果，可以在下列文献中找到：R. Caccioppoli–A. Ghizzetti [2]；D. Griffi [4]，[5]；G. Aymerich [1]，[2]；S. Mizohata [1]；G. Colombo [5]；A. de Castro [2]；L. Amerio [1].

补　　充

1. 具强迫项的广义的 Liénard 方程

在 §5 中考虑过的具强迫项的广义的 Liénard 方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t) \tag{1}$$

是一些文章的主题，我们在这里介绍其中的一些结果．共同的假设为：设 $f(x), g(x), e(t)$ 分别对实的 x 及 t 有定义且连续，且设解对初值的唯一性定理成立．

于是我们有下列定理

(a) 有界性定理．

设存在三个正数 c, b, E，使得

$$|f(x)| \geqslant c,\quad g'(x) \geqslant b,\quad |e(t)| \leqslant E.$$

如果还假定 $g(0) = 0$，且 $g'(x)$ 局部有界，则 (1) 最终有界，更确切地说，对(1)的任意一解 $x(t)$，对应着数 t_0，使得当 $t \geqslant t_0$ 时，有

$$|x(t)| \leqslant \min\left\{\frac{E}{b},\ \frac{4E}{c^2},\ \frac{E}{b} + \frac{4E}{b^{1/2}c}\right\},\quad |\dot{x}(t)| \leqslant \frac{4E}{c}.$$

(W. S. Loud [3].)

设当 $t \geqslant 0$ 时，存在 $E > 0$，使

$$|e(t)| \leqslant E, \tag{2}$$

及

$$\varliminf_{|x|\to+\infty} g(x) > E,\quad \varlimsup_{|x|\to+\infty} g(x) < -E.$$

和通常一样，令 $F(x) = \int_0^x f(s)dS$，且有

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty,$$

以及对某个 p，$0 < p \leqslant E/2$，

$$\varliminf_{|x|\to+\infty} [F(x) - 2p|F(x)| - 4E|x|] > -\infty,$$

则当 $t \to +\infty$ 时，(1) 的每个解都有界 (Z. Opial [2]).

(b) 周期解的存在性．

如果在 (a) 的假设之外，强迫项还以 ω 为周期，即

$$e(t+\omega)=e(t), \tag{3}$$

则方程(1)至少有一个以 ω 为周期的解.

W. S. Loud [2] 以及 K. W. Blair 和 W. S. Loud [1] 给出了关于 (1) 存在渐近稳定的 ω-周期解的准则，他们详细地讨论了 $f(x)=$ 常数的情形.

M. Zlámal [1] 在如下的假定下，证明了 (1) 存在一个(指数式)渐近稳定的以 ω 为周期的解，即假定存在四个正数 c，ϖ，L_1，L_2，满足 $\varpi>c>0$，$cL_1+L_2<c\sqrt{\varpi^2-c}$，且使得

$$|f(x)-2c|\leqslant L_1,$$

$$|g(x')-g(x'')-\varpi^2(x'-x'')|\leqslant L_2|x'-x''|.$$

G. Seifert [1] 提出了另一个关于存在渐近稳定的 ω-周期解的准则; 他在 [2] 中还考虑了当 $f(x+2\pi)=f(x)$，$g(x+2\pi)=g(x)$ 时的同一个问题，即在相柱面空间上来考虑这个问题.

M. Urabe [1]提出了一个与 Lefschetz 准则(§5.1)密切相关的存在性定理. 他假定存在正数 λ，μ，使得

$$\lambda+4\mu^2\geqslant\mu F(x)/x\geqslant G(x)\geqslant\lambda>0,$$

其中 $\lambda>\mu^2$，而 $G(x)=\int_0^x g(s)ds$.

R. E. Gomory [1] 考虑了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为多项式的情形，即

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu,\quad g(x)=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu.$$

对于右端为多项式的自治系统，他研究了奇点在无限远时的情况，作为这个研究的应用，他证明了：当 n 为奇数，而 $b_n>0$ 和 m 为奇数不同时成立时*)，(1) 存在 ω-周期解.

关于其它的准则可参阅 A. Halanay [1].

(c) 具强迫项的保守系统.

有相当多的文献讨论了具强迫项的保守系统，即讨论了(1)当 $f(x)=0$ 时的情形:

---

*) 此处按 Gomory [1]，118 页定理作了修改. ——译者注

$$\ddot{x} + g(x) = e(t), \tag{4}$$

其中 G. Seifert 和 Z. Opial 的结果很有意思.

G. Seifert [3]在证明(4)存在ω周期解时,在条件(2)与(3)外,还假设$g(x)$是递增函数,$g(x)=0$,当$|x|$充分大时,$|g(x)|>E$.

Z. Opial [3]得到了同样的结果,他假设$xg(x)>0$,当$x\neq 0$;当$|x|\to\infty$时,$\lim|g(x)|=\infty$;且要求$e(t)$的周期ω满足不等式$0<\omega<T_0$,T_0满足$T_0/4\leqslant \varliminf_{|x|\to\infty} T(x)$,其中$T(x)$定义为:

$$\text{当}\ x>0\ \text{时},\quad T(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G(x)-G(s)}};$$

$$\text{当}\ x<0\ \text{时},\quad T(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_x^0 \frac{ds}{\sqrt{G(x)-G(s)}}.$$

关于方程(4)的其它结果(特别是与次调和解有关的结果),可参阅 T. J. Harvey [1], G. S. Hsu [1], T. Shimizu [2], R. M. Rosenberg [1].

2. J. E. Littlewood 的某些结果

J. E. Littlewood 发表在 Acta Mathematica 的两篇长文,特别详细地研究了含参数k, b, α的方程式

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = bke(t+\alpha). \tag{1}$$

这两篇文章的第一篇[1]讨论了 van der Pol 方程($f(x)=-(1-x^2)$, $g(x)=x$)的特殊情形,强迫项$e(t+\alpha)=\mu\cos(\mu t+\alpha)$多含一个参数$\mu$. 在第二篇文章[2]中,对(1),假设对于所有实x与t, f, g, e都属于C^2,且$e(t+\alpha+2\pi)=e(t+\alpha)$, $\int_0^{2\pi} e(s)ds=0$, $e(t+\alpha+\pi)=-e(t+\alpha)$, $f(-x)=f(x)\neq 0$, ($x\neq\pm 1$时, $f(\pm 1)=0$), $g(-x)=-g(x)$, $g'(x)>0$.

在这些附加的假设下, J. E. Littlewood 证明了(该文第 84 页),存在两个集合B_1, B_2,它们的并集是$(0, 2)$的真子集,且使得,如果$b\in B_1$,则方程(1)有一族解,当$t\to+\infty$时,都趋近于一个以(2

$n-1)2\pi$ 为周期的解，而当 $b\in B_2$ 时，方程(1)有两族解，分别趋于两个以 $(2n-1)2\pi$ 和 $(2n+1)2\pi$ 为周期的解。

3. 具强迫项的 Levinson-Smith 方程

在通常的关于 Cauchy 问题解的存在与唯一性定理的假设下，具有强迫项的 Levinson-Smith 方程

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=e(t) \tag{1}$$

也已经广泛地被研究过了. Z. Opial [5] 证明了：如果 $f(x,y)$, $g(x)$, $e(t)$ 连续；$xg(x)>0(x\neq 0)$, $\int_0^{+\infty}|e(t)|dt<+\infty$；且存在函数 $h(x)$，使得

$$f(x,y)-h(x)y>0\ (\text{当 } x^2+y^2>0 \text{ 时});$$

以及

$$0<a(x)\leqslant A<+\infty,$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_0^x a^2(s)g(s)ds=+\infty,$$

其中

$$a(x)=\exp\left(\int_0^x h(s)ds\right),$$

则对于(1)的任何解，有

$$\lim_{t\to+\infty}\{x^2(t)+\dot{x}^2(t)\}=0.$$

在附加假设

$$e(t+\omega)=e(t)$$

之下，R. Reissig[4], W. R. Utz [1] 以及 I. Barbalat [1] 给出了关于(1)的解的最终有界性以及存在 ω-周期解的准则.

4. 具强迫项的 Rayleigh 方程

具强迫项的 Rayleigh 方程一般指方程

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+g(x)=e(t), \tag{1}$$

这已在 §3.1 (f) 中研究过了，它的特殊情形

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+x=e(t) \tag{2}$$

也已在 §5 中考虑过了. 通常都假定 Cauchy 问题的解满足唯一性。

R. Reissig [2] 在假设

$$e(t+\omega)=e(t) \tag{3}$$

之下，得到了很多关于方程(2)的有意思的结果．特别是，他证明了(1)存在一个渐近稳定的 ω–周期解．其中，他假设 $F(v)$ 连续，递增，$F(0)=0$，$e(t)$ 连续，且

$$\lim_{v\to+\infty}[F(v)-F(-v)]>M-m,$$

其中 $M=\max e(t)$，$m=\min e(t)$.

Z. Osinski [1] 也考虑过方程(2).

对于方程(1)，R. Reissig [3] 在如下的假设下证明了至少存在一个最小周期为 ω 的解：设 $F(v)$，$g(x)$ 和 $e(t)$ 分别对所有实 v，x 和 t 连续；设 $m\leqslant 0\leqslant M$，且存在正数 V，使得当 $v\geqslant V$ 时，

$$F(v)\geqslant(M-m)r+\delta>0,\ 0<r<1,\ \delta>0,$$

当 $v\leqslant -V$ 时，

$$F(v)\leqslant-(M-m)(1-r)<0.$$

设

$$F=\max_{[-V,V]}F(v)>0,\ f=\min_{[-V,V]}F(v)<0;$$

又存在正数 X，使得当 $x\geqslant X$ 时，

$$g(x)\geqslant(M-f)+\eta,\ (\eta>0),$$

当 $x\leqslant X$ 时，

$$g(x)\leqslant(m-F)-\eta.$$

其它的关于(1)的解的有界性的结果，还可参阅 R. Reissig [1].

5. 关于一般系统 $\dot{x}=f(t,x,y)$，$\dot{y}=g(t,x,y)$ 的周期解的存在性

C. Olech [1] 提出了一个关于一般系统

$$\dot{x}=f(t,x,y),\ \dot{y}=g(t,x,y) \tag{1}$$

的很有意思的结果，此处

$$f(t+\omega,x,y)=f(t,x,y),\ \ g(t+\omega,x,y)=g(t,x,y),$$

在某种意义上，它是关于(1)存在 ω–周期解的 Massera 定理的补充．他的存在定理(推广了 Z. Opial 的一条讨论特殊情形 $f=y$

的类似的定理)要求 Cauchy 问题解的存在性与唯一性，且至少存在一个有界解，以及 f, g 分别对 y 和 x 为非减的简单条件.

和 R. E. Gomory [1] 的早期工作相联系，J. Cronin [1] 运用拓扑度的概念，对

$$f(t, x, y) = X(x, y) + E_1(t),\ g(t, x, y) = Y(x, y) + E_2(t)$$

的情形，研究了确定(1)的 ω-周期解的最少数目的问题。

关于二阶的一般方程式

$$\ddot{x} = g(t, x, \dot{x})$$

的有界性与周期解存在性的进一步研究，可看 H. Ehrmann [1] 和 T. Yoshizawa [5].

6. 各式各样的二阶的有阻尼或无阻尼的方程

不含阻尼 $\dot{x}$ 的二阶方程

$$\ddot{x} = \varphi(t, x)$$

的诸如有界性，稳定性，振动性，周期性等等渐近性质已被许多学者研究过：参阅 F. V. Atkinson [1]; Choy Tak Taam [1], [2]; Choy Tak Taam–E. S. Johnson [1]; H. Jeffreys [1]; Lakshmikantham–B. Viswanatham [1]; T. Manacorda [1]; J. Valat [1].

一般的含阻尼 $\dot{x}$ 的方程

$$\ddot{x} = g(t, x, \dot{x})$$

的很多特殊情形，也被不少学者研究过：参阅 A. de Castro [1], [2], H. Ehrmann [1], R. Faure [1], N. A. Zheleztsov [1], J. J. Levin–J. A. Nohel [1], H. Morimoto [1], W. R. Utz [1], T. Yoshizawa [4].

参考文献

AMERIO, L.

[1] Soluzioni quasi periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi periodici o limitati, *Ann. Mat. pura ed appl.*, (4) **39** (1955), 105–119.

ANTOSIEWICZ, H. A.

[1] On nonlinear differential equations of the second order with integrable forcing term, *Jour. London Math. Soc.*, **30** (1955), 64–67.

ASCARI, A.

[1] Studio asintotico di un'equazione relativa alla dinamica del punto; *Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett.*, (3) **16** (1952), 278–288.

ATKINSON, F. V.

[1] On asymptotically linear second-order oscillations, *Jour. Rat. Mach. Anal.*, **4** (1955), 769–793.

AYMERICH, G.

[1] Sulle oscillazioni forzate di due circuiti elettrici non lineari con accoppiamento induttivo e capacitivo, *Atti Sem. Mat. Modena*, **5** (1950/51) 83–89.

[2] Oscillazioni forzate periodiche di sistemi non lineari a duo gradi di libertà, *ibid.*, 165–177.

BARBALAT, I.

[1] Solutions bornées et solutions périodiques pour certaines équations différentielles non linéaires du second ordre, *Bul. Sti. Acad. R. P. R. Sect. Sti. Mat. Fiz.*, **5** (1953), 393–402; 503–515.

BLAIR, K. W. and LOUD, W. S.

[1] Periodic solutions of $\ddot{x}+c\dot{x}+g(x)=Ef(t)$ under variation of certain parameters, *Jour. Soc. ind. and appl. Math.*, **8** (1960), 74–101.

BROUWER, L. E. J.

[1] Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Math. Annalen*, **71** (1912), 97–115.

CACCIOPPOLI, R. and GHIZZETTI, A.

[1] Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare, *Mem. R. Acc. d'Italia*, (7), **3** (1942), 427–440.

[2] Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari, *ibid.*, 493–501.

CARTWRIGHT, M. L.

[1] Forced oscillations in nonlinear systems, *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, Vol. 1 (1950), 149–241.

CARTWRIGHT, M. L. and LITTLEWOOD, J. E.

[1] On nonlinear differential equations of the second order, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 472–494; *ibid.*, **50** (1949), 504–505.

[2] Some fixed point theorems, *ibid.*, **54** (1951), 1–37.

CECCONI, J.

[1] Su di una equazione differenziale non lineare, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (3) **4** (1950), 245–278.

CHOY TAK TAAM

[1] On the solutions of nonlinear differential equations, I, *Jour. Math. and Mech.*, **6** (1957), 287–300.

[2] Same title, III, *Duke Math. J.*, **24** (1957), 511–519.

CHOY TAK TAAM and JOHNSON, E. S.

[1] Same title, II, *Jour. Math. and Mech.*, **6** (1957), 383–392.

CINQUINI, S.

[1] Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **14** (1940), 157–170.

COLOMBO, G.

[1] Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non lineare, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **22** (1953) 123–133.

[2] Sull'equazione differenziale non lineare del terzo ordine di un circuito oscillante triodico, *ibid.* **19** (1950), 114–140.

[3] Sulle oscillazioni non lineari in due gradi di libertà, *ibid.* 413–441.

[4] Moti di regime di un sistema non lineare autonomo in due gradi di libertà con debole accoppiamento capacitivo, *ibid.* **24** (1955), 400–420.

[5] Sopra il fenomeno dell'azione asincrona, *ibid.* **24** (1955), 353–395.

CRONIN, J.

[1] The number of periodic solutions of non autonomous systems, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 183–193.

DE CASTRO, A.

[1] Sopra l'equazione differenziale delle oscillazioni non lineari, *Rivista di Mat. Univ. Parma*, **4** (1953), 133–143.

[2] Sulle oscillazioni non lineari dei sistemi di uno o piú gradi di libertà, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **22** (1953), 294–299.

DIEUDONNÉ, J.

[1] *Foundations of modern analysis*, Academic Press, 1960.

EHRMANN, H.

[1] Nachweis periodischer Lösungen bei gewissen nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen, *Arch. Rat. Mech. & Anal.*, **1** (1957), 124–138.

FAURE, R.

[1] Sur certaines solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **42** (1956), 165–188; *ibid.* (4) **43** (1957), 83–95.

FRIEDRICHS, K. O. and STOKER, J. J.

[1] Forced vibrations of systems with nonlinear restoring force, *Quart. appl. Math.*, **1** (1943), 97–115.

GOMORY, R. E.

[1] Critical points at infinity and forced oscillations, *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, vol. **3**, (1956), 85–126.

GRAFFI, D.

[1] Sulle oscillazioni forzate della Meccanica non lineare, *Rivista Mat. Univ. Parma*, **3** (1952), 317–326.

[2] Sul periodo delle oscillazioni nei sistemi non lineari a due gradi di libertà, *Mem. Acc. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. Fis., Ser. Sci. Fis. Mat.*, (10) **9** (1951–52).

[3] Sur la période d'oscillation des systèmes non linéaires à plusieurs dégrés de liberté, *Actes Coll. Int. Vibr. non lin.* (Porquerolles, 1951), 189–194.

[4] Forced oscillations for several nonlinear circuits, *Ann. of Math.* **54** (1951), 262–271.

[5] Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (8) **16** (1954), 176–180.

HALANAY, A.

[1] Nouveaux critériums d'existence des solutions périodiques pour l'équation des oscillations non linéaires forcées, *Bul. Sti. Acad. R. R. R., Sect. Sti. Mat. Fiz.*, **5** (1953), 373–391.

HARVEY, T. J.

[1] Natural forcing functions in nonlinear systems, *Jour. Appl. Mech.*, **25** (1958), 352–356.

HOBSON, E. W.

[1] *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, Vol. 1, 3rd. ed., 1927.

HSU, C. S.

[1] On simple subharmonics, *Quart. Appl, Math.*, **17** (1959), 102–105.

JEFFREYS, H.

[1] The simple pendulum under periodic disturbance, *Quart. J. Mech. & appl. Math.*, **12** (1959), 124–128.

JOHN, F.

[1] On simple harmonic vibrations of a system with nonlinear characteristics, *Studies on nonl. vibr. theory*, edited by R. COURANT, Inst. for Math. and Mech., N. Y. U., 1946, 105–193.

[2] On harmonic vibrations out of phase with the exciting force, *Commun. on pure and appl. Math.*, **1** (1948), 341–359.

KATS, A. M.

[1] Biharmonic oscillations of dissipative systems, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **18** (1954), 452–444 (Russian).

KRALL, G.

[1] *Meccanica tecnica delle vibrazioni, Parte* 1 : *Sistemi discreti*, Bologna, 1940.

KURATOWSKI, C.

[1] *Topologie*, I, 3me Ed., Warszawa, 1952.

LAKSHMIKANTHAM, V. and VISWANATHAM, B.

[1] On the existence of harmonic solutions of differential systems, *Proc. Nat. Acad. Sci. India*, 1959, A 28, no. 6, 324–328.

LANGENHOP, C. E.

[1] Note on Levinson's existence theorem for forced periodic solutions of a second order differential equation, *Jour. Math. Phys.*, **30** (1951) 36–39.

LEFSCHETZ, S.

[1] Existence of periodic solutions for certain differential equations, *Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A.*, **29** (1943), 29–32.

LERAY, J. and SCHAUDER, J.

[1] Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. Sci. Ec. Norm, Sup.* (3) **51** (1934), 45–78.

LEVI CIVITA, T.

[1] Sopra alcuni criteri di instabilitá, *Ann. d Mat. pura ed appl.*, (3) **5** (1901), 221–307.

LEVIN, J. J. and NOHEL, J. A.

[1] Global asymptotic stability for nonlinear systems of differential equations and applications to reactor dynamics, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, **5** (1960) 194–211.

LEVINSON, N.

[1] Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order; *Ann. of Math.*, (2) **45** (1944), 723–737; *ibid.*, **49** (1948), 738.

[2] On the existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term, *Jour. Math. Phys.*, **22** (1943), 41–48.

[3] On a nonlinear differential equation of the second order, *ibid.*, 181–187.

LITTLEWOOD, J. E.

[1] On nonlinear differential equations of the second order, III, *Acta Math.*, **97** (1957), 267–308

[2] Same title, IV, *ibid.* **98** (1957), 1–110.

LOUD, W. S.

[1] On periodic solutions of Duffing's equation with damping, *Jour. Math. Phys.*, **34** (1955), 173–178.

[2] Boundedness and convergence of solutions of $\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = e(t)$, *Duke Math. J.*, **24** (1957), 63–72.

[3] Behavior of certain forced nonlinear systems of second order under large forcing, *ibid.*, **24** (1957), 235–247.

LUNDQUIST, S.

[1] Subharmonic oscillations in a nonlinear system with positive damping, *Quart. appl. Math.*, **13** (1955), 305–310.

MANACORDA, T.

[1] Soluzioni periodiche di un equazione differenziale non lineare, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (8) **1** (1946), 1046–1050.

[2] Vibrazioni forzate di un particolare sistema oscillante non lineare, *ibid.*, (8) **4** (1948), 557–561.

MASSERA, J. L.

[1] The existence of periodic solutions of systems of differential equations, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 457–475.

[2] The number of subharmonic solutions of nonlinear differential equations of the second order, *Ann. of Math.*, (2) **50** (1949), 118–126.

MINOZZI, L.

[1] Soluzioni sottoarmoniche dell'equazione di Liénard , *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) **9** (1954), 196–199.

MIRANDA, C.

[1] Un'osservazione su un teorema di Brouwer, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (2) **3** (1940), 527.

[2] *Problemi di esistenza in Analisi funzionale.* Quaderni Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa. III (1948–49), 158–159.

MIZOHATA, S.

[1] On the existence of systems of periodic solutions for several nonlinear circuits, *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., Ser.* A, **27** (1952), 115–121.

MIZOHATA, S. and YAMAGUTI, M.

[1] On the existence of periodic solutions of the non-linear differential equation $\ddot{x} + \alpha(x)\dot{x} + \varphi(x) = p(t)$, *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., Ser. A*, **27** (1952), 109–113.

MORIMOTO, H. L.

[1] On the periodic solution of a certain non-linear differential equation, *Math. Japonicae*, **5** (1958), 39–43.

MORRIS, G. R.

[1] A differential equation for undamped forced nonlinear oscillations, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **51** (1955), 297–312; **54** (1958), 426–438.

NEWMAN, M. H. A.

[1] On the ultimate boundedness of the solutions of certain differential equations, *Compositio Math.*, **8** (1951), 142–156.

OLECH, C.

[1] Periodic solutions of a system of two ordinary differential equations, *Bull. Ac. Pol. Sci., Cl. 3*, **7** (1959), 137–140.

OPIAL, Z.

[1] Sur l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre, *Bull. Ac. Pol. Sci., Cl. 3*, **7** (1959), 71–75.

[2] Sur les solutions de l'équation différentielle $\ddot{x} + h(x)\dot{x} + f(x) = e(t)$, *Ann. Pol. Math.*, **8** (1960), 71–74.

[3] Sur les solutions périodiques de l'équation différentielle $\ddot{x} + g(x) = p(t)$, *Bull. Ac. Pol. Sci., Cl. 3*, **8** (1960), 151–156.

[4] Démonstration d'un théorème de N. Levinson et C. Langenhop, *Ann. Pol. Math.*, **7** (1960), 241–246.

[5] Sur une équation différentielle non linéaire du second ordre, *ibid.* **8** (1960), 65–69.

OSINSKI, Z.

[1] Forced vibrations of a system, of one degree of freedom due to periodic forces with damping characterized by a strong nonlinearity, *Arch. Mech. Stosow.*, Warszawa, **11** (1959), 33–44.

POINCARÉ, H.

[1] *Oeuvres*, *T.* 1°, p. 197.

REISSIG, R.

[1] Über die Beschranktheit der Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung, *Math. Nachr.* **15** (1956), 375–383.

[2] Über eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung, *ibid.*, **13** (1955), 313–318; **14** (1955), 65–71; **15** (1956), 39–45; **15** (1956), 47–54.

[3] Periodische Erregung eines einfachen Schwingers mit Selbststeuerung, *ibid.*, **15** (1956), 181–190.

[4] Über die Existenz periodischer Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Storungsglied, *ibid.*, **14** (1956), 341–348.

REUTER, G. E. H.

[1] A boundedness theorem for nonlinear differential equations of the second order *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **47** (1951), 49–54.

[2] On certain nonlinear differential equations with almost periodic solutions, *Jour. London Math. Soc.*, **26** (1951), 215–221.

[3] Boundedness theorems for nonlinear differential equations of the second order, *ibid.*, **27** (1952), 48–58.

ROSENBERG, R. M.

[1] On the periodic solutions of the forced oscillator equation, *Quart. appl. Math.* **15** (1958), 341–354.

ROSENBLATT, A.

[1] Sobre el fenomeno de la subresonancia, *Publ. Inst, de Mat. y Estad., Fac. Ing. Montevideo*, (1946), 99–109.

[2] Sobre el fenomeno de la subresonancia para la ecuacion de van der Pol, *Bol. Fac. Ing. Montevideo*, **3** (1949), 345–354.

SANSONE, G.

[1] *Orthogonal functions*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.

[2] *Equazioni differenziali nel campo reale*, Vol. 1, Chap. V.

[3] Sistemi di equazioni differenziali non lineari nello spazio a tree a quattro dimensioni. Risultati topologici. Risultati analitici. Applicazioni, *Conf. Sem. Mat. Bari.* (1961), 68–69.

SANTORO, P.

[1] Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di un'equazione differenziale non lineare, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) **11** (1956), 432.

SEIFERT, G.

[1] On stability in the large for periodic solutions of differential systems, *Ann. of Math.* **67** (1958), 83–89.

[2] The asymptotic behavior of solutions of pendulum type equations, *ibid.*, **69** (1959), 75–87.

[3] A note on periodic solutions of second order differential equations without damping, *Proc. Am. Math. Soc.*, **10** (1959), 396–398.

SESTINI, G.

[1] Criterio di stabilità in un problema di meccanica non lineare, *Rivista Mat. Univ. Parma*, **2** (1951), 303–313.

SHIMIZU, T.

[1] On differential equations for nonlinear oscillations, *Math. Japonicae*, **2** (1951), 86–96.

[2] Subharmonics for nonlinear differential equations; *Proc. 3rd Japan, Congr. Appl. Mech.*, 1953 (Tokyo, 1954), 421–423.

SKOWRONSKI, J. and ZIEMBA, S.

[1] The problem of vibrations of nonautonomic systems with strong non-linearity, *Arch. Mech. Stosowanej, Warszawa*, **10** (1958), 517–523.

STOPPELLI, F.

[1] Su di un equazione differenziale della meccanica dei fili, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli*, (4) **19** (1952), 109–114.

URABE, M.

[1] On the existence of periodic solutions for certain nonlinear differential equations, *Math. Japonicae*, **2** (1949), 23–26.

UTZ, W. R.

[1] Boundedness and periodicity of solutions of the generalized Liénard equation *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **42** (1956), 313–324.

VALAT, J.

[1] Détermination des solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires dont les coéfficients varient suivant une fonction créneau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 1961–1964.

VISWANATHAM, B.

[1] The existence of harmonic vibrations, *Proc. Am. Math. Soc.*, **4** (1953), 371–372.

WENDEL, J. G.

[1] Singular perturbations of van der Pol equations, *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, vol. 1 (1950), 243–290.

YOSHIZAWA, T.

[1] On the non-linear differential equation, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto; Ser. A.*, **28** (1953), 123–141.

[2] On the convergence of solutions of the non-linear differential equation, *ibid.*, 143–151.

[3] Note on the existence theorem of a periodic solution of the non-linear differential equation, *ibid.*, 153–157.

[4] Note on the solutions of a system of differential equations, *ibid.*, **29** (1955), 249–291.

[5] Existence of a bounded solution and existence of a periodic solution of the differential equation of the second order, *ibid.*, **33** (1960), 301–308.

ZLÁMAL, M.

[1] Über die Stabilität der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen, *Czech. Math. Jour.*, **4** (79), (1954), 95–103.

ZHELEZTSOV, N. A.

[1] The method of point transformation and the problem of forced vibrations of an oscillator with "combined" friction, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **13** (1949), 3–40 (Russian).

第八章　线 性 系 统

在这一章里我们扼要地探讨一下线性系统的经典结果，作为第九章提出 Lyapunov 稳定性理论的引言． 此外，还将对正则系统的某些新近成果加以说明．

§1. 伴随系统．T. Wazewski 不等式

1. 伴随系统

(a) 采用在第一章 §3.4 中所引进的矩阵记号，线性系统可以写成

$$\dot{x} = A(t)x + a(t) \tag{8.1.1}$$

的形式．如果系统是齐次的，则可以写成

$$\dot{y} = A(t)y \tag{8.1.2}$$

的形式．

$A(t)$ 表示 $n \times n$ 矩阵，$a(t)$ 表示 $n \times 1$ 矩阵（n-列向量）．这里，我们假设 $A(t)$ 和 $a(t)$ 的元素是实变量 t 的实或复的函数，对于某个 t_0，它们在 $t \geqslant t_0$ 上连续．

设 $\overline{A}$ 表示一矩阵，它的元素与矩阵 A 的元素 a_{ik} 共轭，A^T 表示 A 的转置矩阵，而 A' 表示矩阵 $(\overline{A})^T$，则系统

$$\dot{z} = -A'z \tag{8.1.3}$$

称为(8.1.2)的**伴随系统**．

(b) 如果 a^T 表示 $1\times n$ 矩阵（n-行向量），它是由转置 n-列向量 a 的元素而得到，则积 $a^Tb = b^Ta$ 与两向量 a 与 b 的纯量积相同．我们定义 $a' = (\overline{a})^T$．

令 $u = u(t)$，$v = v(t)$ 是两可微的 n-列向量，并设 $l(u) = \dot{u} - Au$，$m(v) = \dot{v} + A'v$．则 Lagrange 恒等式

$$v'l(u) + m'(v)u = d(v'u)/dt$$

成立，并且，如果 $u = y$ 是(8.1.2)的解，$v = z$ 是(8.1.3)的解，则得到

$$y'z = \text{常数}. \tag{8.1.4}$$

再次使用第一章§ 3.4 中的记号，设 $Y = Y(t)$ 是(8.1.2)的基本解矩阵，$Z = Z(t)$ 是伴随系统(8.1.3)的基本解矩阵，即 $\dot{Z} = -A'Z$，则

$$Y'Z = C, \tag{8.1.5}$$

其中 C 是元素为常数的 $n \times n$ 矩阵.

又如果 Y 是(8.1.2)的基本解矩阵，而 $J = Y^{-1}$，则 $JY = I$，其中 I 是 $n \times n$ 单位矩阵. 从而，$O = \dot{J}Y + J\dot{Y} = \dot{J}Y + JAY$. 因此，如果 $\det Y \neq 0$，则我们有 $\dot{J} = -JA$，$\dot{J}' = -A'J'$.

因而，**如果 Y 是(8.1.2)的基本解矩阵，则 $(Y^{-1})'$ 便是伴随系统(8.1.3)的基本解矩阵.**

(c) 若有

$$A = -A',$$

则系统(8.1.2)称为**自伴系统**. 这时由(8.1.4)推知 $yy' =$ 常数，并且因为

$$yy' = \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2,$$

我们可以断言，自伴系统的每一个解当 t 变化时，其模 $\|y\|$ 均为常数.

在几何上，自伴系统的所有解均位于一个以 t 轴为轴的圆柱上. 如果 Y 是自伴系统的基本解矩阵，则 $Y'Y = C$.

2. Wazewski 不等式

(a) 设 $y = y(t)$ 是系统(8.1.2)的任一解，并设

$$\rho^2(t) = \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = y'y.$$

微分上式，得到 $2\rho\dot{\rho} = \dot{y}'y + y'\dot{y} = y'A'y + y'Ay$，如果引入矩阵

$$H(t)=\frac{1}{2}A(t)+\frac{1}{2}A'(t), \tag{8.1.6}$$

则有 $2\rho\dot{\rho}=2y'Hy$.

因为 $H(t)$ 对于每一个 t 值都是 Hermite 矩阵，故它的 n 个特征根都是实数. 如果 $\lambda(t)$ 与 $\Lambda(t)$ 分别为 $H(t)$ 的最大与最小的特征根,则

$$\lambda(t)=\min_x\frac{x'Hx}{x'x},\quad \Lambda(t)=\max_x\frac{x'Hx}{x'x}.$$

(参看, H. L. Hamburger–M. E. Grimshaw [1], § 14. 也可参看 G. Julia [1]，第五章). 因而，$\lambda\rho\leqslant\dot{\rho}\leqslant\Lambda\rho$. 积分这个式子，就得到 Wazewski 不等式 (T.Wazewski [1], 48—59 页，也可参看 A. Wintner [1],附录):

$$\|y(t_0)\|\exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right)\leqslant\|y(t)\|$$

$$\leqslant\|y(t_0)\|\exp\left(\int_{t_0}^{t}\Lambda(\tau)d\tau\right),\quad t_0\leqslant t. \tag{8.1.7}$$

(b) 对于伴随系统(8.1.3),用类似的方法可以推出,它的所有解都满足不等式

$$\|z(t_0)\|\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\Lambda(\tau)d\tau\right)\leqslant\|z(t)\|$$

$$\leqslant\|z(t_0)\|\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right),\quad t_0\leqslant t. \tag{8.1.8}$$

我们注意到,如果(8.1.2)是自伴系统,则 $H(t)$ 是 $n\times n$ 零矩阵，从而 $\lambda(t)=\Lambda(t)=0$ 恒成立，并且由(8.1.7)或(8.1.8)再次得知,自伴系统的每一个解的模均为常数.

(c) 把 Lagrange 不等式 $\Sigma_i|u_iv_i|^2\leqslant\Sigma_i|u_i|^2\Sigma_k|v_k|^2$ 以及不等式 $2|pq|\leqslant|p|^2+|q|^2$ 应用于 Hermite 型 $y'Hy$，当 $\|H\|\leqslant\|A\|$ 时,我们得到 $|y'Hy|\leqslant\|H\|\,\|y\|\leqslant\|A\|\,\|y\|$ 或 $|\|y\|d\|y\|/dt|\leqslant\|H\|\|y\|\leqslant\|A\|\|y\|$，从而，最后可以得到不等式(参看 Z. Butlewski [1]) ($t_0\leqslant t$)

$$\|y(t_0)\|\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\|H(\tau)\|d\tau\right)$$

$$\leqslant \|y(t)\| \leqslant \|y(t_0)\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \|H(\tau)\| d\tau\right),$$

$$\|y(t_0)\| \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| d\tau\right)$$

$$\leqslant \|y(t)\| \leqslant \|y(t_0)\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| d\tau\right).$$

对于考虑异于 $\|a\|$, $\|A\|$ 的各种模所得到的其它的不等式，也可参看：H. Toyama [1], T. Kitamura [1].

§2. 常系数线性自治系统

1. 标准基本解矩阵

在本节中我们研究齐次系统(8.1.2)，其中 $A(t)$ 是已知 $n \times n$ 常数矩阵 C，也就是研究自治系统

$$\dot{y} = Cy. \tag{8.2.1}$$

在 §2.1，§2.2 中假定 C 的元素是实数或复数，而在 §2.3，§2.4 中假定它们均是实数.

根据矩阵计算原理，如果 M 是一个 $n \times n$ 矩阵(常数或 t 的函数)，我们用下述级数定义矩阵 e^M：

$$e^M = 1 + \frac{1}{1!}M + \frac{1}{2!}M^2 + \cdots + \frac{1}{n!}M^n + \cdots \tag{8.2.2}$$

如果 M 和它的导数 $\dot{M}$ 可交换，即 $\dot{M}M = M\dot{M}$，则

$$de^M/dt = \dot{M}e^M = e^M\dot{M}.$$

特别是，如果 $M = tC$，其中 C 是常数矩阵，则 $\dot{M}M = M\dot{M}$，从而 $de^{tC}/dt = Ce^{tC} = e^{tC}C$.

在矩阵方程 $\dot{Y} = CY$ 的两端同乘以 e^{-tC}，可得

$$e^{tC} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C^n = Y(t)Y^{-1}(0), \tag{8.2.3}$$

因而 e^{tC} 是(8.2.1)的标准基本解矩阵：$U(t) = e^{tC}$(第一章，§3).

所以，(8.2.1)的通解可由

$$y(t) = e^{tC}y^0 \tag{8.2.4}$$

给出，其中 y^0 是任意常数 n-列向量.

容易证明 $(e^{tC})^{-1}=e^{-tC}$，从而有

$$U^{-1}(t)=e^{-tC} \tag{8.2.5}$$

和

$$U(t)U^{-1}(\tau)=e^{(t-\tau)C}=U(t-\tau). \tag{8.2.6}$$

2. 齐次系统解的形式．特征指数．型数

在 § 2.1 中已看到齐次系统 (8.2.1) 的通解的形式如(8.2.4).

由矩阵理论知道(例如，可参看 Julia [1]，第二章，§ 3)，存在一个非退化的常数矩阵 T，使得 $T^{-1}CT$ 是 Jordan 标准型

$$T^{-1}CT=\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_s \end{pmatrix},$$

其中 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 分别是 $k_1 k_2, \cdots, k_s$ 阶方阵，而 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$，$1\leqslant s\leqslant n$，其它的所有元素均为零.

M_i 形如

$$M_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_i & & \\ & \lambda_i & \varepsilon_i & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon_i=0, 1$，而 λ_i 是 C 的一个特征根，即特征方程

$$\det(C-\lambda I)=0 \tag{8.2.7}$$

的一个根.

更确切地说，如果 λ_i 是 k_i 重特征根，则 M_i 是 k_i 阶方阵.

此外，如果考虑数

$$h_i=n-\operatorname{rank}(C-\lambda_i I)$$

(称为 $C-\lambda_i I$ 的零度或简称为 λ_i 的零度)，它满足 $1\leqslant h_i\leqslant k_i\leqslant n$，则我们将有：当 $h_i=k_i$ 时，$\varepsilon_i=0$；当 $h_i<k_i$ 时，$\varepsilon_i=1$.

如果 C 是实常数矩阵而 λ_s 是复特征根 $\alpha+i\beta$，则λ_s及其共轭复数 $\bar{\lambda}_s$ 对应着两个矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha+i\beta & \varepsilon_s & & \\ & \alpha+i\beta & \varepsilon_s & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha+i\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-i\beta & \varepsilon_s & & \\ & \alpha-i\beta & \varepsilon_s & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha-i\beta \end{pmatrix}.$$

我们可以把这两个矩阵当成单个矩阵 M_i

$$\begin{pmatrix} \alpha+i\beta & \varepsilon_s & \\ & \ddots & \\ & & \alpha-i\beta \end{pmatrix}$$

来考虑．可以证明存在一个实的非退化变换，它将上述矩阵变成

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & & & & & \\ \beta & \alpha & -\varepsilon_s & & & & \\ & & \alpha & -\beta & & & \\ & & \beta & \alpha & -\varepsilon_s & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & -\beta \\ & & & & & \beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

而使 J 中所有其他的 M_i 保持不变．回来讨论 C 为复常数矩阵的一般情况，我们用变换 $y=Tz$ 来代换(8.2.1)的解 y，其中 T 是上面提到过的矩阵． 于是我们有 $\dot{z}=T^{-1}CTz=Jz$，从而根据(8.2.4)，$z=e^{tJ}z^0$，其中 z^0 是任一常数 n-列向量，最后得到

$$y=Te^{tJ}z^0.$$

总之，(8.2.1)的通解是一 n-列向量，它的元素是 e^{tJ} 的元素的常系数线性组合．

此外，容易验证（例如，可参看 Coddington–Levinson [1]，第三章，§ 4）e^{tJ} 形如

$$e^{tJ}=\begin{pmatrix} e^{tM_1} & & & \\ & e^{tM_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tM_s} \end{pmatrix},$$

其中

$$e^{tM_i}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_i t}\cdots & \frac{1}{(k_i-1)!}t^{k_i-1}e^{\lambda_i t} \\ & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t}\cdots & \frac{1}{(k_i-2)!}t^{k_i-2}e^{\lambda_i t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.$$

因此我们有下面的定理.

定理 1. 线性齐次自治系统 (8.2.1) 的通解是一组 n 个函数，这些函数是形如 $t^k e^{\lambda_i t}$ 的函数的常系数线性组合，其中 λ_i 是 C 的特征根而 k 是非负的整数.

由于 λ_i 以一种方式在系统(8.2.1)的通解表达式中出现，所以称 λ_i 为系统(8.2.1)的特征指数. 特征根 λ_i 的实部称为该系统的型数.

3. 实系统的奇点

(a) 我们来研究线性非齐次自治系统

$$\dot{x}=Cx+c, \tag{8.2.8}$$

其中 C 与 c 分别是 $n\times n$ 与 $n\times 1$ 的实常数阵.

如果方程组

$$Cx+c=0,\ (0\ 是\ n\times 1\ 零矩阵) \tag{8.2.9}$$

没有解，则系统(8.2.8)无奇点.

如果 $\tilde{x}$ 是(8.2.9)的一个解，即为(8.2.8)的一个奇点，则变换 $x=y+\tilde{x}$ 将(8.2.8)的解 x 变成

$$\dot{y}=Cy \tag{8.2.1}$$

的解 y，特别是将奇点 $\tilde{x}$ 变成(8.2.1)的奇点 O(n-列零矩阵).

因而我们可以只注意奇点 O 的邻域就行了.

(b) 现在假设

$$\det C\neq 0, \tag{8.2.10}$$

这相当于假设特征方程 $\det(C-\lambda I)=0$ 没有零根.

这时我们有如下几种可能性：(1)所有特征根 λ_i 具有负实部

(或正实部)；(2)存在具有负实部的 λ_i，而其余所有的 λ_i 有正实部；(3)存在具有负实部(或正实部)的 λ_i，而所有其余的 λ_i 的实部均为零；(4)存在具有负实部的 λ_i 与正实部的 λ_i，同时也存在实部为零的 λ_i；(5) 所有 λ_i 的实部均为零. 最后这种情况仅当(8.2.1) 的方程个数 n 是偶数时才能出现(只要 C 正象所假定的那样是实常数阵的话).

在情况(1)，所有的解当 $t\to+\infty$(或 $-\infty$)时均趋于直线 $y=0$，因而存在 O 点的一个邻域，使得通过该邻域中的点的所有轨线，当 $t\to+\infty$(或 $-\infty$)时都趋于 O.

在情况(2)，如果设 $k(0<k<n)$ 是具负实部的 λ_i 的个数，则在点 (t, x) 的欧氏空间 S_{n+1} 中存在一 S_{k+1} (即 S_{n+1} 中的一个 $k+1$ 维超平面)，它被当 $t\to+\infty$ 时趋于直线 $y=0$ 的解所充满，同时还存在一 S_{n-k+1}，它被当 $t\to-\infty$ 时趋于 $y=0$ 的解所充满. 在相空间(即点 x 所在的空间 S_n) 中存在着一个当 $t\to+\infty$ 时趋于 O 的轨线的集合 S_k 和一个当 $t\to-\infty$ 时趋于 O 的轨线的集合 S_{n-k}. 所有其余的轨线在 O 点的每一个邻域内仅能停留有限时间.

在情形 (3)，设 $i\beta_1, -i\beta_1, \cdots, i\beta_p, -i\beta_p$ 是实部为零的 $2p(<n)$ 个特征根，而令 $2q$ 是这些特征根的对应的初等因子的个数. 我们分如下的 (3′) 及 (3″) 两种情况加以讨论：情况(3′)：$2p=2q$，即所有初等因子都是线性的. 这时在点 (t, x) 的空间 S_{n+1} 中存在一个殆周期解的集合 S_{2p+1}，它可能含有周期解的一个流形(关于在 H.Bohr 意义下，殆周期函数概念，例如，可参看 G. Sansone [1]，第五章，§ 9)*⁾. 还存在一个当 $t\to+\infty$ 时(或趋于 $-\infty$ 时，如果其余的特征根均具有正实部的话)趋于直线 $y=0$ 的解集合 S_{n-2p+1}. 所有剩下的解当 $t\to+\infty$ (或 $\to-\infty$)时，均渐近于这些殆周期解. 情况(3″)：$2p<2q$. 这时至少有一个初等因子的次数 >1. 在 S_{n+1} 中存在一个殆周期解的集合 S_{2p+1}. 还存在一

*⁾ 也可参看 Б. М. 列维坦，《概周期函数》，余家荣等译，高等教育出版社，1956. ——译者注

个当 $t \to +\infty (t \to -\infty)$时趋于直线. $y=0$ 的解的集合 S_{n-2p+1} 和一个渐近地趋于这些殆周期解的解的集合 $S_{n-2q+2p+1}$. 其余的解在直线 $y=0$ 的每一个邻域内只能停留有限时间.

在情形(4)中,用 p 表示实部为负的特征根 λ_i 的个数,用 q 表示实部为正的特征根 λ_i 的个数, 用 s 表示实部=0 的相异特征根 λ_i 的个数. 这时存在一个当 $t \to +\infty$ 时趋于直线 $y=0$ 的解的集合 S_{p+1}, 一个当 $t \to -\infty$ 时趋于 $y=0$ 的解的 S_{q+1} 集合和一个殆周期解的集合 S_{s+1}. 于是存在两个渐近地趋近于殆周期解的集合,即,当 $t \to +\infty$ 时的渐近解的 $p+s$ 维流形和当 $t \to -\infty$ 时的渐近解的 $q+s$ 维流形. 所有其余的解在直线 $y=0$ 的任一邻域中仅能停留有限时间.

情形(5): 如果所有的初等因子均是线性的,则所有的解均是殆周期的(在特殊情况下,全部是周期的或部分是周期的). 相反,如果至少有一个初等因子其次数大于1, 则殆周期解就形成某一超平面而所有其它的解在直线 $y=0$ 的每一个邻域内仅能停留有限时间.

(c) 现在假设

$$\det C = 0, \tag{8.2.11}$$

即设 C 的秩 $<n$. 如果用 d 表示 C 的秩,我们将分别讨论 $d=n-1, n-2, \cdots, 2, 1, 0$ 等各种情况.

总之, O 不再是孤立奇点, 它将属于 S_n 的某一个完全由奇点所构成的 x 的集合 S_k. (对于 $n=2$ 的情形,参看第二章,§1.)

确定出奇点的所有的空间, 然后在那些只含有孤立奇点的方便的子空间中研究轨线的形态,就可以将奇点进行完全的分类.

4. $n=3$ 的(实)情形

在本节最后我们来讨论 Poincaré 线性系统 (Poincaré [1])

$$\dot{x}_l = a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + a_{l,3}x_3, \quad (l=1, 2, 3), \tag{8.2.12}$$

及其轨线在奇点 $O=(0, 0, 0)$ 邻域中的性态, 其中系数 $a_{l,k}(l, k=1, 2, 3)$ 为实常数. 这样我们就可以得到 §2.3 中一般情形的

一个模型.

(a) 如果系统能够化成标准型

$$\dot{x}=\rho_1 x,\ \dot{y}=\rho_2 y,\ \dot{z}=\rho_3 z, \tag{8.2.13}$$

其中 ρ_1, ρ_2, ρ_3 是符号相同的不为零的实常数,我们有

$$x=c_1e^{\rho_1 t},\ y=c_2e^{\rho_2 t},\ z=c_3e^{\rho_3 t}. \tag{8.2.14}$$

因而当 $t\to+\infty$ (如果 $\rho_1<0$, $\rho_2<0$, $\rho_3<0$) 或当 $t\to-\infty$ (如果 $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\rho_3>0$) 时,轨线趋于 O, Poincaré 把 O 点称为结点.

(b) 假设在系统(8.2.13)中 ρ_1, ρ_2, ρ_3 均不为零,但不同号. 例如 $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\rho_3<0$. 如果 $c_3=0$,则由(8.2.14)知对应的轨线属于平面 $z=0$, 且当 $t\to-\infty$ 时都趋于 O: 对于平面 $z=0$, 从而对于 (8.2.13) 中前两个方程所构成的系统, O 点是结点 (参看第二章, §1). 每一条其它的轨线 ($c_3\neq0$), 在点 O 的每一个邻域内仅能停留有限时间. Poincaré 把点 O 称为系统 (8.2.13) 的鞍点.

(c) 在(8.2.13)中如果根 ρ_1 是实的且不为零, 而 ρ_2 与 ρ_3 是一对共轭复根, 即 $\rho_2=r+is$, $\rho_3=r-is(s>0)$, 则该系统的通解能够写成实函数形式

$$\begin{aligned} &x=c_1e^{\rho_1 t},\ y=c_2e^{r(t-t_0)}\cos s(t-t_0),\\ &z=c_2e^{r(t-t_0)}\sin s(t-t_0), \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

其中 c_1, c_2 和 t_0 是任意常数.

假设 $r\neq0$ 且 ρ_1 与 r 同号,例如 $\rho_1>0$, $r>0$. 则对于 $c_2=0$,由(8.2.15)我们得到: $x=c_1e^{\rho_1 t}$, $y=z=0$. 换句话说, 两条半轴 $x>0$ 及 $x<0$ 是轨线. 如果 $c_1=0$, $c_2\neq0$, 对应的轨线属于平面 $x=0$ 且当 $t\to-\infty$ 时螺旋状地环绕点 O 并渐近地趋于它. 所有其余的轨线 ($c_1\neq0$, $c_2\neq0$) 螺旋状地环绕 x 轴, 且当 $t\to-\infty$ 时趋于 O. 这时, Poincaré 把点 O 称为焦点(图 132).

(d) 和 (c) 中一样, 假设 ρ_1 是非零的实数, 且 $\rho_2=r+is$, $\rho_3=r-is(s>0)$, 但现在设 ρ_1 与 r 异号, 例如, $\rho_1>0$, $r<0$.

$c_2=0$ 时,由(8.2.15)可推得两个半轴 $x>0$, $x<0$ 仍然是

两条轨线；当 $c_1=0$ 但 $c_2\neq 0$ 时，我们得到位于平面 $x=0$ 内的轨线，O 点在平面上形如吸引焦点，但它却与所有其它的轨线保持

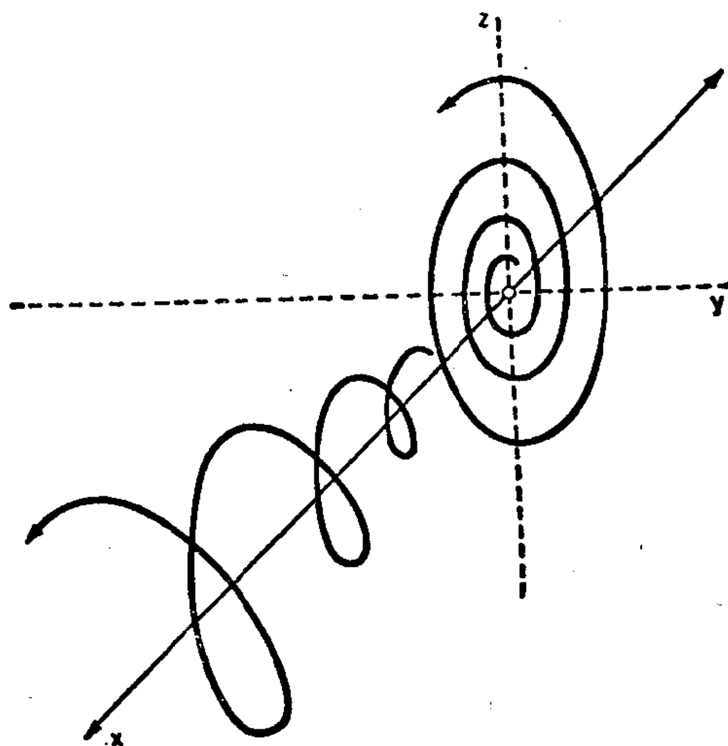


图 132

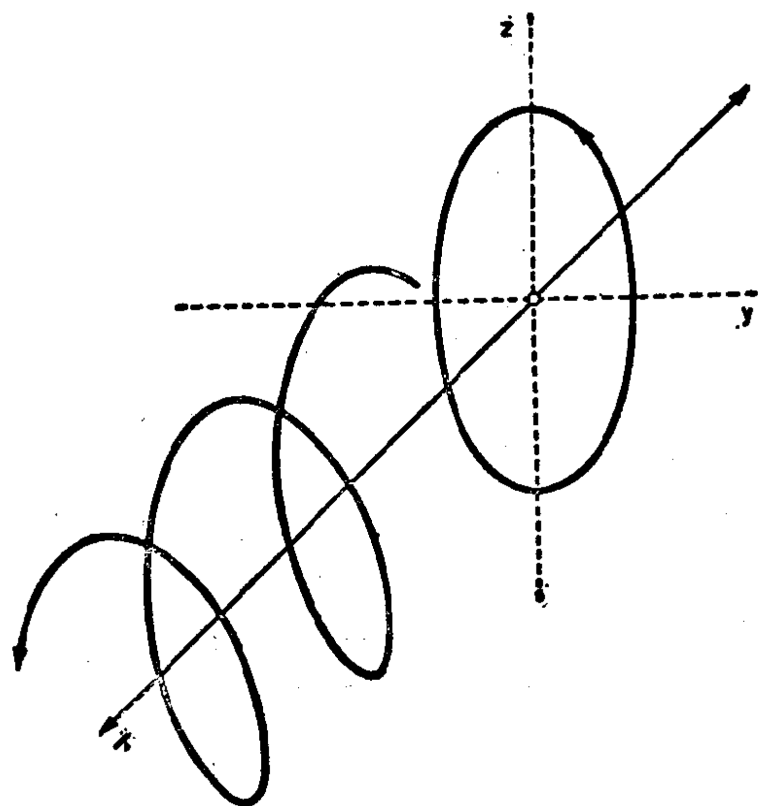


图 133

着正的距离，这时，Poincaré 称点O为鞍焦点.

(e) 最后，假如和(c)，(d)中一样，设ρ_1是非零实数，但$\rho_2 = is$，$\rho_3 = -is(s > 0)$，则两个半轴$x > 0$及$x < 0$，在$c_2 = 0$时仍是该系统的两条轨线；对于$c_1 = 0$，$c_2 \neq 0$，由(8.2.15)我们又得到属于平面$x = 0$的轨线(以O为中心的圆). 所有其它轨线($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$)都在半径为$|c_2|$的环绕x轴的圆柱面上. 并且当$t \to -\infty$时，这些轨线渐近地趋于这个柱面与yz平面的截口. 这时，Poincaré 称点O为中心(图 133).

§3. 线性周期系统

1. 标准基本解矩阵. Floquet 定理和 Lyapunov 定理

(a) 考虑齐次系统

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{8.3.1}$$

其中$A(t)$是连续的、周期的(实的或复的)$n \times n$矩阵，周期为ω(最小周期)，就是说，存在数$\omega > 0$，使得

$$A(t + \omega) = A(t), (-\infty < t < +\infty). \tag{8.3.2}$$

如果$U(t)$是(8.3.1)的 p. f. m(标准基本解矩阵)，则$U(t + \omega)$也是 f. m (基本解矩阵). 因而，存在常数矩阵C(第一章)，使得$U(t + \omega) = U(t)C$.

但当$t = 0$时，$U(0) = I$，从而有

$$U(t + \omega) = U(t)U(\omega). \tag{8.3.3}$$

(b) 因为$U(\omega)$是非退化的，故它有对数(例如，可参看 R. Bellman [1],29—31 页)，也就是说，存在一个用$\log U(\omega)$表示的矩阵，使得

$$e^{\log U(\omega)} = U(\omega). \tag{8.3.4}$$

我们有如下的定理(见 G. Floquet [1]).

定理 2. 如果(8.3.2)成立，则(8.3.1)的 p. f. m 可表为

$$U(t) = P(t)e^{\omega^{-1}t\log U(\omega)} \tag{8.3.5}$$

其中$P(t)$是一个非退化的周期矩阵，且$P(0) = I$.

为了证明这个定理，令

$$P(t)=U(t)e^{-\omega^{-1}t\log U(\omega)}, \tag{8.3.6}$$

则 $P(t)$ 是非退化的. 且由于 $e^{\lambda_1 A+\lambda_2 B}=e^{\lambda_1 A}\cdot e^{\lambda_2 B}$，其中 A，B 均是常数矩阵，λ_1，λ_2 均是常数，我们就有

$$\begin{aligned}P(t+\omega)&=U(t+\omega)e^{-\omega^{-1}(t+\omega)\log U(\omega)}\\&=U(t)U(\omega)e^{-\log U(\omega)}e^{-\omega^{-1}t\log U(\omega)}=P(t).\end{aligned}$$

(c) 我们有如下的定理(见 A. Lyapunov [1]，396—399 页).

定理 3. 设 $P(t)$ 是由(8.3.6)式定义的矩阵，则线性变换

$$y=P(t)z \tag{8.3.7}$$

将周期系统(8.3.1)，(8.3.2)变成自治系统

$$\dot{z}=\omega^{-1}\log U(\omega)z. \tag{8.3.8}$$

为证明这一点，微分(8.3.7)式两端，得 $\dot{P}(t)z+P(t)\dot{z}=A(t)P(t)z$，从而 $\dot{z}=[P^{-1}(t)A(t)P(t)-P^{-1}(t)\dot{P}(t)]z$. 另一方面，我们注意到，如果 C 是常数阵，则 C 与 e^{tC} 可交换，由(8.3.6)可得

$$\begin{aligned}&P^{-1}(t)A(t)P(t)-P^{-1}(t)\dot{P}(t)\\&=e^{\omega^{-1}t\log U(\omega)}U^{-1}(t)A(t)U(t)e^{-\omega^{-1}t\log U(\omega)}\\&\quad-e^{\omega^{-1}t\log U(\omega)}U^{-1}(t)[A(t)U(t)e^{-\omega^{-1}t\log U(\omega)}\\&\quad-\omega^{-1}U(t)\log U(\omega)e^{-\omega^{-1}t\log U(\omega)}]\\&=\omega^{-1}e^{\omega^{-1}t\log U(\omega)}U^{-1}(t)U(t)\log U(\omega)e^{-\omega^{-1}t\log U(\omega)}\\&=\omega^{-1}\log U(\omega).\end{aligned}$$

2. 特征指数. 型数

(a) 在 §3.1 中我们假设 ω 是 $A(t)$ 的一个周期，但并不一定是 $A(t)$ 的最小周期.

因此，如果 $A(t)$ 是常数矩阵，则 ω 可取任何正数. 由于(§ 2)当 $A(t)=C$ 是常数矩阵时，我们有 $U(t)=e^{tC}$，于是，对任意 $\omega>0$，就有 $U(\omega)=e^{\omega C}$，再将它与(8.3.4)比较，就得到 $C=\omega^{-1}\log U(\omega)$.

上述讨论表明，如下的特征指数定义是合理的.

定义 1. 如果 $A(t)$ 满足条件(8.3.2)，则把自治系统(8.3.8)的

特征指数(即矩阵 $\log U(\omega)$ 的特征根除以 ω) 称为系统(8.3.1)的特征指数.

(b) 我们来证明下述定理.

定理 4. 系统(8.3.1), (8.3.2)的特征指数都是且仅是 $U(\omega)$ 的特征根的对数除以 ω.

事实上，因为如果 $A = S^{-1}BS$, 则 $\det[B-\rho I] = \det S^{-1} \det[B-\rho I] \det S = \det[S^{-1}(B-\rho I)S] = \det[S^{-1}BS - \rho S^{-1}IS] = \det[A-\rho I]$; 由此可知,对于任一非退化矩阵 S, 有

$$\det[U(\omega)-\rho I] = \det[e^{\log U(\omega)} - \rho I] = \det[S^{-1}e^{\log U(\omega)}S - \rho I].$$

但是,由于对每一个整数 k, $(S^{-1}RS)^k = S^{-1}R^kS$, 可知, $S^{-1}e^R S = e^{S^{-1}RS}$, 因而

$$\det[U(\omega)-\rho I] = \det[e^{S^{-1}\log U(\omega)S} - \rho I].$$

如果我们选择 S 使得 $S^{-1}\log U(\omega)S$ 是 Jordan 标准型 J,则矩阵 e^J 的主对角线以下的所有元素均为零,而主对角线本身上的元素为 e^{λ_i}, 其中 λ_i 是 J 的特征根[1]. 即是 $S^{-1}\log U(u)S$ 或 $\log U(\omega)$ 的特征根.因而, $\det[U(\omega)-\rho I] = \Pi_i(e^{\lambda_i} - e)^{k_i}$, 结论得证.

(c) 由定理 4 可得,因为 $U(u)$ 的特征根是复数, 因而这些根的对数仅能确定到相差模 $2k\pi_i$, 从而系统(8.3.1)的特征指数仅能确定到相差 $2\pi_i$ 的一个倍数. 但由于这些对数的实部是唯一确定的,故我们可给出如下的定义:

定义 2. 如果 $A(t)$ 满足条件(8.3.2),则(8.3.1)的特征指数的实部,即 $U(t)$ 的特征根的对数的实部除以 ω 称为系统(8.3.1)的型数.

---

1) 如果 J 具有 Jordan 标准形式(§2), 它可表为

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

如果 $A(t)$ 是常数阵，则它的型数就是常数阵 $A(t)=C$ 的特征根的实部(参看，§ 2.2)．

(d) 我们注意到，如果 $A(t)$ 是实的，则 $U(\omega)$ 也是实的．另方面，一般来说 $\log U(\omega)$ 却是复的．这时，注意到 $U(\omega)=\overline{U}(\omega)$ 以及 $U(\omega)\overline{U}(\omega)=U(2\omega)$，为了将(8.3.1)，(8.3.2)化成具有实系数的自治系统，只要作变换

$$Q(t)=U(t)e^{-2^{-1}\omega^{-1}t[\log U(\omega)+\overline{\log U(\omega)}]}$$

就可以了．

$Q(t)$ 是实的且以 2ω 为周期．

(e) 如果我们把 $A(t)$ 连续的假设换成仅假设它在每一个有限区间上可测或 L 可积，则上述结论仍然正确．

(f) 为了求线性自治系统的特征指数，我们必须解方程 $\det(C-\rho I)=0$，其中 C 是系统的系数矩阵，因而是已知的．

当系统不是自治系统而是周期系统时，为了求特征指数，我们就得解方程：

$$\det(U(\omega)-\rho I)=0.$$

其中 J_0 是元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的对角阵．λ_i 不一定互异而 $J_i(i\geqslant 1)$ 则形如 $J_i=\lambda_{k+i}I_{r_i}+Z_{r_i}$，其中 I_{r_i} 是 $r_i\times r_i$ 的单位阵，而 Z_{r_i} 是形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

的 $r_i\times r_i$ 的矩阵．由此立刻可知，

$$e^{J}=\begin{pmatrix} e^{J_0} & & & \\ & e^{J_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s} \end{pmatrix},\quad e^{J_0}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

$$e^{J_i}=e^{\lambda_{k+i}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2! & \cdots & 1/(r_{i-1})! \\ & 1 & 1/2! & \cdots & 1/(r_{i-2})! \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

因而要预先求出 $U(\omega)$，这时计算相当复杂(参看 Sansone [1]，第四章，§2；也可参看 I. A. Artem'ev [1])。

§4. 可 约 系 统

1. 可约系统. 特征指数和型数

(a) 下面定义一类把周期系统，特别是把自治系统包含在内的系统(参看 A. Lyapunov [1], 241—242 页)。

定义 3. 我们说系统

$$\dot{y} = A(t)y \tag{8.4.1}$$

是一个可约系统，(其中 $A(t)$ 对给定的 t_0，在 $t \geqslant t_0$ 上连续)，如果存在 $n \times n$ 的所谓 Lyapunov 矩阵 $S(t)$，它具有下述性质：(1) 在 $t \geqslant t_0$ 上，$S(t)$ 及其导数有定义且连续；(2) $S(t)$ 及其逆 $S^{-1}(t)$ 在 $t \geqslant t_0$ 上均有界：即存在正数 S，使得

$$|S(t)| \leqslant S,\ |S^{-1}(t)| \leqslant S,\ t_0 \leqslant t < +\infty;$$

(3) 关系式

$$\dot{S}(t) + S(t)A(t) - CS(t) = O,\ (O \text{ 为 } n \times n \text{ 零矩阵}), \tag{8.4.2}$$

或

$$\dot{S}(t) + S(t)C - A(t)S(t) = O \tag{8.4.3}$$

成立，其中 C 是常数矩阵.

如果(8.4.2)或(8.4.3)在 $C = O$ 时成立，则称系统(8.4.1)为与零可约的. I. P. Erughin 在他的长文[1]中对可约系统的理论进行了讨论. 也可参看 V. A. Yakubovich [1]. C. E. Langenhop [1] 最近对于定义在整个实 t 轴上的 $A(t)$ 引入了完全可约性的概念.

(b) 在上述定义中采用可约这一术语的原因在于这样一个事实：如果存在 Lyapunov 矩阵，即如果(8.4.1)是可约的，则变换 $y = S(t)z$ (其中 $z = S^{-1}(t)y$) 恰好将系统 (8.4.1) 化成自治系统 $\dot{z} = Cz$.

(c) 注意到 § 3.1 (c)，定理 3 亦可改述为：

定理 3'. 满足条件(8.3.2)的周期系统(8.4.1)，借助于与 $A(t)$

具有相同周期 ω 的 Lyapunov 矩阵 $S(t)$ 是可约的.

(d) 由此我们可给出下述定义:

定义 4. 我们把可约系统(8.4.1)所化成的自治系统之一的特征指数称为可约系统(8.4.1)的特征指数. 可约系统(8.4.1)的型数就是这些特征指数的实部. 这一定义的合理性在下一节中将得到充分肯定, 那时我们要证明型数并不依赖于(8.4.1)的特殊的可约系统.

(e) 如果一个系统是可约的, 则它的伴随系统显然也是可约的.

(f) 可约系统,特别是那些与零可约系统, 将在第九章 § 2 加以讨论.

§ 5. 函数的型数. t-相似关系

1. 函数的型数

(a) 我们已经对一类比较更为一般的系统(自治的, 周期的, 可约的)引入了型数的概念, 现在要把它推广到系统 $\dot{y} = A(t)y$ 上去,其中 $A(t)$ 是连续矩阵. 为此目的, 我们由定义 5 在这里引入函数 $f(t)$ (数或矩阵) 的型数的概念,它是由 O. Perron [1] 提出的.

定义 5. 如果 $f(t)$是定义在 $t_0 \leqslant t < +\infty$上的实变量 t 的函数(数或矩阵),且恒不为零,则我们将数

$$\chi = \chi(f) = \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \log |f(t)|$$

定义为函数 $f(t)$ 的型数. 例如,

$\chi(e^{te^{\sin t}}) = e$, $\chi(e^{-te^{\sin t}}) = -1/e$, $\chi(t^t) = +\infty$, $\chi(t^{-t}) = -\infty$. 如果 $|f| = O(t^m)$, m 是非负的整数,则 $\chi(f) = 0$.

(b) χ 是 $f(t)$ 的型数的充要条件是: 对于每一个 $a > \chi$, $\lim_{t \to +\infty} |f(t)| e^{-at} = 1$,而对每一个 $a \leqslant \chi$, 则存在一发散的序列 $\{t_n\}$ 使得 $f(t_n)e^{-at_n}$ 是发散的.

(c) 如果 $\chi(f) > \chi(g)$, 则 $\chi(f+g) = \chi(f)$; 如果 $\chi(f) =$

$\chi(g)$，则 $\chi(f+g)\leqslant\chi(f)$.

(d) 如果 fg 在 f 和 g 是矩阵时表示行乘以列，而当 f 和 g 是数时它表示普通的积，则 $\chi(fg)\leqslant\chi(f)+\chi(g)$. (符号<可能成立，例如 $f=e^{te^{\sin t}}$, $g=e^{-te^{\sin t}}$). 如果 f 是一个数，n 是非负整数，则 $\chi(f^n)=n\chi(f)$.

(e) 如果 f 是一个数，则 $\chi(f)+\chi(1/f)\geqslant 0$. (符号>可能成立，例如，$f=e^{te^{\sin t}}$). $\chi(f)+\chi(1/f)$ 等于零的充要条件是 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\log|f|$ 存在.

如果 f 是一个数，且 $\chi(f)+\chi(1/f)=0$，则对任一 g (数或矩阵)，$\chi(fg)=\chi(f)+\chi(g)$.

(f) 如果 $\dot F(t)=f(t)$ 并且 $\chi(f)\geqslant 0$，则 $\chi(F)\leqslant\chi(f)$；如果 $\chi(f)<0$ 并且还有 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=0$，则仍有 $\chi(F)\leqslant\chi(f)$.

2. t-相似关系(或运动相似)

(a) 设 $n\times n$ 矩阵 $A(t)$, $B(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 上连续，如果存在具有下述性质的矩阵 $S(t)$：(1) $S(t)$ 及其导数 $\dot S(t)$ 在 $t\geqslant t_0$ 上连续；(2) $S(t)$ 及其逆 $S^{-1}(t)$ 均在 $t\geqslant t_0$ 上有界；(3) 或者关系式

$$\dot S(t)+S(t)A(t)-B(t)S(t)=O$$

成立，或者关系式

$$\dot S(t)+S(t)B(t)-A(t)S(t)=O$$

成立，其中 O 是 $n\times n$ 零矩阵，则仿照 L. Markus [1]，把矩阵 $A(t)$ 与 $B(t)$ 称为**运动相似**或 **t-相似**.

由定义立刻可知，t-相似关系是对称的、自反的和可传递的.

我们说系统

$$\dot y=A(t)y \tag{8.5.1}$$

t-相似于系统

$$\dot z=B(t)z, \tag{8.5.2}$$

如果 $A(t)$ 与 $B(t)$ 是 t-相似矩阵的话.

因而，两个系统是 t-相似的，当且仅当存在一个满足上述定义中条件(1)和(2)的 $S(t)$，使得变换 $z = S(t)y$ (或 $y = S^{-1}(t)z$) 将一个系统的解 y 变成另一个系统的解 z.

(b) 根据 (a) 中的定义可知，可约系统(§4)是 t-相似于自治系统的系统.

3. 非零解的型数

(a) 如果 $y = y(t)$ 是系统

$$\dot{y} = A(t)y \tag{8.5.1}$$

的不为零的解，其中 $A(t)$ 在 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 上连续，依定义 5，对此解可赋予型数

$$\chi(y) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{-1}\log|y(t)|.$$

当 y 在系统 (8.5.1) 的所有解的集合内变化时，数 $\chi(y)$ 形成一个有限集合(下面定理 6)，即系统(8.5.1)的所有型数的集合.

容易验证，如果 (8.5.1) 是自治系统，周期系统或是可约系统，则(8.5.1)的型数就分别是在 §2.2，§3.2 和 §4.1 中所定义的数.

(b) **定理 5.** 系统 (8.5.1) 的型数和任一与它 t-相似的系统的型数相同.

(参看 A. Lyapunov [1]，p. 241. 值得注意的是 Lyapunov 的"示性数"是我们所定义的型数加负号. 也可参看：S. P. Diliberto [1]，14 页；Diliberto 的对应于我们的型数的述语是特征指数；L. Markus [1] 的定理 1 和 2.)

事实上，设(8.5.1)和(8.5.2)是 t-相似系统，$y = y(t)$ 是(8.5.1)的任一解，$z = z(t)$ 是(8.5.2)与之对应的解，即 $z = S(t)y$. 则

$$\chi(z) = \chi(\bar{S}(t)y) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{-1}\log|S(t)y| \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{-1}\log|S(t)|$$

$$+ \overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{-1}\log|y| = \overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{-1}|S(t)| + \chi(y).$$

因为 $S(t)$ 根据假设是有界的，由此可得 $\chi(z) \leqslant \chi(y)$. 另一方面，$y = S^{-1}(t)z$ 和 $S^{-1}(t)$ 根据假设也是有界的，从而 $\chi(y) \leqslant$

$\chi(z)$，于是最后可得 $\chi(y)=\chi(z)$。换句话说，在 t-相似中对应的两个解，对应着相同型数.

(c) **定理 6.** 一个系统的型数的个数不超过 n.

令 $y_1^{(1)},\cdots,y^{(p)}(p\leqslant n)$ 是(8.5.1)的解，并且令 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_p$ 分别是它们的型数. 如果 $\chi_1<\chi_2<\cdots<\chi_p$，这 p 个解是线性无关的，也就是说，$y^{(1)},\cdots,y^{(p)}$ 的任意不恒等于零的线性组合的型数必为数 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_p$ 中的一个. 为了证明这一点，我们注意到，如果 $c_i\neq 0$，则 $\chi(c_iy^{(i)})=\chi_i$. 所以，如果 $c_2\neq 0$ (§5.1 (c))，则 $\chi(c_1y^{(1)}+c_2y^{(2)})=\chi(c_2y^{(2)})=\chi_2$，从而，如果 $c_3\neq 0$，$\chi(c_1y^{(1)}+c_2y^{(2)}+c_3y^{(3)})=\chi_3$，等等. 最后，因为(8.5.1)的 $n+1$ 个解总是线性相关的，故命题得证.

(d) 从 Wazewski 不等式(8.1.7)可以推出

$$\log|y(t_0)|+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\leqslant\log|y(t)|\leqslant\log|y(t_0)|+\int_{t_0}^{t}\Lambda(s)ds,$$

从而对(8.5.1)的每一个解 $y(t)$ 有

$$\varlimsup_{t\to+\infty}t^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\leqslant\chi(y)\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}t^{-1}\int_{t_0}^{t}\Lambda(s)ds. \qquad (8.5.1')$$

4. 正规解组. 数 $S_{\min}$

(a) 考虑

$$\dot{y}=A(t)y \qquad (8.5.1)$$

的某一基本解组.

我们在这里和在 §6 中都假设系统 (8.5.1) 的全部型数均是有限的. 特别地，当 $A(t)$ 在 $t_0\leqslant t$ 上有界时，就出现这种情况(参看 O. Perron [1]，750 页).

属于这基本解组的 n 个解具有 q 个不同的型数，$1\leqslant q\leqslant p$，其中 $p\leqslant n$ 是系统的型数的个数(定理 6).

如果 $q<p$，则这些解的适当的线性组合将确定出系统(8.5.1)的其余 $p-q$ 个型数.

如果所考虑的基本解组具有如下的性质：它的部分或者全部解的任意的非零系数线性组合的型数，都等于在这个非零系数线

性组合中出现的解的最大型数，则称这个基本解组为正规的.(参看 A. Lyapunov [1], 233 页).

例：已知系统 $(n=2)\dot{x}_1=-x_1$, $\dot{x}_2=-2x_2$, 易见在它的两个基本解组

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

中,第一个是正规的,而第二个却不是.

(b) 对系统 (8.5.1) 的任一基本解组 $y^{(1)}, \cdots, y^{(n)}$ 都能确定一个数

$$S=\sum_{i=1}^{n} \chi(y^{(i)}),$$

这个数依赖于同一个基本解组,并随之而变化. 我们将证明,如果解组是正规的,则它的 S 有最小值.

事实上，如果满足条件 $\chi(y^{(1)}) \leqslant \cdots \leqslant \chi(y^{(n)})$ 的解组 $y^{(1)}, \cdots, y^{(n)}$ 不是正规的,则存在线性组合 $x^{(p)}=c_1y^{(1)}+\cdots+c_p\cdot y^{(p)}$, 其中 $c_p \neq 0$, 使得 $\chi(x^{(p)})<\chi(y^{(p)})$ (§5.3). 解组 $y^{(1)}, \cdots, y^{(p-1)}, x^{(p)}, y^{(p+1)}, \cdots, y^{(n)}$ 也是基本的，并且这一解组所对应的数 S 比原解组所对应的 S 小.

因为 S 只能取到有限个值(§5.3 (c)), 在经过有限次上述运算之后，化简手续即告结束，因而最后得到的基本解组必定是正规的.

我们用 $S_{\min}$ 来表示 S 的最小值,它是给定系统(8.5.1)的所有的正规解组的公共的 S 值.

(c) 每一个型数 χ_i 在正规解组中出现的次数对于所有正规解组来说是相同的. 我们称这个数 ν_i 为 χ_i 的重数.

如果把每一个型数的重数算作它们的个数，则我们可以说系统(8.5.1)恰有 n 个型数. 因而,想起由假设 χ_i 是有限的，我们就得到

$$\sum_{i=1}^{p} \nu_i=n, \quad \sum_{i=1}^{p} \nu_i\chi_i=S_{\min}, \tag{8.5.3}$$

其中 p 表示相异型数的总个数.

5. 关于 $S_{\min}$ 的不等式. 非正则常数

(a) 根据第一章 §3.4 (b) 中的 Jacobi-Liouville 公式，对每一个基本解矩阵 $Y(t)$，我们有

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} t_r A(\tau)d\tau\right) = c \det Y(t),$$

其中 c 为一常数. 由此可得 (§5.1, (c), (d)) (另一证明可参看 S. P. Diliberto [1], 14 页),

$$\chi\left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau\right)\right) \leqslant S.$$

并且，由于上式左端与所考虑的基本解矩阵 $Y(t)$ 的取法无关，我们还可得到

$$\chi\left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)\right) \leqslant S_{\min}.$$

但是

$$\chi\left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)\right) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1} \log \left|\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau\right)\right|$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1} \log \exp\left(\mathscr{R}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau\right) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\mathscr{R}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau.$$

因而，我们有

$$S_{\min} \geqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\mathscr{R}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau, \tag{8.5.4}$$

当然也就有不等式

$$S_{\min} \geqslant \underline{\lim}_{t\to+\infty}\, t^{-1}\mathscr{R}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau. \tag{8.5.5}$$

如令

$$S_{\min} - \underline{\lim}_{t\to+\infty}\, t^{-1}\mathscr{R}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau = \sigma,$$

数 $\sigma \geqslant 0$ 称为系统 (8.5.1) 的**非正则常数**.

(b) Lyapunov 所给出的下述例子表明不等式 (8.5.4)，从而 (8.5.5) 可以是严格的不等式.

考虑系统 $(1 \leqslant t < +\infty)$

$$\dot{x}_1 = (\cos\log t)x_1 + (\sin\log t)x_2,$$
$$\dot{x}_2 = (\sin\log t)x_1 + (\cos\log t)x_2,$$

对于它有

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{-1}\mathscr{R}\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(\tau)d\tau = \sqrt{2}.$$

这一系统有两个解

$$\begin{pmatrix} e^{t\sin\log t} \\ e^{t\sin\log t}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{t\cos\log t} \\ -e^{t\cos\log t}\end{pmatrix},$$

它们的型数都是 1. 因为这两个解构成了正规解组，从而可得 $S_{\min} = 1 + 1 = 2 > \sqrt{2}$.

§6. 正 则 系 统

1. 正则系统

(a) 根据 Lyapunov ([1]，第 236 页及以后)的定义，系统

$$\dot{y} = A(t)y \tag{8.6.1}$$

称为正则的，如果

$$S_{\min} = \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\mathscr{R}\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(\tau)d\tau, \tag{8.6.2}$$

即，如果(8.5.5)式中的等号成立，或非正则常数等于零.

(b) § 5 末的例子证明了非正规系统的存在性.

如果能够证明每个自治系统都是正则的，就可以推出正则系统的存在性. 事实上，对于系统 $\dot{y} = Cy$，C 是常数矩阵，如果用 λ_i 表示 C 的特征根，我们就有(参看(8.5.3))：

$$S_{\min} = \sum_i \mathscr{R}\lambda_i = \mathscr{R}\operatorname{tr}C = \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\mathscr{R}\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}C d\tau.$$

更一般地我们还能够证明

定理 7. 可约系统是正则的.

事实上，假设借助于 $y = S(t)z$，(8.6.1)可化为

$$\dot{z} = Cz, \tag{8.6.3}$$

其中 $S(t)$ 是一个 Lyapunov 矩阵. 如果 $S'_{\min}$ 是对应于(8.6.3)的

$S_{\min}$，则根据定理 5 有

$$S_{\min} = S'_{\min}. \tag{8.6.4}$$

另一方面，有

$$S'_{\min} = \mathscr{R}\,\mathrm{tr}C. \tag{8.6.5}$$

但是，如果 $Y(t)$ 是 (8.6.1) 的基本解矩阵，则 $Z(t) = S^{-1}(t) \times Y(t)$ 是 (8.6.3) 的基本解矩阵，从而

$$\det Z(t) = c_1 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\ C d\tau\right)$$

$$= \det S^{-1}(t) \det Y(t) = \det S^{-1}(t) c_2 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(\tau) d\tau\right),$$

并且由于 S 和 S^{-1} 是有界的，从而可得

$$\mathscr{R}\ \mathrm{tr}\ C = \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1} \mathscr{R} \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\ A(\tau) d\tau, \tag{8.6.6}$$

于是从(8.6.4)，(8.6.5)，(8.6.6)便可推出结论.

(c) 下述例子表明，存在不可约的正则系统，换言之，正则系统类比可约系统类更广泛，因而定理 7 的逆定理不成立.

系统 $(n = 1)$

$$\dot{y} = -t^{-1}y, \quad (1 \leqslant t < +\infty) \tag{8.6.7}$$

显然是正则的. 事实上，它的每一个解均具有形状 $y = ct^{-1}$，因而(只要 $c \neq 0$) 它具有非零型数

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \log t = \lim_{t\to+\infty} t^{-1} \mathscr{R} \int_{1}^{t} \mathrm{tr}\ A(\tau) d\tau.$$

但是 (8.6.7) 却是不可约的. 因为，如果存在函数 $S(t)$ 和常数 c 使得 $\dot{S} + cS + t^{-1}S = 0$，就会推出

$$\log S(t)/S(1) = -\int_{1}^{t} (c + \tau^{-1}) d\tau = -c(t-1) - \log t.$$

因而，$S(t) = S(1)t^{-1}e^{-c(t-1)}$，从而，$S(t)$ 与 $S^{-1}(t)$ 就不可能同时有界了.

(d) 由 (8.6.4)，(8.6.2) 可知，如果系统 (8.6.1) 是正则的，则我们有

$$S_{\min} = \lim_{t\to+\infty} t^{-1} \mathscr{R} \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\ A(\tau) d\tau,$$

反之亦然。

2. Perron 定理

我们在这里以及在 §6.3 中所给出的某些定理的证明，建议读者参看原始论文。特别是我们将提到 O. Perron 的两个定理.

关于下述的定理可参看 O. Perron [1] 的定理 3，也可参看 S. P. Diliberto [1] 的定理 B.

定理 8. 如果 $\chi_1 \leqslant \chi_2 \leqslant \cdots \leqslant \chi_n$ 是系统

$$\dot{y} = A(t)y \tag{8.6.1}$$

的型数，而 $\chi'_1 \geqslant \chi'_2 \geqslant \cdots \chi'_n$ 是伴随系统

$$\dot{z} = -A'z$$

的型数，则

$$\chi_i + \chi'_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{8.6.8}$$

下述定理可参看 O. Perron [1] 的定理 4，也可参看 S. P. Diliberto [1] 的定理 C.

定理 9. 如果 (8.6.1) 是正则的，则其伴随系统也是正则的. (8.6.1) 是正则的充要条件是 (8.6.8) 式中的等号成立，即

$$\chi_i + \chi'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{8.6.9}$$

3. 三角形矩阵

下述定理可参看 A. Lyapunov [1]，第 237 页.

(a) **定理 10.** 如果矩阵 $A(t)$ 是三角形的，即对于 $k > i$ 有 $a_{i,k}(t) = 0$，则 (8.6.1) 是正则的充要条件是存在有限极限

$$\gamma_i = \lim_{t \to +\infty} t^{-1} \mathscr{R} \int_{t_0}^{t} a_{ii}(\tau).$$

这时 γ_i 是系统(8.6.1)的型数.

(b) 上述定理 10 论及少数几种情形之一，在这一情形中，可以用简单的方法求得给定系统的型数.

鉴于型数关于 t-相似关系的不变性，我们就易于理解下述定理在确定具有非三角形矩阵的系统的型数问题中的重要性. (参

看 O. Perron [2], 465—473 页; 也可参看 S. P Diliberto [1], 定理 1. 2,[2]; 与 R. E. Vinograd [1].)

定理 11. 任一(复)矩阵 $A(t)$ 总能 t-相似于一个其元素 $b_{i,i}$ 为实的三角形矩阵 $B(t)$, 即存在一满足 § 5.2 中的条件的 $S(t)$, 使得

$$\dot{S}(t)+S(t)B(t)-A(t)S(t)=0,$$

其中 $B(t)$ 是三角形矩阵, $b_{i,i}$ 是实数.

并且, $S(t)$ 可以取为正交阵. 同时, 只要 $A(t)$ 有界, $B(t)$ 也有界.

(c) 与本节材料有关的其它论文, 可参看 V. P. Basov [1], Yu. S. Bogdanov [1], B. F. Bylov [1], J. C. Lillo [1], K. P. Persidskii [1], S. N. Shimanov [1], R. E. Vinograd [1], [2].

§ 7. 周 期 解

1. 线性齐次系统

(a) 线性齐次系统

$$\dot{y}=A(t)y \tag{8.7.1}$$

总有一个周期解, 即平凡解.

现在我们希望建立当 $A(t)$ 是周期矩阵, 即对某一 $\omega>0$ 有

$$A(t+\omega)=A(\omega) \tag{8.7.2}$$

时, 使 (8.7.1) 有非平凡周期解的条件.

为此, 暂且不假定(8.7.2). 我们注意到, 因为对于(8.7.1)的任一解 $y(t)$, 有 $y(t)=U(t)y(0)$, 其中 $U(t)$ 照例表示标准基本解矩阵, 由此可知, 如果 $y(t)$ 对每一个 $\omega'>0$ 有 $y(\omega')=y(0)$, 则也有 $(U(\omega')-I)y(0)=0$. 而如果 $y(0)\neq 0$, 则 $\det[U(\omega')-I]=0$. 反之亦然. 换言之, 我们有如下的定理.

定理 12. 对于 $\omega'>0$, 系统 (8.7.1) 有满足条件 $y(\omega')=y(0)$的非平凡解的充分且必要条件是方程

$$\det[U(\omega')-\rho I]=0 \tag{8.7.3}$$

至少有一个根 $\rho = 1$.

(b) 我们注意到，对于(8.7.1)的伴随系统，方程(8.7.3)可写成 $\det[Z(\omega') - \rho I] = 0$,其中 $Z(t)$ 表示 $U(t) = (\bar{U}(t))^T$ 的逆.因而,这一方程的根是(8.7.3)的根的共轭复数的倒数. 又由于数 1 就是其自身的共轭复数的倒数,故系统(8.7.1)及其伴随系统或者同时有或者同时都没有在 $t = 0$ 和 $t = \omega'$ 时取相同值的非平凡解.

(c) 如果(8.7.2)式成立,由于关于初值问题解的唯一性定理,由定理 12 可知,存在周期为 $\omega' = k\omega$ (k 是正整数)的非平凡解的充要条件是方程

$$\det[U(k\omega) - \rho I] = 0 \tag{8.7.4}$$

至少有一个根等于 1.

但根据 (8.7.2) 我们有 (§3) $U(t + \omega) = U(t)U(\omega)$, 从而 $U(k\omega) = U^k(\omega)$, (8.7.4) 也就可以写为

$$\det[U^k(\omega) - \rho I] = 0.$$

另一方面，如果 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ 表示 ρ 的 k 个根，于是有分解式 $U^k - \rho I = (U - \sigma_1 I)\cdots(U - \sigma_k I)$, 从而有下面的推论.

推论 1. 如果(8.7.2)式成立，则对于事先指定的正数 k，系统(8.7.1)有周期为 $k\omega$ 的非平凡解的充要条件是：方程

$$\det[U(\omega) - \sigma I] = 0 \tag{8.7.5}$$

的根中至少包含一个 k 重单位根.

因为只要 (8.7.2) 式成立，$\omega^{-1}\log|\sigma|$ (其中 σ 是 (8.7.5) 的一个根)就是(8.7.1)的一个型数 (§3)，于是我们有

推论 2. 如果 (8.7.2) 式成立,则 (8.7.1) 有周期为 $k\omega$ (k 是任一正整数)的非平凡解的必要条件是,它至少有一个型数等于零.

2. 线性非齐次系统

(a) 线性非齐次系统

$$\dot{x} = A(t)x + a(t) \tag{8.7.6}$$

可能没有周期解， 其中 $a(t)$ 不恒为零. 例如，系统 $\dot{x} = 1$,

$(n=1)$.

为了求出(8.7.6)有周期解的条件，我们回想(8.7.6)的通解可以表为

$$x(t)=U(t)x(0)+b(t), \tag{8.7.7}$$

其中

$$b(t)=\int_0^t U(t)U^{-1}(t)a(\tau)d\tau. \tag{8.7.8}$$

从而，我们有

定理 13. 对于给定的 $\omega'>0$，(8.7.6) 有满足条件 $x(\omega')=x(0)$ 的解 $x(t)$ 的充要条件是方程组

$$[U(\omega')-I]x^0=-b(\omega') \tag{8.7.9}$$

有解 x^0.

(b) 现在假设，除

$$A(t+\omega)=A(t),\ (-\infty<t<+\infty)$$

外，还有

$$a(t+\omega)=a(t),\ (-\infty<t<+\infty). \tag{8.7.10}$$

由于对初值问题解的唯一性条件成立，从定理 13 可推出如下的推论.

推论 1. 如果 (8.7.2) 与 (8.7.10) 成立，则系统 (8.7.6) 具有周期为 $k\omega$ (k 为正整数)的解的充要条件是：方程组

$$[U(k\omega)-I]x^0=-b(k\omega) \tag{8.7.11}$$

有解 x^0.

(c) 上述推论可以另述成如下的形式（参看 J. L. Massera [1]).

定理 14. 如果 (8.7.2)，(8.7.10) 式成立，则 (8.7.6) 有周期为 ω 的解的充要条件是：它的解中至少含有一个当 $t\to+\infty$ 时有界的解.

必要性是明显的. 我们用反证法来证明其充分性. 为此，假定 (8.7.6) 没有周期为 ω 的解. 于是，根据推论 1，方程组 $[U(\omega)-I]x^0=-b(\omega)$ 无解. 所以，存在一个常数列矩阵 z，使

得

$$z^T[U(\omega) - I] = O, \tag{8.7.12}$$

其中 O 是 $1\times n$ 零矩阵，而

$$z^T b(\omega) \neq 0. \tag{8.7.13}$$

如果 T 表示变换 $x_1 = U(\omega)x_0 + b(\omega)$，并将它应用 m 次，就得到

$$x_m = T^m x_0 = U^m(x_0) + [U^{m-1}(\omega) + \cdots + I]b(\omega).$$

于是，只要用 z^T 乘以上式并应用由(8.7.12)所推出的关系 $z^T U(\omega) = z^T$，就得到 $z^T x_m = z^T x_0 + m z^T b(\omega)$。但是，由(8.7.13)可以推出当 $m \to +\infty$ 时，$z^T x_m \to +\infty$。然而这是不可能的。因为如果将 x_0 取为有界解 $x(t)$ 的点 $x(0)$，则由此可知，$x_m = x(m\omega)$ 是有界的。

(d) 推论 1 可表为如下的另一种形式。

由线性代数知道，方程组(8.7.11)有解的充要条件是：对每一个满足

$$[U(k\omega) - I]' z^0 = 0$$

的 z^0，均有

$$b'(k\omega) z^0 = 0.$$

这两个等式可分别写成

$$\int_0^{k\omega} a'(s) U'^{-1}(s) U'(k\omega) z^0 ds = 0$$

与

$$U'(k\omega) z^0 = z^0;$$

从而

$$\int_0^{k\omega} a'(s) U'^{-1}(s) z^0 ds = 0.$$

由于，$U'^{-1}(s) z^0$ 是伴随系统

$$\dot{z} = -A'(t) z \tag{8.7.14}$$

的周期为 $k\omega$ 的解。推论 1 可重述如下：

推论 2. 系统(8.7.6)(满足周期性条件(8.7.2)，(8.7.10))有周期为 $k\omega$ 的解的充分且必要条件是，对于伴随系统(8.7.14)的每

一个周期为 $k\omega$ 的解 $z(t)$, $a(t)$ 满足方程

$$\int_0^{k\omega} a'(s)z(s)ds = 0. \tag{8.7.15}$$

因而存在三种可能性.

(i) 平凡解是 (8.7.1) 的唯一的以 $k\omega$ 为周期的解，伴随系统也同样如此. 因而，对于满足 (8.7.10) 的 $a(t)$, (8.7.15) 显然成立. (8.7.11)仅有解 $x^0 = -[U(k\omega) - I]^{-1}b(k\omega)$, 从而(8.7.6)的唯一的以 $k\omega$ 为周期的解就是

$$x(t) = -U(t)[U(k\omega) - I]^{-1}b(k\omega) + b(t).$$

(ii) (8.7.1) 及其伴随系统 (8.7.14) 均有周期为 $k\omega$ 的非平凡解，同时 (8.7.15) 式成立. 于是(8.7.6)具有一族周期为 $k\omega$ 的解.

(iii) (8.7.1) 及其伴随系统均有周期为 $k\omega$ 的非平凡解，但 $a(t)$ 不满足(8.7.15). 于是(8.7.6)不存在周期为 $k\omega$ 的解，或者等价地，(8.7.6)的所有解都是无界的(定理 14).

这就是已在第七章 § 1.1 的特例中碰到过的所谓共振情况. (参看 W. B. Fite [1], F. Underwood [1].)

3. 拟线性周期系统调和解的存在性

所谓拟线性微分方程组是指形如

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x) \tag{8.7.16}$$

的系统，其中 $g(t, x)$ 是在整个 t, x 空间上有定义且连续的 n-列向量. 并满足某种意义下的"弱"非线性条件，这我们在以后将加以说明.

假设 $A(t)$ 是一个定义在整个 t 轴上连续的 $n \times n$ 矩阵，同时 $A(t)$, $g(t, x)$ 均以 ω 为周期，即

$$A(t + \omega) = A(t), \tag{8.7.2}$$

$$g(t + \omega, x) = g(t, x). \tag{8.7.17}$$

(8.7.16) 的周期为 $k\omega$ (k 是≥1的整数)的解的存在性问题，可以用类似于对线性系统所用的方法来处理. 为简单起见，我们只指出 $k = 1$ 的情况(调和解的存在性).

$Y(t)$ 照例表示简化线性系统

$$\dot{y} = A(t)y \tag{8.7.1}$$

的基本解矩阵.

容易验证，(8.7.16)的每一个解也是

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(0)x(0) + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(s)g(s, x(s))ds \tag{8.7.18}$$

的解，反之亦然.

另一方面，如果 $x(\omega) = x(0)$，则 $x(t)$ 是一个调和解，反之亦然；因而，这样的解必满足(8.7.18)以及

$$[Y(\omega)Y^{-1}(0) - I]x(0) + \int_0^\omega Y(\omega)Y^{-1}(s)g(s, x(s))ds = 0, \tag{8.7.19}$$

反之亦然. 所以，我们必须求解含有两个非线性积分方程(8.7.18)，(8.7.19)的方程组.

首先我们假定

$$D = Y(\omega)Y^{-1}(0) - I$$

是非退化的，这相当于假定(8.7.1)除平凡解外没有调和解.

从(8.7.19)可得

$$x(0) = -D + \int_0^\omega Y(\omega)Y^{-1}(s)g(s, x(s))ds,$$

将它代入(8. 7. 18)，得到

$$x(t) = \int_0^\omega G(t, s)g(s, x(s))ds, \tag{8.7.20}$$

其中 $G(t, x)$ 是如下定义的 Green 矩阵：

$$G(t, s) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)Y^{-1}(0)D^{-1}Y(\omega)Y^{-1}(s), \\ \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega, \\ -Y(t)Y^{-1}(0)D^{-1}Y(\omega)Y^{-1}(\omega), \\ \qquad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \omega. \end{cases}$$

为简单起见，假设 $g(t, x)$ 是有界的：

$$|g(t, x)| \leqslant r, \tag{8.7.21}$$

方程(8.7.20)能够用各种方法求解，例如用泛函分析方法.

事实上，容易证明：如果(8.7.21)式成立，则算子

$$Tx = \int_0^{\omega} G(t, s)g(s, x)ds$$

把在 $[0, \omega]$ 上连续的 n-列向量 $x = x(t)$ 的 Banach 空间映射入其自身，其中 $x(t)$ 的模取为 $\max \|x\|$，且这算子是紧的和连续的．此外还将球

$$\max \|x\| \leqslant \omega\Gamma\gamma.$$

映入其自身，其中 Γ 是一个大于 $|G(t, s)|(t, s \in [0, \omega])$ 的常量．根据一条著名的定理(参看 J. Schauder [1])，即可知存在不动点 x 使得 $Tx = x$.

可以用各种方法大大减弱条件(8.7.21)；例如，我们可以假设存在某对正数 γ, γ_r, 使得

$$|g(t, x)| \leqslant \gamma_r, \ (\|x\| < \gamma),$$

及

$$\omega\Gamma\gamma_r \leqslant \gamma$$

成立.

在这些假定下算子 T 将球 $\max \|x\| \leqslant \gamma$ 映射到含于其内的球 $\max \|x\| < \omega\Gamma\gamma_r$ 之中，仍然可知存在不动点.

当 D 是退化的时候(即当(8.7.1)有非零调和解时)，为了证明(8.7.16) 存在调和解，可用广义 Green 矩阵将问题化成求解一个积分方程(参看 W. T. Reid [1], D. C Lewis [1], Smogorzhevskii [1])．这时必须附加某个相容性条件，在某种意义上来说，这一条件相当于在线性系统中所碰到的条件 (8.7.15)．详细的讨论，见 I. Barbalat-A. Halanay [1], R. Conti [1], J. Cronin [1]． 很多作者都使用泛函分析方法来证明调和解的存在性．例如，见 M. A. Krasnoseli'skii [1]; 对于 $n = 2$ 的情形，见 J. Cecconi [1], F. Stoppelli [1], M. Volpato [1].

在适当的假设下，方程 (8.7.20) 也可以用能够计算出周期解的技巧来求解，如象逐次逼近法．(参看 M. Muller [1].)

补　　充

型数的稳定性

给定线性系统

$$\dot{y}=A(t)y.$$

在本章内我们已经看到，只在极特殊情况下，它的型数才可以不积分该系统而直接由 $A(t)$ 确定．因而，确定当 $A(t)$ 发生很小变化时其型数是否保持不变是很有意义的．不幸的是，人们看到（K. P. Persidskii [1]，I. G. Markin [1]，§ 80），$A(t)$ 的任意微小的变化都可能引起型数的有限变化．因而就提出了这样的问题，要确定出哪种系统的类型，它的型数在某种意义上是稳定的．$A(t)$ 是常数的系统就是这样的类型之一，从而当 $A(t)$ 是可约的，特别是周期的系统也是这样的类型（K. P. Persidskii [1].）．这对于正则系统就不再正确了，除非再加些补充条件（I. G. Markin [1]，§ 81；B. F. Bylov [1]；D. I. Grobman [1]；Yu. S. Bogdanov[2]）．

参 考 文 献

ARTEM'EV, I. A.

[1] A method for the determination of the characteristic exponents and an application to two problems of celestial mechanics, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **8** (1944) (Russian).

BARBALAT, I. and HALANAY, A.

[1] Solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles non linéaires, *Revue Math. pures et appl. (R.P.R.)*, **3** (1958), 395–411.

BASOV, V. P.

[1] On the structure of solutions of regular systems, *Vestnik Leningr. Gosud. Univ.*, **12** (1952), 3–8 (Russian).

BELLMAN, R.

[1] *Stability theory of differential equations*, New York, 1953.

BOGDANOV, IU. S.

[1] Characteristic numbers of a system of linear differential equations, *Mat, Sbornik*, **41** (1957), 481–498 (Russian).

[2] Remarks to § 31 of the Monograph "Theory of Stability of motion" by I. G. Malkin, Gostekhizdat, 1952, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **20** (1956), 448 (Russian)

BUTLEWSKI, Z.

[1] Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires ordinaires, *Studia Math.*, **10** (1948), 40–47.

BYLOV, B. F.

[1] On the characteristic numbers of the solutions of systems of linear differential equations, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **14** (1950), 341–352 (Russian).

CECCONI, J.

[1] Su di una equazione differenziale non lineare di secondo ordine, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (3) **4** (1950), 245–278.

CESARI, L.

[1] *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Ergebnisse d. Math., Heft 16, Berlin, 1959.

CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N.

[1] *Theory of ordinary differential equations*, New York, 1955.

CONTI, R.

[1] Equazioni differenziali ordinarie quasilineari con condizioni lineari, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **57** (1961), 49–61.

CRONIN, J.

[1] Poincaré's perturbation method and topological degree, *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, vol. **5** (1960), 37–54.

DILIBERTO, S. P.

[1] On systems of ordinary differential equations, *Contr. to the theory of nonl. oscill.*, vol. 1 (1950), 1–38.

[2] A note on linear ordinary differential equations, *Proc. Am. Math. Soc.*, **8** (1957), 462–464.

ERUGIN, N. P.

[1] *Reducible systems*, Trudy Inst. Steklov, XIII, 1946 (Russian).

FITE, W. B.

[1] Periodic solutions of linear differential equations, *Ann. of Math.*, (2) **28** (1926), 59–64.

FLOQUET, G.

[1] Sur les équations différentielles linéaires à coéfficients périodiques, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, (2) **12** (1883), 47–89.

GROBMAN D. M.

[1] Characteristic exponents of almost linear systems, *Mat. Sbornik*, **30** (72), (1952), 121–166. (Russian).

HAMBURGER, H. L. and GRIMSHAW, M. E.

[1] *Linear transformations in n-dimensional vector space*, Cambridge Univ. Press, 1951.

JULIA, G.

[1] *Introduction mathématique aux théories quantiques*, Cah. Sci. XVI, Paris, 1936.

KITAMURA, T.

[1] Some inequalities on a system of solutions of linear simultaneous differential equations, *Tohoku Math. J.*, **49** (1943) 308–311.

KRASNOSEL'SKII, M. A.

[1] On the application of functional analytical methods to problems of non-linear oscillations, *Trudy 3-go Vsesoyuz. Mat. S''yezda*, **3** (1956), 261–268 (Russian).

LANGENHOP, C. E.

[1] On bounded matrices and kinematic similarity, *Trans. Am. Math. Soc.*, **97** (1960), 317–326.

LEWIS, D. C.

[1] On the role of first integrals in the perturbation of periodic solutions, *Ann. of Math.*, **63** (1956), 535–548.

LIAPUNOV, A.

[1] *Probléme général de la stabilité du mouvement*, *Ann. of Math. Studies*, 17, Princeton, 1949.

LILLO, J. C.

[1] Continuous matrices and the stability theory of differential systems, *Math. Zeitsch.*, **73** (1960), 45–58.

MALKIN I. G.

[1] *Theorie der Stabilität einer Bewegung*, R. Oldenburg, München, 1959.

MARKUS, L.

[1] Continuous matrices and the stability of differential systems, *Math. Zeitsch.*, **62** (1955), 310 319.

MASSERA, J. L.

[1[The existence of periodic solutions of systems of differential equations, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 457–475.

MÜLLER, M.

[1] Über die Existenz periodischer Lösungen bei gewissen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, *Math. Zeitsch.*, **48** (1942), 128–135.

PERRON, O.

[1] Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungensysteme, *ibid.*, **31** (1929), 748–766.

[2] Über eine Matrixtransformation, *ibid.*, **32** (1930), 465–473.

PERSIDSKII, K. P.

[1] On the characteristic numbers of differential equations, *Izv. Akad. Nauk KazSSR*, **42** (1947), 5–47 (Russian).

POINCARÉ', H.

[1] *Oeuvres*, t. 1, p. 160, p. 178.

REID, W. T.

[1] Generalized Green's matrices for compatible systems of differential equations, *Am. J. Math.*, **53** (1931), 443–459.

SANSONE, G.
[1] *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 1, Cap. V.
SCHAUDER, J.
[1] Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **2** (1930), 171–180.
SHIMANOV, S. N
[1] On the searching for characteristic exponents of a system of linear differential equations with periodic coefficients *Prikl. Mat. i Mekh.*, **22** (1958), 382–385 (Russian).
SMOGORZHEVSKII, A
[1] Les fonctions de Green des systèmes différentiels linéaires dans un domaine à une seule dimension, *Rec. Math. Moscou*, **7** (1940), 179–196.
STOPPELLI, F.
[1] Su un'equazione differenziale della meccanica dei fili, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Soc. Naz. Sci. Lett. Arti, Napoli*, (4) **19** (1952).
TOYAMA, H.
[1] Some inequalities in the theory of linear differential equations, *Tohoku Math. J.*, **47** (1940), 210–216.
UNDERWOOD, F.
[1] Note on periodic solutions of linear differential equations, *Ann. of Math.*, (2) **31** (1930), 655–656.
VINOGRAD, R. E.
[1] A new proof of Perron's theorem and some properties of regular systems, *Uspekhi Mat. Nauk*, IX, **2** (60), (1953), 129–136 (Russian).
[2] A necessary and sufficient condition on the behavior of solutions of a regular system, *Mat. Sbornik*, **38** (1956), 23–50 (Russian).
[3] Instability of the characteristic exponents of regular systems, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, *91* (1953), 999–1002 (Russian).
[4] A negative answer to the question of stability of characteristic exponents of a regular system, *Prikl. Mat. i Mekh.*, *17* (1953), 645–650 (Russian).
VOLPATO, M.
[1] Sull'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **25** (1956), 371–385.
WAZEWSKI, T.
[1] Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires, *Studia Math.*, **10** (1948), 48–59.
WINTNER, A.
[1] Asymptotic integration constants, *Am. J. Math.*, **68** (1946), 553–559.
YAKUBOVICH, V. A.
[1] Some reducibility criteria for systems of differential equations, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **66** (1949), 577–580 (Russian).

第九章 稳 定 性

§1. V函数方法

1. 引言

(a) 整个这一章我们将主要讨论稳定性，偶而也涉及到一些在前几章的许多特例中经常遇到的其它渐近性态，诸如有界性和最终有界性.

各种形式的稳定性问题，可以按几种不同的方法进行研究，而其中最重要的要算 Lyapunov 第一方法和第二方法以及所谓按一次近似判定稳定性方法.

最后这个方法我们将在 §3 中详细讨论. 相反地，我们将不讨论 Lyapunov 第一方法，因为它纯属解析性质. 有关它的内容可参阅 Lyapunov 的基本论文[1]或 S. Lefschetz [1] (第五章，§4)，L. Cesari [2] (99—101 页)和 V. I. Zubov [1] (第三章)诸书中的较新近的论述.

Lyapunov 第二方法(也称"直接方法")是本章的主题，它基于系统地运用某些纯量函数，即 Lyapunov 函数，可以在关于平衡稳定性的 Lagrange 定理的位势函数中找到它的模型. Lyapunov 最初的成果包括四个定理，用适当的 V 函数给出了关于稳定性，渐近稳定性以及不稳定性的充分条件.

这个基本思想的重要性被明显地忽视了大约四十年，直到 1930 年后，才由 I. G. Malkin, N. G. Chetayev, K. P. Persidskii 等人的工作唤起了数学家们的兴趣，从此开始发表了几百篇论文和出版了 N. G. Chetayev [4], I. G. Malkin [6], V. I. Zubov [2], W. Hahn [1], N. N. Krasovskii [4]等人的一大批著作. H. A. Antosiewicz [2]对于 Lyapunov 第二方法作了一个非常有益的综合报告.

与此同时，V 函数的应用已扩展到稳定性以外的其它领域．但相当奇怪的是，这样的V 函数与 Lyapunov 函数之间的密切关系并不总能被人们所认识．

我们在这里要利用 V 函数来讨论稳定性及其它的渐近性质，把 Lyapunov 的经典定理包含在一个比较广的体系之中．我们的讨论将紧密地按照 C. Corduneanu [4] 新近的一篇文章的内容进行(也可参看 G. I. Mel'nikov [1])．

(b) 今后我们将讨论方程

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{9.1.1}$$

其中 f 是定义在半直线 I: $T \leqslant t$, 与开集 S_r: $0 \leqslant |x| < r$, $r \leqslant +\infty$ 的乘积 $I \times S_r$ 上的实 n-向量．显然，假定 $T = 0$ 不是真正的限制，因为我们总可以用 $t-T$ 代替 t 而并不在实质上改变 (9.1.1)，所以今后就假设 I: $0 \leqslant t$.

我们还假设 f 是连续的，并且通过 $I \times S_r$ 上的每一点 (t_0, x^0)，存在唯一解，记为 $x = x(t, t_0, x^0)$．例如只要 f 属于 C^1 类，就能办到这一点．

在研究位于已知解 $x = \varphi(t)$ 的邻域中的解的性态时，不失一般性，可以假设

$$f(t, 0) = 0, \tag{9.1.2}$$

且 $x = \varphi(t)$ 就是 (9.1.1) 的零解．这是因为，变量代换 $x = y + \varphi(t)$ 将 (9.1.1) 的解变成方程

$$\dot{y} = g(t, y)$$

的解，其中 $g(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$，所以 $g(t, 0) = 0$，而解 $x = \varphi(t)$ 变成了零解．因而，从现在起我们就在条件 (9.1.2) 之下来研究系统 (9.1.1) 的零解的性质．

2. V 函数

下面我们要讨论定义在 $I \times S_r$ 上的实函数 $V(t, x)$，它满足局部 Lipschitz 条件(至少关于 x)．$V(t, x)$ 进一步所满足的某些假设待以后说明．对于任意的这样的函数 $V(t, x)$，通过 f 我们

可以定义如下的一对函数:

$$\underline{W}(t, x) = \underline{\lim_{h\to 0+}}[V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)]/h, \quad (9.1.3)$$

$$\overline{W}(t, x) = \overline{\lim_{h\to 0+}}[V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)]/h, \quad (9.1.4)$$

根据 Lipschitz 条件，容易证明: 对于每一点 $(t_0, x^0) \in I \times S_r$, $\underline{W}(t_0, x^0)$ 与 $V(t, x(t, t_0, x^0))$ 在 $t = t_0$ 点的右方下导数相等,就是说,与

$$[V(t_0+h, x(t_0+h, t_0, x^0)) - V(t_0, x^0)]/h$$

当 $h \to 0+$ 时的下极限相等.

事实上,上式可以写成

$$u = \left[V\left(t_0 + h, x^0 + \int_{t_0}^{t_0+h} f(s, x(s))ds\right)\right.$$

$$\left. - V(t_0 + h, x^0 + hf(t_0, x^0))\right]/h$$

与

$$v = [V(t_0 + h, x^0 + hf(t_0, x^0)) - V(t_0, x^0)]/h$$

的和. 并且根据 Lipschitz 条件有

$$|u| \leqslant L\left|\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} f(s, x(s))ds - f(t_0, x^0)\right|,$$

从而由 f 的连续性,当 $h \to 0_+$ 时, $\lim u = 0$. 从不等式

$$\underline{\lim}\, u + \underline{\lim}\, v \leqslant \underline{\lim}(u+v) \leqslant \overline{\lim}\, u + \underline{\lim}\, v$$

就得到

$$\underline{\lim}\, v \leqslant \underline{\lim}(u+v) \leqslant \underline{\lim}\, v,$$

从而结论得证.

特别地,如果 $V(t, x)$ 属于 C^1 类,则 $\underline{W}(t, x)$ 和 $\overline{W}(t, x)$ 均与

$$W(t, x) = V_t(t, x) + \sum_{i=1}^{n} V_{x_i}(t, x)f_i(t, x) = V_t + V_x'f, \quad (9.1.5)$$

相等,其中 V_t, V_{x_i} 表示V的偏导数而 $V_x'f$ 是V的梯度 $V_x = \mathrm{grad}\, V$ 与 f 的数量积. 当V是二次型

$$V(t, x) = x'D(t)x \tag{9.1.6}$$

时，其中 $D' = D$ 是可微的 $n \times n$ 矩阵，就有这种情况．这时 $V_x = 2Dx$ 而

$$W(t, x) = x'\dot{D}x + 2x'Df.$$

如果 f 是线性的，$f(t, x) = A(t)x$，则

$$W(t, x) = x'[\dot{D} + 2DA]x \tag{9.1.7}$$

也是一个二次型．$D = I$($n \times n$ 单位阵)是更为特殊的情况，这时我们有

$$V(t, x) = x'x = \|x\|^2 \tag{9.1.8}$$

和

$$W(t, x) = x'(A + A')x. \tag{9.1.9}$$

3. T. Wazewski 引理

下面的引理是 T. Wazewski 的一个比较一般的结果的一个特殊情形，在后面我们将反复地引用它．

引理．设 $\omega(t, u)$ 是定义在 (t, u) 平面内的集合 Ω_r: $0 \leqslant t$, $0 \leqslant u < r \leqslant +\infty$ 上的连续函数．设 (t_0, u^0) 是任一点，$0 \leqslant t_0$, $0 < u^0 < r$，而 $u = \psi(t)$ 是定义在 $t_0 \leqslant t < t_1$ 上的连续函数并且满足

$$\psi(t_0) \leqslant u^0, \tag{9.1.10}$$

$$\underline{D}_+\psi(t) \leqslant \omega(t, \psi(t)), \quad t_0 < t < t_1, \tag{9.1.11}$$

(其中 $\underline{D}_+\psi$ 表示 ψ 的右方下导数)．则只要

$$\dot{u} = \omega(t, \omega) \tag{9.1.12}$$

的通过点 (t_0, u^0) 的最大解(在右侧) $u = u_M(t, t_0, u^0)$ 在 $t_0 \leqslant t < t_1$ 上存在，则有

$$\psi(t) \leqslant u_M(t, t_0, u^0), \quad t_0 \leqslant t < t_1. \tag{9.1.13}$$

如果将(9.1.10)及(9.1.11)代之以

$$\psi(t_0) \geqslant u^0, \tag{9.1.14}$$

$$\overline{D}_+\psi(t) \geqslant \omega(t, \psi(t)), \quad t_0 < t < t_1, \tag{9.1.15}$$

(其中 $\overline{D}_+\psi$ 表示 ψ 的右方上导数)，并且，只要(9.1.12)的通过点

(t_0, u^0) 的最小解(在右侧) $u = u_m(t, t_0, u^0)$ 在 $t_0 \leqslant t < t_1$ 上存在，则 (9.1.13) 就代之以

$$\psi(t) \geqslant u_m(t, t_0, u^0), \quad t_0 \leqslant t < t_1. \tag{9.1.16}$$

其证明请看 T. Wazewski [1].

4. 稳定性的充分条件

(a) 首先我们回忆 (第一章, § 3.3), 如果对于任一满足条件 $0 \leqslant t_0$, $0 < \varepsilon < r$ 的数对 t_0, ε, 存在正数 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, 使得当 $|x^0| < \delta$, $t_0 \leqslant t$ 时, 有 $|x(t, t_0, x^0)| < \varepsilon$, 则称解 $x = 0$ 当 $t \to +\infty$ 时是稳定的. 进而, 如果 δ 与 t_0 无关, $\delta = \delta(\varepsilon)$, 则称 $x = 0$ 是一致稳定的.

为了给出稳定性的头一个条件，我们还需要一个定义. 对于函数 $V(t, x)$, 如果存在 $0 \leqslant u < r$ 上的连续, 递增函数 $a(u)$, 且 $a(0) = 0$, 使得

$$a(|x|) \leqslant V(t, x),$$

则称 $V(t, x)$ 是正定的.

我们来证明下面的定理(参看 C. Corduneanu [4]):

定理 1. 假如: (a) 存在定义在 S: $0 \leqslant t$, $0 \leqslant u < r$ 上的连续函数 $\omega(t, u)$, 使得: (i) $\omega(t, 0) = 0$; (ii) 通过每一点 $(t_0, u^0) \in S$, 方程

$$\dot{u} = \omega(t, u) \tag{9.1.12}$$

有唯一解; (b) 在 $I \times S_r$ 上存在满足局部 Lipschitz 条件的函数 $V(t, x)$, 使得 (iii) $V(t, 0) = 0$; (iv) $V(t, x)$ 是正定的; (v) 不等式

$$\underline{W}(t, x) \leqslant \omega(t, V(t, x)) \tag{9.1.17}$$

成立. 而且还有 (vi) (9.1.12) 的解 $u = 0$ 是稳定的, 则 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 是稳定的.

给定 $\varepsilon > 0 (\varepsilon < r)$, 对每一个 $t_0 \geqslant 0$, 存在 $\gamma = \gamma(t_0, \varepsilon)$, 使得对于 $|u^0| < \gamma$, $t_0 \leqslant t$, 根据 (vi) 有 $u(t, t_0, u^0) < a(\varepsilon)$. 根据 (iii) 和 V 的连续性, 存在 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, 使得对于 $|x^0| < \delta$ 有 $V(t_0,$

$x^0) < \gamma$. 我们现在再来证明对于 $|x^0| < \delta$, $t_0 \leqslant t$, 不等式 $|x(t, t_0, x^0)| < \varepsilon$ 成立.

事实上,根据 (9.1.17), 只要 $x(t, t_0, x^0)$ 有定义,就有

$$D_+V(t, x(t, t_0, x^0)) \leqslant \omega(t, V(t, x(t, t_0, x^0))).$$

令 $u^0 = V(t_0, x^0)$, 从而 $u^0 < \gamma$. 根据 Wazewski 引理, 只要 $x(t, t_0, x^0)$ 还存在,就有 $V(t, x(t, t_0, x^0)) \leqslant u(t, t_0, u^0)$. 因而, 根据 (iv), $a(|x(t, t_0, x^0)|) < a(\varepsilon)$, 故 $|x(t, t_0, x^0)| < \varepsilon$. 这就是说 $x(t, t_0, x^0)$ 对于所有 $t \geqslant t_0$ 有定义;事实上,当 $\varepsilon < r$ 时, 若存在某 $t_1 \geqslant t_0$ 使 $|x(t_1, t_0, x^0)| > \varepsilon$, 但这与已证明的相矛盾.

(b) $\omega = 0$ 是最简单但又是最重要的情况, 它对应着下面的事实. 当 $V(t, x)$ 满足一些附加的正则条件时, 这个结果就构成了关于稳定性的经典的 Lyapunov 第一定理 ([1], 223 页):

定理 2. 设在 $I \times S_r$ 上存在满足局部 Lipschitz 条件的正定的 $V(t, x)$, $V(t, 0) = 0$, 并使得 $\underline{W}(t, x) \leqslant 0$. 则 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 是稳定的.

只须注意到不等式 $\underline{W}(t, x) \leqslant 0$ 相当(9.1.7),且 $\dot{u} = 0$ 的解 $u = 0$ 是稳定的就够了.

(c) 对于函数 $V(t, x)$, 如果存在某个定义在 $0 \leqslant u < r$ 上的递增的连续函数 $b(u)$, $b(0) = 0$, 使得

$$V(t, x) \leqslant b(|x|)$$

成立,则称 $V(t, x)$ 具有无限小上界.

于是我们能够证明(参看 C. Corduneanu [4])

定理 3. 如果存在 $\omega(t, u)$, $V(t, x)$, 满足定理 1 中的条件 (i)—(v), 此外还假定 (vii) $V(t, x)$ 具有无穷小上界,并且代替 (vi) 有: (viii) (9.1.12) 的解 $u = 0$ 是一致稳定的, 则 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 也是一致稳定的.

由于 (vii), (viii), 故只要能够证明定理 1 的证明中的 δ 可以选择得与 t_0 无关就可以了. 根据 (viii), γ 与 t_0 无关, 另一方面, 根据 (vii) 我们能够找到 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使当 $|x^0| < \delta$ 时, $b(|x^0|) < \gamma$ 成立.

(d) 这时，$\omega = 0$ 的情况对应于 K. P. Persidski [3] 的下述定理：

定理 4. 设存在函数 $V(t, x)$，它满足定理 2 的全部条件并具有无穷小上界，则 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 一致稳定.

5. 稳定的必要条件. 逆问题

上述诸定理使得有可能根据纯量函数 $V(t, x)$ 和与它有关的 $\underline{W}(t, x)$ 或 $\overline{W}(t, x)$ 的性质来推导 (9.1.1) 的零解的稳定性. 因为这完全取决于V 和已知向量 f，因而问题就是如何构造 $V(t, x)$. 为此目的，已经作了不少的努力.

逆问题是由 K. P. Persidskii 的论文[2]提出来的. 在某种意义上，他给出了定理 2 的逆定理；实际上他证明了：如果 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 已知是稳定的，此外，f 属于 C^s 类，s 是正整数，(即，f 具有直到 s 阶的连续导数)，则可以确定出一个 $V(t, x)$，$V(t, 0) = 0$，它是正定的，$W(t, x) \leqslant 0$ 并且V 也是属于 C^s 类.

最近，T. Yoshizawa [1] 证明了，如果已知 $x = 0$ 是稳定的，则对于仅仅是连续的函数 f (这样，甚至连 (9.1.1) 解的唯一性都不能得到保证)我们就能构造出这样的 $V(t, x)$，它是正定的，沿着 (9.1.1) 的解是非增的，$V(t, 0) = 0$，并且它仅在点 $(t, 0)$ 处连续.

证明定理 2 所用的条件 (f 连续并保证解的唯一性)介于 Persidski 的较强条件(f 至少属于 C^1 类)和 Yoshizawa 的较弱条件 (f 连续)之间. 因而，这两个结果都不能看成为定理 2 的严格的逆定理.

定理 2 是定理 1 的一个非常特殊的情形，因而也是 $x = 0$ 的稳定性的一个非常特殊的充分条件. 这个事实可以说明，要求得属于经典形式的 Lyapunov 第二方法的各个定理的严格的逆定理的难度(也许是不可能的). 这就提出了由寻求像在定理 1 中出现的V 和 ω 来推广逆问题.

上述说明也适用于定理 3，在 f 属于 C^1 类的假定下，N. N.

Krasovski 与 J. Kurzweil 获得了定理 3 的部分的逆定理(得到了属于 C^1 类的函数 V).

对逆问题感兴趣的读者,建议参阅前面提到过的 H. A. Antosiewicz [2] 的综合报告与 J. L. Massera 新近的报告 [3].

6. 渐近稳定性

(a) 我们记得(第一章, § 3.3) (9.1.1)的解 $x=0$ 称为是渐近稳定的,如果解 $x=0$ 是稳定的并且存在 $\gamma=\gamma(t_0)>0$, 使得对于 $|x^0|<\gamma(t_0)$, 当 $t\to+\infty$ 时, 有 $|x(t, t_0, x^0)|\to 0$.

$x=0$ 渐近稳定相当于: 解 $x=0$ 是稳定的并且存在 $\gamma=\gamma(t_0)$, $0<\gamma(t_0)\leqslant r$, 使得对每一对 $t_0\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, 存在 $T(\varepsilon, t_0)$, 使当 $|x^0|<\gamma(t_0)$, $t\geqslant t_0+T(\varepsilon, t_0)$ 时, 有 $|x(t, t_0, x^0)|<\varepsilon$.

现在我们用 V 函数与 ω 函数给出渐近稳定的一个充分条件(参看 C. Cordunenu [4]):

定理 5. 如果存在函数 $\omega(t, u)$ 和 $V(t, x)$,满足定理 1 中条件 (i)—(v), 以及 (ix) (9.1.12) 的解 $u=0$ 是渐近稳定的,则(9.1.1) 的解 $x=0$ 也是渐近稳定的.

$x=0$ 的稳定性可以由 (ix) 与定理 1 推得. 采用定理 1 的证明中用过的符号,根据 (ix) 可推得, 如果 $|u^0|$ 小于某一 $\gamma(t_0)$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $u(t, t_0, u^0)\to 0$, 从而根据 Wazewski 引理,如果 $|x^0|\leqslant|u^0|<\gamma(t_0)$, 则 $V(t, x(t, t_0, x^0))\to 0$. 同时, 由 $a(|x|)\leqslant V(t, x)$ 可推出,当 $t\to+\infty$ 时, $|x(t, t_0, x^0)|\to 0$.

(b) 情形 $\omega=0$ 可以不必再考虑, 因为 $\dot{u}=0$ 的解 $u=0$ 不是渐近稳定的. 然而我们可以考虑满足

$$\omega(t, x)=-\varphi(t)c(u)$$

的 ω, 其中, $c(u)$ 是定义在 $0\leqslant u<r$ 上的连续、递增且满足条件 $c(0)=0$ 的函数,而函数 $\varphi(t)$ 则是非负、连续且满足

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt=+\infty.$$

于是不难证明方程

$$\dot{u} = -\varphi(t)c(u) \tag{9.1.18}$$

的零解是渐近稳定的.

(c) 如果 (9.1.1) 的零解一致稳定,并且存在 $\gamma > 0$ ($0 < \gamma \leqslant r$),以及对任意 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < r$),存在 $T(\varepsilon)$,使当 $|x^0| < \gamma$, $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时,有 $|x(t, t_0, x^0)| < \varepsilon$,则称(9.1.1)的零解是一致渐近稳定的(第一章,§ 3.3)(请比较在渐近稳定定义后面的说明).

下面是一致渐近稳定性的一个准则(参看C. Corduneanu [4]):

定理 6. 如果存在 $\omega(t, u)$, $V(t, x)$, 满足定理 3 的条件 (i)—(v) 和 (vii), 此外, (x) (9.1.12) 的解 $u = 0$ 是一致渐近稳定的,则 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 也是一致渐近稳定的.

$x = 0$ 的一致稳定性可由定理 3 推出. 根据 (x), 存在 $\eta > 0$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$($\varepsilon < \gamma$), 存在 $T(\varepsilon) > 0$, 使当 $|u^0| < \eta$, $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时有 $u(t, t_0, u^0) < a(\varepsilon)$. 只要将 γ 取得使 $b(\gamma) < \eta$ 就够了.

(d) 如果在 (b) 的例中我们取 $\varphi = 1$, 不难证明 (9.1.18), 即

$$\dot{u} = -c(u)$$

的零解是一致渐近稳定的. 因而,如果存在 $V(t, x)$, 它像在定理 4 中那样满足条件

$$a(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|x|) \tag{9.1.19}$$

以及

$$\underline{W}(t, x) \leqslant -c(V(t, x)), \tag{9.1.20}$$

其中 $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ 在 $0 \leqslant u < r$ 上连续、递增且 $a(0) = b(0) = c(0) = 0$, 则可以肯定, $x = 0$ 是一致渐近稳定的.

在这一段论证中,可以用

$$\underline{W}(t, x) \leqslant -d(|x|) \tag{9.1.21}$$

代替 (9.1.20), 其中 $d(u)$ 具有与 $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ 相同的性质. 事实上, 若取 $d(|x|) = c(a(|x|))$, 则由 (9.1.19), (9.1.20) 可推出 (9.1.21); 若取 $c(V) = -d(\check{a}(V))$ ($\check{a}$ 是 a 的反函数)则由 (9.1.19), (9.1.21) 可推出 (9.1.20).

本段(d)中的内容相当于 I. G. Malkin [5] 和 J. L. Massera [2] 中的定理，他们都改进了稳定性的经典的 Lyapunov 第二定理([1],p. 261)，这个定理在比(9.1.19)，(9.1.21)更严格一些的假设下，肯定了 $x=0$ 的(简单的)渐近稳定性.

(e) 关于渐近稳定的逆定理的情况，可参看 H. A. Antosiewicz [2]和 J. L. Massera [3] 的报告以及 J. L. Massera [1]，[2]，E. A. Barbashin [1]，I. G. Malkin [5]，N. N. Krasovskii [3]，J. Kurzweil [2] 等人的工作.

7. 全局渐近稳定性

(a) 因为解的稳定性只与位于给定解的某一邻域内的解的性态有关，所以它是一个局部性质. 但是线性系统在这方面却是一个明显的例外. 这一点我们将在 § 2 中看到.

然而，对于非线性情形，在应用中经常遇到下述情况(例如，在自动控制系统理论中)：已知解按上面给出的定义它是稳定的，可是，因为根据所考虑的系统的物理性质所允许的初始扰动不能充分"小"，这个解实际上却不是稳定的.

这就要求有"全局"渐近稳定的概念，这一概念为 E. A. Barbashin-N. N. Krasovski [1]，[2] 考虑过了. 即，在[1]中全局渐近稳定性的概念是令渐近稳定定义中的 $\gamma(t_0)=r$ 而得到的，而在[2]中全局一致渐近稳定的概念(第一章，§ 3.3)也类似地是令一致渐近稳定定义中的 $\gamma=r$ 而得到. 在这两种情况中，"吸引域"都与整个相空间 $|x|<r$ 相重合；进一步还可按 $r<+\infty$ 和 $r=+\infty$ 这两种情况分别加以考虑(参看 W. Hahn [1]，第 8 页，J. Lasalle [1]).

J. M. Massera [2] 推广了 E. A. Barbashin-N. N. Krasovski 的结果，他用 V 函数给出了一致渐近稳定的充分而又必要的条件.

Massera 原来的定理是

定理 7. 如果 $r=+\infty$，且存在满足 (9.1.19)，(9.1.21) 的 $V(t,x)$，又当 $u\to+\infty$ 时 $\lim a(u)=+\infty$，则 (9.1.1) 的解 $x=0$

全局一致渐近稳定.

更进一步的推广可遵循 Corduneanu [4] 的路径而得到.

(b) 在 Lyapunov 第二方法体系中还可研究一些其它类型的渐近稳定性,例如,介于渐近稳定性和一致渐近稳定性之间的同等渐近稳定性 (J. L. Massera [1], [2]) 以及相应的全局同等渐近稳定性(T. Yoshizawa [2]).

在下面 §3 中还会遇到另一类比所有渐近稳定性都要强的渐近稳定性. 它定义如下(I. G. Malkin [1]): 如果存在 $\nu > 0$, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得当 $|x^0| < \delta$, $t_0 \leqslant t$ 时, 有 $|x(t, t_0, x^0)| < \varepsilon \exp(-\nu(-t-\tau_0))$,则称(9.1.1)的解 $x = 0$ 为指数式渐近稳定的.

8. 其它类型的稳定性

近年来,由于理论的发展越来越深入,同时由于技术应用日益增长的需要, 出现了许多在"稳定性"这个共同标题下的微分方程解的渐近性质.这就提出了很多问题,诸如要确定这些不同类型的稳定性之间相互关系,以及如何用适当的 V 函数来表征它们等等.

由于这一部分理论尚在形成阶段, 所以在此我们仅罗列出某些概念和参考文献.

——整体稳定性或在经常扰动下的稳定性(第一章, §3.3). 参看 I. G. Malkin [1], [2], [5]; S. Gorshin [1]; W. Hahn [1], §28.

——变分稳定性 (H. Okamura [1] 称为强稳定性; T. Yoshizawa [1], K. Hayashi [1]). 它等价于 I. Vrkoč [2] 意义下的积分稳定性. K. Hayashi 研究了它的一个推广情形.

——在 J. Kurzweil [2] 意义下的强稳定性;

——积分渐近稳定性 (I. Vrkoč[2]; C. Corduneanu [4]);

——在具有有界平均值的经常扰动下的稳定性 (V. E. Germaidze-N. N. Krasovskii [1]; C. Corduneanu [4]);

——在经常扰动下的条件稳定性 (C. Corduneanu [1]);

——关于部分变元的稳定性 (V. V. Rumyantsev [1]);
——在有限时间区间上的稳定性 (G. V. Kamenkov [1]; A. A. Lebedev [1]; 参照 W. Hahn [1], § 34; V. I. Zubov [2], § 13).

9. 不稳定性

(a) 现在我们来证明 Lyapunov 关于不稳定性的两个经典定理. 第一个定理如下 ([1]. p. 262):

定理 8. 设在 $I \times S_r$ 上存在 $V(t, x) \in C^1$, 它具有如下性质: (iii) $V(t, 0) = 0$; (vii) $V(t, x)$ 具有无限小上界; (xi) 对于某 $t_0 \geqslant 0$ 在 $x = 0$ 的任意近傍存在点 x, 使得 $V(t_0, x) > 0$; (xii) 由 (9.1.5)所定义的 $W(t, x)$ 是正定的. 则 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 是不稳定的.

令 x^0 使 $V(t_0, x^0) = V_0 > 0$. 根据 (vii), 由 $V(t, x) \geqslant V_0$ 可得到 $|x| \geqslant \varepsilon$($\varepsilon$ 为某正数),但因为 $W(t, x) > 0$,故对于 $t_0 \leqslant t$ 有 $V(t, x(t, t_0, x^0) \geqslant V_0$. 因而对于 $t_0 \leqslant t$, 有 $|x(t, t_0, x^0)| \geqslant \varepsilon$. 所以根据 (xii), $W(t, x(t, t_0, x^0)) = dV(t, x(t, t_0, x^0))/dt \geqslant a(\varepsilon) > 0$, 而这将导致当 $t \to +\infty$ 时, $V(t, x(t, t_0, x^0)) \to +\infty$. 因为 V 是有界的(根据 $b(r)$), 由此得到, 具有使 $V(t_0, x^0) > 0$ 的初始值 (t_0, x^0) 的所有解 $x(t, t_0, x^0)$ 仅对 $\leqslant t_1 < +\infty$ 的 t 值存在. 由于 $|x^0|$ 可以取得任意小,所以 $x = 0$ 是不稳定的.

(b) 上述准则的应用范围受到条件 (xii) 相当大的限制; 这一注释就说明了关于不稳定性的 Lyapunov 第二条定理 ([1], p. 265):

定理 9. 设在 $I \times S_r$ 上存在 $V(t, x) \in C^1$, 具有如下性质: 满足定理 8 中的 (iii), (xi); (xiii) V 是有界的; (xiv) $W(t, x)$ 形如

$$W(t, x) = \alpha V(t, x) + U(t, x),$$

其中 $\alpha > 0$, 而 $U(t, x) \geqslant 0$ 在 $I \times S_r$ 上连续, 则 (9.1.1) 的解 $x = 0$ 是不稳定的.

除了稍作修改外,其证明与定理 8 相同. 由于

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t, t_0, x^0)) = W(t, x(t, t_0, x^0))$$

$$= \alpha V(t,x(t,t_0,x^0)) + U(t,x(t,t_0,x^0)) \geqslant \alpha V(t,x(t,t_0,x^0)),$$

从而可得

$$V(t, x(t, t_0, x^0)) \geqslant V_0 \exp(\alpha(t - t_0)).$$

所以当 $t \to +\infty$ 时，$V \to +\infty$，但根据 (xiii) 这是不可能的．因而，由使得 $V(t_0, x^0) > 0$ 的点 (t_0, x^0) 出发的所有解只在有限时间内存在，根据 x^0 的任意性就再次表明 $x = 0$ 是不稳定的．

(c) 应该指出，定理 8 与定理 9 两个定理的假设所保证的都远比仅仅是 $x = 0$ 的不稳定性要多；事实上，$x = 0$ 的不稳定性并不要求在其附近的解对所有的 $t \geqslant t_0$ 都要无定义． N. G. Chetayev [1]，[2]；K. P. Persidskii[3]，[4]；N. P. Erugin [1] 和 J. L. Massera [2] 等人对上述两个定理作了许多推广．

不稳定情形中的逆问题在 Krasovskii 的书 [4] (§6.7) 中有详细地论述；也可查阅 I. Vrkoč [1]；J. Kurzweill-I. Vrkoč [1]．

C. Corduneanu [4] 还已经看到，用由(9.1.4)所定义的 $\overline{W}(t, x)$ 和 Wazewshi 引理的第二部分，可以按照推广形式的 Lyapunov 方法 (V 和 ω 函数)，来研究不稳定性质．

10. 用 V 函数研究有界性

(a) T. Yoshizawa 在最近十年当中建立了以 V 函数为基础的有界性理论．他的工作已在他的论文[3]中作了概括，他的部分工作早在第七章中就已经使用过了． Yoshizawa 强调在稳定性及有界性之间存在着深刻的相似性，并且借助于那些与 Lyapunov 所用过的函数十分相似的 V 函数，刻划了有界性的许多性质，并对它们进行了详细分析．

考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{9.1.1}$$

其中 $f(t, x)$ 定义在半空间 $0 \leqslant t$ 上．如果它的每一个解都是有界的，则称该系统是有界系统．在下一节我们将看到，如果 $f(t,x) =$

$A(t)x$，则有界性就相当于所有解稳定.

在线性情形，零解(即所有解)的渐近稳定性也等价于系统的最终有界性. 对于一般情形(9.9.1)，最终有界性定义为：存在一个只与 f 有关的常数 $K>0$，使得每一个解 $x(t, t_0, x^0)$ 在某一时刻 $T=T(t_0, x^0)$ 进入柱体 $|x|<K$ 之内，且当 $t>T$ 时仍然留在其中. 读者容易看出，这个"被捕获"的性质早已在第七章就碰到过了.

从有界系统与最终有界系统这两个概念出发，很多进一步的定义随之而来(一致有界性，一致最终有界性，在经常扰动下的有界性，等等)，它们每一个都在某种意义上与稳定性理论中相应的概念非常相似.

用来刻划不同类型的有界性的 V 函数与那些在 Lyapunov 第二方法中应用的 V 函数属于同一类型，所不同的是，前者在 (t, x) 空间中某个柱体的外部(而不是在内部)有定义并且当 $|x|\to+\infty$ 时(而不是 $|x|\to 0$ 时)具有所需要的性质. 对此我们不作详细讨论，仅建议参考在第七章所遇到的函数 Φ，若用倒数 $1/\Phi$ 来代替 Φ，则与 V 函数的相似性就比较明显了.

作为进一步的例子，我们现在不加证明地介绍 Yoshizawa 的一个最简单的结果.

定理 10. 设 $f(t, x)$ 在半空间 $0\leqslant t$ 上连续，且在 $0\leqslant t$，$|x|\geqslant r_0>0$ 上存在连续正函数 $V(t, x)$，它满足局部 Lipschitz 条件，以及

$$a(|x|)\leqslant V(t, x)\leqslant b(|x|), \tag{9.1.19}$$

其中 $a(u)$，$b(u)$ 是定义在 $u>r_0$ 上的连续递增函数，且当 $u\to+\infty$ 时，$a(u)\to+\infty$，于是，只要由式(9.1.4)所确定的 $W(t, x)\leqslant 0$，则系统(9.1.1)是一致有界的.

所谓一致有界是指：对于每个 $t_0\geqslant 0$，$\alpha>0$，存在 $B=B(\alpha)$，使得当 $t_0\leqslant t$，$|x^0|<\alpha$ 时，有 $|x(t, t_0, x^0)|\leqslant B$.

(b) 正如 C. Corduneanu [4] 指出那样，借助于 V 函数及 ω 函数来研究有界性问题，很可能会得到有意义的结果.

§2. 线性系统的稳定性

1. 稳定的和不稳定的线性系统

(a) 如果 $A(t)$, $a(t)$ 分别是在实 t 轴上某一区间内的连续的 $n\times n$ 矩阵和 n-向量,则根据 Lagrange 公式(第一章, §3.4),线性系统

$$\dot{x}=A(t)x+a(t) \tag{9.2.1}$$

的每一个解在该区间上均有定义. 为简单起见，我们假设该区间就是 $0\leqslant t$.

此外,如果(9.2.1)有一个解是稳定的,则它的所有解均是稳定的.

事实上,设 x, $\tilde{x}$ 是(9.2.1)的满足条件 $x^0=x(t_0)$, $\tilde{x}^0=\tilde{x}(t_0)$ 的两个解,并设 $x+\Delta x$, $\tilde{x}+\Delta x$ 是使 $\Delta x(t_0)=\Delta x^0$ 的解. 如果 x 是稳定的,则对任意一对数 $\varepsilon>0$, $t_0>0$,存在 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$,使当 $|\Delta x^0|<\delta$, $t_0\leqslant t$ 时,有 $|\Delta x|<\varepsilon$,而这也就保证了 $\tilde{x}$ 的稳定性.

因而,如果线性系统有一个稳定的(不稳定的)解,我们就可以称该线性系统为稳定(或不稳定)系统.

此外,线性系统(9.2.1)或者对所有 n-向量 $a(t)$ 都是稳定的,或者对所有 n-向量 $a(t)$ 都是不稳定的,换言之,(9.2.1)的稳定性仅仅与 $A(t)$ 有关.

事实上,根据 Lagrange 公式,(9.2.1)的两个解之差等于齐次系统

$$\dot{y}=A(t)y \tag{9.2.2}$$

具有同一初值的两个解之差. 因此,如果当 $a(t)=0$ 时 (9.2.1)是稳定的 (不稳定的), 则对所有的 $a(t)$ 也同样是稳定的 (不稳定的).

为此,我们将只研究(9.2.2)的稳定性.

(b) 我们即将证明的定理断言: 对于线性齐次系统而言, 稳

定系统与有界系统是一回事(§ 1.10).

定理 11. 下面两个说法是等价的：(i) (9.2.2) 是稳定的；(ii) 对于(9.2.2)的任意一个基本解矩阵 $Y(t)$ 均对应一个数 M，使得

$$|Y(t)| < M, \quad 0 \leqslant t. \tag{9.2.3}$$

(ii) → (i). 设 $y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y(t_0)$ 是(9.2.2)的任一解，则 $|y(t)| < M|Y^{-1}(t_0)||y(t_0)| < \varepsilon$，$0 \leqslant t_0 \leqslant t$，只要 $|y(t_0)| < \varepsilon/M|Y^{-1}(t_0)|$. 从而，$y = 0$ 是一个稳定的解.

(i) → (ii). 现在设 $y = 0$ 是一个稳定的解，因而，给定 $t_0 \geqslant 0$，存在 $\delta = \delta(t_0)$，使得当 $|y(t_0)| < \delta$，$t_0 \leqslant t$ 时，有 $|y(t)| < 1/n$. 令 $Y_\delta(t)$ 是满足 $Y_\delta(t_0) = (\delta/2)I$ (I 是 $n \times n$ 单位阵) 的基本解矩阵，则对于 $t_0 \leqslant t$，$|Y_\delta(t)| < 1$. $Y_\delta(t)$ 在 $t_0 \leqslant t$ 上，从而在 $0 \leqslant t$ 上的有界性可以保证(9.2.3)对任意基本解矩阵 $Y(t)$ 成立，这是因为 $Y(t) = Y_\delta(t)C$，C 为常数非退化 $n \times n$ 矩阵.

(c) 作为定理 11 的推论，我们有

推论 1. 如果(9.2.2)是稳定的，则它的全部型数均 $\leqslant 0$.

实际上，对于任何一个解，根据(9.2.3)我们有

$$\chi(y) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\log|y(t)| \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\log|Y(t)| \leqslant 0.$$

推论 2. 对于齐次系统(9.2.2)，如果它的型数中至少有一个是正的，特别是，如果

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds > 0,$$

其中 $\lambda(t)$ 是 $\frac{1}{2}A(t) + \frac{1}{2}A'(t)$的最小的特征根，则系统(9.2.2)是不稳定的. 这个命题的第二部分可由不等式(8.5.1)的前半部推出.

由 Jacobi-Liouville 公式可推出不稳定性的另一个准则：

定理 12. 如果

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \mathscr{R}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds = +\infty, \tag{9.2.4}$$

则(9.2.2)是不稳定的.

事实上，因为

$$|\det Y(t)| = |\det Y(t_0)| \exp\left(\mathscr{R}\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds\right),$$

从而根据(9.2.4)，$|\det Y(t)|$ 不可能是有界的，因而 $Y(t)$ 必是无界的.

2. 一致稳定的线性系统

(a) 利用类似于上节中使用过的论证方法，易于证明：只要

$$\dot{x} = A(t)x + a(t) \tag{9.2.1}$$

的一个解是一致稳定的，则它的全部解都是一致稳定的. 因而，可以把(9.2.1)称为一致稳定系统.

此外，(9.2.1)或者对所有的 n-向量 $a(t)$ 是一致稳定的或者对任何 $a(t)$ 都不是一致稳定的. 换句话说，(9.2.1) 的一致稳定性也仅与 $A(t)$ 有关.

(b) 下面的定理与定理 11 相对应，它断言：对于线性系统来说，一致稳定系统与一致有界系统是一致的 (§ 1.10)：

定理 13. 下面两个说法是等价的：(i) (9.2.2)是一致稳定的；(ii) 对于(9.2.2)的任一基本解矩阵 $Y(t)$，存在数 $N(\geqslant n)$，使得

$$|Y(t)Y^{-1}(t)| < N,\ 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{9.2.5}$$

由于对每一个解 $y(t)$，表达式

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(s)y(s)$$

都成立，证明可以按照与定理 11 相同的思路进行。

(c) 下述例子表明，稳定性并不能推出一致稳定性：

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2(t+1)^{-1}x_2,$$

它的标准基本解矩阵

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t(t+1)^{-1} \\ 0 & (t+1)^{-2} \end{pmatrix}$$

在 $t \geqslant 0$ 上是有界的. 相反，当 $s \to +\infty$ 时，却有 $|U(2s)U^{-1}(s)| \to +\infty$.

3.一致稳定性与 t_∞-相似

(a) 我们用 M 表示所有在 $0 \leqslant t$ 上有定义且连续的 $n \times n$ 矩阵 $A(t)$ 的集合，用$\mathscr{S}$表示在 $0 \leqslant t$ 上有定义且属于 C^1 类的非退化的 $n \times n$ 矩阵 $S(t)$ 的集合，且满足：$S(t)$ 及 $S^{-1}(t)$ 都有界．我们称 (R. Conti [3]) $A(t) \in M$ 为 t_∞-相似于 $B(t) \in M$，如果存在一个 $n \times n$ 矩阵 $F(t)$，它在 $[0, +\infty)$ 上绝对可积

$$\int_0^{+\infty} |F(s)| ds < +\infty,$$

且使得

$$\dot{S}(t) + S(t)B(t) - A(t)S(t) = F(t) \tag{9.2.6}$$

对某一个 $S(t) \in \mathscr{S}$ 成立．t_∞-相似是M中的一个等价关系．

下述的特殊情况是有意思的：(i) $F(t)=O$($n\times n$ 零矩阵)，这时 t_∞-相似变成了在第八章 §5.2 中所定义的 t-相似．(ii) $S(t)=I$ ($n \times n$ 单位阵)：这意味着 $B(t) - A(t)$ 在 $[0, +\infty)$上绝对可积．

我们说

$$\dot{y} = A(t)y \tag{9.2.2}$$

和

$$\dot{x} = B(t)x \tag{9.2.7}$$

是 t_∞-相似系统，如果 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是 t_∞-相似矩阵．

(b) 我们现在来证明在 t_∞-相似下一致稳定性的不变性 (R. Conti [3])．

定理 14. 如果(9.2.2)是一致稳定的，则每一个与它 t_∞-相似的系统也是一致稳定的．

用 $Y(t)$ 表示(9.2.2)的一个基本解矩阵，$X(t)$ 表示 (9.2.7) 的一个基本解矩阵，易于验证矩阵方程 (9.2.6) 的解 $S(t)$ 由下式给出：

$$S(t) = Y(t)\left[Y^{-1}(t_0)S(t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s) F(s)X(s)ds\right]X^{-1}(t). \tag{9.2.8}$$

从而

$$X(t)X^{-1}(t_0) = S^{-1}(t)Y(t)Y^{-1}(t_0)S(t_0)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} S^{-1}(t)Y(t)Y^{-1}(s)F(s)X(s)X^{-1}(t_0)ds. \qquad (9.2.9)$$

因而，只要 $t_0 \leqslant t$，就有

$$|X(t)X^{-1}(t_0)| \leqslant |S^{-1}(t)||Y(t)Y^{-1}(t_0)||S(t_0)|$$
$$+ \int_{t_0}^{t} |S^{-1}(t)||Y(t)Y^{-1}(s)||F(s)||X(s)X^{-1}(t_0)|ds.$$

根据(9.2.2)的一致稳定性和定理 13，以及 $S(t)$，$S^{-1}(t)$ 的有界性，存在数 $C_1 > 0$，$C_2 > 0$，使得

$$|X(t)X^{-1}(t_0)| \leqslant C_1 + \int_{t_0}^{t} C_2|F(s)||X(s)X^{-1}(t_0)|ds, \ t_0 \leqslant t.$$

从而，再应用 Gronwall 不等式，有

$$|X(t)X^{-1}(t_0)| \leqslant C_1 \exp\left(\int_{t_0}^{+\infty} C_2|F(s)|ds\right), \ t_0 \leqslant t,$$

再根据定理 13，即可推出(9.2.7)的一致稳定性.

(c) 下述推论就是通常所说的 Dini-Hukuhara-Caligo 定理(参看 L. Cesari [2], p. 37):

推论 1. 如果(9.2.2)是一致稳定的，并且

$$\int_0^{+\infty} |B(s) - A(s)|ds < +\infty,$$

则(9.2.7)也是一致稳定的.

定理14的另一个推论如下 (R. Conti [1], [2]):

推论 2. 设(9.2.2)是一致稳定的，$B(t)$ 是一个在 $[0, +\infty)$ 的每一个有界区间上都属于 C^1 类的 $n \times n$ 非退化矩阵，$B(t)$ 及其逆 $B^{-1}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，且满足

$$\int_0^{+\infty} |\dot{B}(s) + B^2(s) - A(s)B(s)|ds < +\infty$$

或

$$\int_0^{+\infty} |\dot{B}(s) - B^2(s) + B(s)A(s)|ds < +\infty,$$

则(9.2.7)也是一致稳定的.

事实上，因为 (9.2.6) 式当 $S = B$ 或 $S = B^{-1}$ 时成立，从而，

(9.2.2),(9.2.7)是 t_∞-相似的.

定理 14 的其它推论将在下一节见到.

4. 一致稳定性的准则

(a) 如果 $U(t)$ 是线性齐次系统

$$\dot{y} = Cy \tag{9.2.10}$$

的标准基本解矩阵，C 是常数阵，则 $U(t) = e^{tC}$ (第八章，§ 2.1)，从而

$$U(t)U^{-1}(s) = e^{(t-s)C} = U(t-s),$$

于是定理 11 和定理 13 给出如下的定理.

定理 15. 每一个稳定的具有常系数矩阵的线性齐次系统都是一致稳定的.

于是从定理 14 我们可得到

推论 3. 每一个与具有常系数矩阵的(一致)稳定系统(9.2.10) t_∞-相似的系统(9.2.2)都是一致稳定的.

所以,忆及可约系统的定义(第八章,§4)和早已注意到的 t-相似是 t_∞-相似 ($F = 0$) 的特殊情形这一事实，我们有如下推论.

推论 4. 所有稳定的可约(特别是周期的)系统 (9.2.2) 都是一致稳定的.

(b) 稳定性与一致稳定的一致性不能推广到正则系统 (第八章，§ 6) 上去. 这只须注意到在 § 2.2,(c) 中所研究的系统是一个正则系统(第八章,定理 10) 就够了。

(c) 所有上述准则都要求 (9.2.2) 的一个基本解矩阵是已知的,而这一点并不是总能做到，因此，如果能直接根据已知系数矩阵 $A(t)$ 的结构求得某种准则,那将会是很有用的. 一个这种类型的简单的准则可以作为 Wazewski 不等式(第八章，§ 1.2) 的直接推论而得到.

定理 16. 系统 (9.2.2) 是一致稳定的,如果

$$\int_0^t \Lambda(s)ds < +\infty,$$

其中 $\Lambda(t)$ 仍照例表示 $1/2\, A(t) + 1/2\, A'(t)$ 的最大特征根.

(d) 注意到第八章的定理 1，由定理11和定理 13 可推出：

定理 17. 系统

$$\dot{y}=Cy, \tag{9.2.10}$$

其中 C 是常数阵，是(一致)稳定的充要条件是所有特征根的实部均 $\leqslant 0$，并且那些具零实部的特征根的重数等于它们的零度.

特别是当 C 的具零实部的特征根为单根时，就会出现这种情况.

(e) 现在我们也许会期望，即使 $A(t)$ 不是常数阵，只要它的特征根实部为负，仍然可以保证系统(9.2.2)的稳定性. 但是，这个结论是不对的. R. E. Vinograd [1] 所给出的下述例子就能说明这一点：

设 $A(t)$ 是如下的 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix}-1-9\cos^2 6t+12\sin 6t\cos 6t & 12\cos^2 6t+9\sin 6t\cos 6t\\ -12\sin^2 6t+9\sin 6t\cos 6t & -(1+9\sin^2 6t+12\sin 6t\cos 6t)\end{pmatrix},$$

它的特征根是 -1 与 -10，而

$$\begin{pmatrix}e^{2t}(\cos 6t+2\sin 6t) & e^{-13t}(\sin 6t-2\cos 6t)\\ e^{2t}(\cos 6t-\sin 6t) & e^{-13t}(2\sin 6t+\cos 6t)\end{pmatrix}$$

是对应系统的一个基本解矩阵，从而它是不稳定的.

另一方面，即使一个系统的特征根当 $t\to+\infty$ 时在零点近傍振动，但是该系统还可能是稳定的，甚至是一致稳定的. 当(9.2.7)中的 $B(t)$ 为

$$B(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1+t^{-1}\cos t-t^{-2}\sin t & -t^{-1}\sin t\end{pmatrix}$$

时，就可以说明这一点. 对于充分大的 t，它的特征根是复共轭的，其实部为 $-\sin t/(2t)$.

然而，如果把定理 14 的推论 2 中的 A 取为

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

就可以用来证明(9.2.7)的一致稳定性(甚至比这还要强，参看下一节).

尽管有上述两个例子，$A(t)$ 的特征根具负实部再加上其它一些条件还是能够保证(9.2.2)的稳定性的. 这方面的第一个结果属于 L. Cesari [1]，他的准则可以叙述为 (R. Conti [2])：

定理 18. 系统(9.2.2)是一致稳定的，如果 (i) 对于大于某一 $T \geqslant 0$ 的 t，$A(t)$ 所有特征根的实部都 $\leqslant 0$；(ii) $A(t)$ 在 $[T, +\infty)$ 上是有界变差的；(iii) 在常数阵

$$A(\infty) = \lim_{t \to +\infty} A(t)$$

的特征根中实部等于零的特征根是单根.

这个定理以及由 R. Bellman [3] (p. 27) 稍加推广的定理的证明，实质上基于这样的事实，即定理的假设可以保证 (9.2.2) t_∞-相似于具有三角阵 $B(t)$ 的系统(9.2.7)，而它的一致稳定性是易于证明的.

(f) U. Barbuti [1] 对于定理18所作的推广，也是基于使用 t_∞-相似把矩阵 $A(t)$ 化为标准型的方法.

许多作者也讨论过对角标准型这个特殊情形(例如，参看，N. Levinson [2]; E. A. Coddington-N. Levinson [1], p. 95; R. Bellman [3], p.27; I. M. Rapoport [1]; U. Barbuti [2]).

关于一致稳定性的其它准则，参看 B. P. Demidovich [1], N. I. Gavrilov [1].

5. 与零可约的线性系统和限制稳定性

(a) 我们现在来证明下面的定理：

定理 19. 系统

$$\dot{y} = A(t)y, \quad 0 \leqslant t \tag{9.2.2}$$

与零可约(第八章，§ 4)的充要条件是对任一基本解矩阵 $Y(t)$，存在两个正数 M_1, M_2，使得

$$|Y(t)| < M_1, \quad |Y^{-1}(t)| < M_2, \quad 0 \leqslant t. \tag{9.2.11}$$

因为 $\dot{Y} - AY = O$，故对于 $S = Y, B = F = O$，(9.2.6) 成立，因而，根据(9.2.11)，系统 (9.2.2) 是与零可约的. 反之，如果对某一 $S \in \mathscr{S}$（第 3 段）有 $\dot{S} - AS = O$，可推出 S 是(9.2.2)的基本解矩阵，因为 $S \in \mathscr{S}$，故也有(9.2.11).

(b) 注意到(9.2.11)也可以写成

$$|Y(t)Y^{-1}(s)| < N, \ 0 \leqslant t, \ 0 \leqslant s.$$

这个条件较表征一致稳定性的条件(9.2.5)更强. 所以，当(9.2.11)成立时，我们可以称(9.2.2)为限制稳定系统(参看 G. Ascoli [1]). 而定理 19 还可以再叙述为：与零可约系统与限制稳定系统相一致.

像 $\dot{x} = -x(n = 1)$ 这样的简单例子表明，限制稳定性实际上比一致稳定性更强.

(c) 还应注意到(9.2.11)的第二个不等式与(9.2.2)的伴随系统

$$\dot{z} = -A'(t)z \tag{9.2.12}$$

的有界性等价(第八章，§ 1).

因而，限制稳定性(即与零可约性)意味着(9.2.2)及其伴随系统(9.2.12)同时都稳定. 特别是，所有稳定的自伴系统都是限制稳定的(即与零可约的).

(d) 根据定理 11，当已知(9.2.2)是稳定时，为使 Y^{-1} 是有界的，只要 $1/\det|Y(t)|$ 有界就够了. 从而，根据 Jacobi-Liouvill 公式(第一章，§ 3.4)，我们得到如下定理.

定理 20. 系统(9.2.2)是限制稳定的，如果它是稳定的，并且还有

$$\mathscr{R}\int_0^t trA(s)ds > -\infty, \ 0 \leqslant t.$$

另一方面，根据定理 12，注意到由(9.2.2)的稳定性可推出

$$\mathscr{R}\int_0^t t_rA(s)ds < +\infty, \ 0 \leqslant t.$$

(e) 我们在 § 3 中已看到，t-相似是 t_∞-相似(在(9.2.6)中对应于 $F = O$) 的特殊情形. 反之，如果矩阵 A, B 中有一个是 $n \times n$ 零矩阵时，由 t_∞-相似可推出 t-相似.

事实上，如果 B t_∞-相似于 O，则对某一 $S\in\mathscr{S}$ 和在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积的某 F 有 $\dot{S}+SB=F$. 在(9.2.9)中代以 $Y=I$，我们得到

$$X(t)X^{-1}(t_0)=S^{-1}(t)S(t_0)+\int_{t_0}^{t}S^{-1}(t)F(s)X(s)X^{-1}(t_0)ds,$$

其中 X 是

$$\dot{x}=B(t)x \tag{9.2.7}$$

的一个基本解矩阵.

$X(t)X^{-1}(t_0)$ 在 $t\geqslant t_0$ 上的有界性可以如同定理 14 中的证明一样推出. 如果 $t<t_0$，我们就有

$$|X(t)X^{-1}(t_0)|\leqslant C_1+\int_{t_0}^{t}C_2|F(s)|\,|X(s)X^{-1}(t_0)|ds,$$

从而可得

$$|X(t)X^{-1}(t_0)|\leqslant C_1\exp\left(C_2\int_{t}^{t_0}|F(s)|ds\right).$$

这个不等式的证明和 Gronwall 不等式的证明极为近似，故从略. 因而，(9.2.7)是限制稳定的. 于是我们有如下定理.

定理 21. (9.2.2) 是限制稳定的充要条件是 $A(t)$ t_∞-相似于 $n\times n$ 零矩阵. 因而，如果(9.2.2)是限制稳定的，则所有与它 t_∞-相似的系统也都是限制稳定的.

第二部分肯定了限制稳定在 t_∞-相似变换下的不变性，这可由第一部分以及 t_∞-相似的传递性得出.

联系在 § 2.3 中所看到的事实，我们有如下推论:

推论 1. 如果(9.2.2)是限制稳定的，并且

$$\int_0^{+\infty}|B(s)-A(s)|ds<+\infty,$$

则(9.2.17)也是限制稳定的.

特别地，若在推论 1 中取 $B=O$，我们就得到 (W. Trijtzinsky [1])

推论 2. 如果

$$\int_0^{+\infty}|A(s)|ds<+\infty, \tag{9.2.13}$$

则(9.2.2)是限制稳定的.

(f) 由 Wazewski 不等式(第八章, § 1.2) 可推出:

定理 22. 系统(9.2.2)是限制稳定的，如果

$$-\infty \leqslant \int_0^t \lambda(s)ds \leqslant \int_0^t \Lambda(s)ds < +\infty, \ 0 \leqslant t, \quad (9.2.14)$$

其中 λ 和 Λ 分别是 $1/2\ A(t) + 1/2\ A'(t)$ 的最小和最大的特征根.

比(9.2.14)更强的条件也被研究过，诸如

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda(s)ds, \quad \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \Lambda(s)ds \quad (9.2.15)$$

都存在且有限(参看 A. Wintner [7]), 或者

$$\int_0^{+\infty} |A(s) + A'(s)|ds < +\infty$$

(参看 A. Rosenblatt [1]), 或者(9.2.13).

如果(9.2.15)式成立，则对(9.2.2)的每一个解 $y(t)$，当 $t \to +\infty$ 时都存在有限的"振幅极限" $\lim|y(t)|$ (A. Wintner [7]). 如果(9.2.13) 成立，则对每一个解 $y(t)$，当 $t \to +\infty$ 时 $\lim y(t)$ 都存在. 这一事实与"渐近等价性"有关，这个问题将在§ 4 中研究.

(g) 如果 $\alpha + i\beta$ 是 A 的特征根，则 $-\alpha + i\beta$ 就是 $-A'$ 的特征根. 从而，涉及 A 的特征根的一致稳定性的准则可以变换成限制稳定性的准则. 例如:

定理 23. 系统

$$\dot{y} = Cy, \quad (9.2.10)$$

其中 C 是常数阵，为限制稳定的充要条件是 C 的每一个特征根的实部均为零，且根的重数等于它的零度. 而这又等价于当 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 时(9.2.10)的(一致)稳定性.

定理 24. 系统 (9.2.2) 是限制稳定的，如果 (i) 对于大于某一 $T \geqslant 0$ 的 t, $A(t)$ 的所有特征根的实部均为零; (ii) 在 $[T, +\infty)$ 上 $A(t)$ 是有界变差的; (iii) $A(\infty) = \lim A(t)$ 的特征根都是单根.

限制稳定性的其它准则参看 R. Conti [2].

(h) 容易证明(简单的)稳定性虽然在 t-相似之下是不变的，但在 t_∞-相似下却不是不变的 (R. Conti [3]).

6. 线性系统的渐近稳定性

(a) 由系统

$$\dot{y} = A(t)y \tag{9.2.2}$$

解的表达式

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y(t_0) \tag{9.2.16}$$

可推出下面的定理.

定理 25. (9.2.2)的零解的渐近稳定性既等价于：对于任一基本解矩阵 $Y(t)$，有

$$\lim_{t\to+\infty} |Y(t)| = 0; \tag{9.2.17}$$

又等价于(9.2.2)的所有解的全局渐近稳定性.

因而，当(9.2.17) 式成立时，(9.2.2) 可以称为(全局)渐近稳定系统.

(b) 下述事实也是显然的.

定理 26. (9.2.2)的渐近稳定性与它的最终有界性 (§ 1.10) 相一致.

特别是，如果 (9.2.17) 成立，则对任意给定的 $K > 0$，存在某一 $t_1 \geqslant t_0$，使当 $t \geqslant t_1$ 时，有 $|Y(t)| < K/|Y^{-1}(t_0)y(t_0)|$，从而，对于 $t \geqslant t_1$，有 $|y(t)| < K$. 反过来，设存在 $K > 0$，使得对于 $t \geqslant t_1$ 有 $|y(t)| < K$，t_1 是与 t_0，y_0 有关的某一个数，也就是说，设对于 $t > t_1$，有 $|Y(t)Y^{-1}(t_0)y^0| < K$. 则适当地选择 y^0 就可推出(9.2.17).

(c) 从(9.2.16)我们还可以推出

定理 27. (9.2.2)零解的一致渐近稳定性等价于(9.2.2)的所有解的全局一致渐近稳定性和(9.2.2)的指数式渐近稳定性，即存在数 $N \geqslant n$，$\nu > 0$，使得

$$|Y(t)Y^{-1}(s)| \leqslant N\exp(-\nu(t-s)), 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{9.2.18}$$

只要按照 J. L. Massera [2] 那样去推导(9.2.18)就行了.

因为若 $y=0$ 是一致渐近稳定的，从而是一致稳定的，根据定理 13 存在某一 $N'\geqslant n$，使得

$$|Y(t)Y^{-1}(s)|<N',\quad 0\leqslant s\leqslant t. \tag{9.2.5}$$

而且还存在一个 $\gamma>0$ 和某一个 $T(=T(1/2\gamma))$，使得当 $|y^0|<\gamma$，$t\geqslant s+T$ 时，对于 $0\leqslant s$ 有 $|Y(t)Y^{-1}(s)y^0|<1/2\gamma$（§ 1.6(c)）。从而，适当选择 y^0，对于 $t\geqslant s+T$，$0\leqslant s$，就有 $|Y(t)Y^{-1}(s)|<1/2$. 因为 T 与 s 无关，只要 $t\geqslant s+(k+1)T=(s+kT)+T$，$k$ 是任意正整数，就可得 $|Y(t)Y^{-1}(s+kT)|<1/2$. 从而，只要 $t\geqslant s+mT(m=1,2,\cdots)$，就有

$$|Y(t)Y^{-1}(s)|\leqslant|Y(t)Y^{-1}(s+(m-1)T)|\cdots$$
$$\cdots|Y(s+2T)Y^{-1}(s+T)||Y(s+T)Y^{-1}(s)|\leqslant 2^{-m}.$$

所以，由 (9.2.5)，当 $N\geqslant n\geqslant 1$ 时

$$|Y(t)Y^{-1}(s)|\leqslant N'2^{-m},t\geqslant s+mT,\ (m=0,1,2,\cdots)$$

从而最后可得(9.2.18)式，此时 $N=2N'$，$\nu=T^{-1}\log 2$.

(d) 根据前面的定义及定理 27 可推出：

定理 28. 对于线性齐次系统

$$\dot{y}=Cy \tag{9.2.10}$$

来说，其中 C 是常数阵，渐近稳定性与一致渐近稳定性相一致，也就是说，与指数式稳定性相一致，从而它就应与 C 的所有特征根均具负实部等价.

另一方面，一致渐近稳定性在 t-相似之下显然是不变的，由此可得：

定理 29. 每个渐近稳定的可约(特别是周期的)系统，也都是一致渐近稳定的.

因而，限制稳定(即与零可约)和一致渐近稳定这两类系统(两者均包含在一致稳定系统类中)是不相交的.

(e) 下面是一致渐近稳定的一个进一步的准则：

定理 30. 设 σ 是(9.2.2)的非正则常数(第八章，§ 5.5)，并设(9.2.2)的型数是 χ_i. 如果对某一 $\alpha>0$，有 $\alpha\chi_i<-\sigma$，则(9.2.2)是一致渐近稳定的.

特别是，如果所有 χ_i 都小于 0，且(9.2.2)是正则系统 ($\sigma=0$)，或者更为特殊的，是可约系统，则(9.2.2)是一致渐近稳定的.

其证明可仿照 J. L. Massera [2] 的定理 26* 进行.

取定 $\varepsilon>0$，使得 $\sigma/\alpha<\varepsilon<-\chi_i$，设 D 是对角阵

$$D=\begin{pmatrix}\chi_1+\varepsilon & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_n+\varepsilon\end{pmatrix}.$$

则变换 $y=Y(t)e^{-tD}x$ ($Y(t)$ 照例是 (9.2.2) 的一个基本解矩阵)将(9.2.2)的解变为 $\dot{x}=Dx$ 的解，后者显然是一致渐近稳定的系统.

另一方面，由于只要适当选择 Y，矩阵

$$S(t)=Y(t)e^{-tD},\quad S^{-1}(t)=e^{tD}Y^{-1}(t)$$

在 $[0,+\infty)$ 上都是有界的，所以 $\dot{x}=Dx$ t-相似于(9.2.2).

实际上，令 $Y(t)$ 是标准基本解矩阵(第八章，§ 5.3). 并设它的列是这样配置的：使第 i 列的型数恰好是 χ_i. 从而，S 的第 i 列的型数就是 $\chi_i-(\chi_i+\varepsilon)=-\varepsilon$. 所以，$\chi(S)\leqslant-\varepsilon$ 而 S 是有界的. 另一方面，Y^{-1} 的第 i 行是 $\Delta_{i1}/\Delta, \Delta_{i2}/\Delta,\cdots,\Delta_{in}/\Delta$，其中 $\Delta=\det Y$ 而 Δ_{ij} 是 Y 中 y_{ij} 的余因子；因而，根据 σ 的定义，并想到 $\chi(1/\Delta)=\chi\left(\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)ds\right)\right)$，就有 Y^{-1} 的第 i 行的型数 $\leqslant\sup\chi(\Delta_{ij})+\chi(1/\Delta)\leqslant\chi_1+\cdots+\chi_{i-1}+\chi_{i+1}+\cdots\chi_n+\chi(1/\Delta_i)\leqslant\sigma-\chi_i$.

所以，S^{-1} 的第 i 行的型数 $\leqslant\chi_i+\varepsilon+(\sigma-\chi_i)=\sigma+\varepsilon$. 从而

$$\chi(|S^{-1}||S|^{1+\alpha})\leqslant\sigma+\varepsilon-(1+\alpha)\varepsilon=\sigma-\alpha\varepsilon<0,$$

因此 $|S^{-1}||S|^{1+\alpha}$ 是有界的，S^{-1} 也同样是有界的. 根据一致渐近稳定性在 t-相似下的不变性，即可推出结论.

(f) 关于一致渐近稳定性的另一个准则，可参看 N. Ya. Lyashenko [1].

7. 常系数线性系统的 V 函数

在§1中，系统 $\dot{x}=f(t,x)$ 的零解的稳定性质与适当的 V 函数的存在性有联系. 如果 $f(t,x)=Cx$，其中 C 是常数矩阵，自然看起来应当存在属于非常特殊的函数类的 V 函数. 事实上，对于 C 是常数阵的线性齐次系统(9.2.10)，下述结果成立.

定理 31 a. 如果 C 的全部特征根均具负实部(即，如果(9.2.10)是(一致)渐近稳定的)，则存在任意给定(偶)次数的正定代数型 $V(y)$，使得 $W=V_y'Cy$ 是负定的 (A. M. Lyapunov [1]).

定理 31 b. 如果 C 的所有特征根的实部均是非正的，并且那些具有零实部的特征根的重数等于它的零度(即，如果(9.2.10)是(一致)稳定的)，则存在正定的，任意给定(偶)次数的代数型 $V(y)$，使得 $W=V_y'Cy$ 是半负定的 (J. M. Massera [2]).

定理31c. 如果 C 至少有一个特征根具有正实部(因此(9.2.10)是不稳定的)，则对给定的任意的 m 次正定型 $U(y)$，存在型 $V(y)$ 及一正数 α，使得 $V_y'Cy=\alpha V+U$，其中 V 取正值 (A. M. Lyapunov [1]).

由简单的例子(例如 $\dot{y}_1=y_2$, $\dot{y}_2=0$) 就可以说明，如果只假定(9.2.10)的不稳定性，那么定理 31 c 的结论可不成立 (参看 J. L. Massera [2]).

B. S. Rasumikhin [1] 对于具有非常数有界系数矩阵的线性系统存在二次型 V 的几何性质进行了有趣的研究. H. A. Antosiewicz-P. Davis [1] 借助于系数有界且属于 C^1 类的二次型 V，研究了具有非常数系数的线性系统的一致稳定性.

§3. 按一次近似判定稳定性

1. 引言

(a) 研究系统

$$\dot{x}=f(t,x) \text{ (其中 } f(t,0)=0) \tag{9.3.1}$$

的解(例如零解)的稳定性的一般方法是基于下述的可能性，就是将 f 写成两个向量 a, g 的和:

$$f(t, x) = a(t, x) + g(t, x),$$

使得"简化系统"

$$\dot{y} = a(t, y) \text{ (其中 } a(t, 0) = 0) \tag{9.3.2}$$

的零解是稳定的(或不稳定的)，而扰动项 $g(t, x)$ 是如此之"小"，在某种意义上来说，它不影响位于 $x = 0$ 的某个邻域内的解的性态.

换句话说，这个方法就是要由(9.3.1)的"一次近似"的，即"简化系统"(9.3.2)的零解的相应的性态，来推断(9.3.1)的零解的稳定性或不稳定性.

一个常常碰到的情况是线性一次近似，即具有线性简化系统

$$\dot{y} = A(t)y \tag{9.3.3}$$

的系统

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x). \tag{9.3.4}$$

当 f 在 $x = 0$ 邻域内是充分正则时就是这种情况. 例如，如果 f 在 $x = 0$ 点近傍属于 C^1 类且在 $x = 0$ 点有非零的 Jacobi 矩阵 $f_x(t, 0)$，则 f 可以写成

$$f(t, x) = f_x(t, 0)x + g(t, x),$$

其中当 $|x| \to 0$ 时，$|g(t, x)|/|x| \to 0$. 简化系统

$$\dot{y} = f_x(t, 0)y, \tag{9.3.5}$$

Poincaré 称为"变分方程"，而把(9.3.1)简化成(9.3.5)称为"线性化".

(b) 我们现在考虑两个简单的例子，它们多少能有助于说明扰动项 g 必须小到什么样子.

例 1. 方程 ($n = 1$)

$$\dot{x} = x^2$$

可以写成 $\dot{x} = 0x + x^2$，而它的一次近似 $\dot{y} = 0$ $y = 0$ 显然是一致稳定的. 同时，对于小的 x，扰动项 x^2 也是小的. 然而，已知方程的解 $x = 0$ 却是不稳定的. 因为，如果 $x^0 > 0$，则当 $t = t_0 + 1/x^0$

时，$x = x^0(1-(t-t_0)x^0)^{-1}$ 根本不存在.

例 2. 方程 $(n=1)$

$$\dot{x} = t^{-1}x$$

显然是不稳定的. 但与此同时，它的一次近似 $y = 0$ 却是(一致)稳定的,且当 $t \to +\infty$ 时扰动项 $t^{-1}x$ 趋于零.

(c) 下节中将对 g 给出保证 (9.3.3) 和 (9.3.4) 的零解具有相同稳定性的条件. 我们将经常地假设 $f(t, x)$ 是定义在 $0 \leqslant t$, $0 \leqslant |x| < r$, $r \leqslant +\infty$ 上的连续的 n-向量, $f(t, 0) = 0$, 且 (9.3.1)过每一点 (t_0, x^0), $0 \leqslant t_0$, $|x^0| < r$,存在唯一解.

由线性一次近似(对于系统(9.3.3)而言)来研究稳定性所用的许多方法的出发点是公式

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)g(s,x(s))ds, \quad (9.3.6)$$

这在第八章,§ 7.3 中已遇到过了. 正如我们在那里看到的,(9.3.6)的所有解都是(9.3.3)的解,反之亦然.

现在我们假定

$$|Y(t)Y^{-1}(s)| < N\exp(-\nu(t-s)), \ 0 \leqslant s \leqslant t, \quad (9.3.7)$$

对于某个 $N \geqslant n$, $\nu \geqslant 0$ 成立. 根据定理 13 和 27，这相当于假定,当 $\nu = 0$ 时(9.3.4)的解的一致稳定性或当 $\nu > 0$ 时,(9.3.4)的解的一致渐近稳定性.

应用 (9.3.7)，由 (9.3.6) 可推出

$$|x(t_0)| < Ne^{-\nu(t-t_0)}|x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} Ne^{-\nu(t-s)}|g(s, x(s))|ds,$$

即

$$|x(t)|e^{\nu t} < N|x(t_0)|e^{\nu t_0} + \int_{t_0}^{t} N|g(s, x(s))|e^{\nu s}ds. \quad (9.3.8)$$

2. 按线性一次近似决定稳定性

(a) 我们将从证明下述定理开始(引自 J. L. Massera [2] 的线性情况 $g(t, x) = B(t)x$):

定理 32. 设对于某个 $N \geqslant n$, $\nu \geqslant 0$ 有

$$|Y(t)Y^{-1}(s)| < N\exp(-\nu(t-s)),\ 0 \leqslant s \leqslant t; \quad (9.3.7)$$

且对某个连续的 $\gamma(t)$，有

$$|g(t, x)| \leqslant \gamma(t)|x|,\ 0 \leqslant t,\ 0 \leqslant |x| < r, \quad (9.3.9)$$

于是，只要

$$\int_0^{+\infty} (\gamma(s) - \nu/N) ds < +\infty, \quad (9.3.10)$$

则

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x)$$

的解 $x = 0$ 就是一致稳定的.

只要 $|x(t)| < r$ 还成立时，从 (9.3.8)，(9.3.9) 可推出

$$|x(t)|e^{\nu t} < N|x(t_0)|e^{\nu t_0} + \int_{t_0}^t N\gamma(s)|x(s)|e^{\nu s} ds.$$

从而根据 Gronwall 不等式，有

$$|x(t)| < N\exp\left(N\int_{t_0}^t (\gamma(s) - \gamma/N) ds\right) |x(t_0)|.$$

于是可由 (9.3.10) 得出结论.

(b) 作为结果，我们得到如下的推论（R. Bellman [1]，H. Weyl [1]，N. Levinson [1]，[3]），由它可推出在线性情况下的前面提到过的 Dini-Hukuhara-Caligo 定理.

推论 1. 如果在定理 32 中 $\nu = 0$，于是 (9.3.10) 变成

$$\int_0^{+\infty} \gamma(s) ds < +\infty, \quad (9.3.11)$$

则 (9.3 3) 的解 $x = 0$ 是一致稳定的.

(c) 定理 32 的证明还可给出

推论 2. 如果在定理 32 中 $\nu > 0$，且用更强的条件

$$\int_0^{+\infty} (\gamma(s) - \nu/N) ds = -\infty \quad (9.3.12)$$

代替 (9.3.10)，则 (9.3.3) 的解 $x = 0$ 是渐近稳定的.

推论 3. 如果在定理 32 中 $\nu > 0$，且

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0, \quad (9.3.13)$$

或

$$\int_0^{+\infty} \gamma(s) ds < +\infty, \tag{9.3.11}$$

或 $\gamma(t)=\gamma$ 是常数，且

$$\gamma(t)=\gamma<\nu/N, \tag{9.3.14}$$

则 (9.3.3) 的解 $x=0$ 是一致渐近稳定的.

(d) 让我们现在来证明

定理 33. 设对于某 $N \geqslant n$, $\nu>0$ 有

$$|Y(t) Y^{-1}(s)|<N \exp (-\nu(t-s)), \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{9.3.7}$$

又如果，关于 $t \geqslant 0$ 一致地有

$$g(t, x)=O(|x|) \quad (|x| \rightarrow 0), \tag{9.3.15}$$

则 (9.3.3) 的解 $x=0$ 是一致渐近稳定的.

根据(9.3.15),存在 ρ, $0<\rho<r$, 使得

$$|g(t, x)|<\frac{\nu}{2 N}|x|, \quad 0 \leqslant t, \quad 0 \leqslant|x|<\rho.$$

我们来证明,如果

$$\left|x\left(t_0\right)\right| \leqslant \rho /(2 N), \tag{9.3.16}$$

则有

$$|x(t)|<2 N\left|x\left(t_0\right)\right| \leqslant \rho, \quad t_0 \leqslant t, \tag{9.3.17}$$

因而

$$|g(t, x(t))|<\frac{\nu}{2 N}|x(t)|, \quad t_0 \leqslant t. \tag{9.3.18}$$

因为 $2N \geqslant 2n>1$,于是 $t=t_0$ 时,(9.3.16) 成立，从而对于 t_0 右侧某个区间内的 t 也成立;令 t_1 是使(9.3.16)成立的 t 值的上确界. 如果 $t_1<+\infty$, 则 $\left|x\left(t_1\right)\right|=2 N\left|x\left(t_0\right)\right|$, 由 (9.3.8) 可推出

$$2 N\left|x\left(t_0\right)\right| e^{\nu t_1}=\left|x\left(t_1\right)\right| e^{\nu t_1}<N\left|x\left(t_0\right)\right| e^{\nu t_0}+\int_{t_0}^{t} \frac{\nu}{2}|x(s)| e^{\nu s} d s$$

$$<N\left|x\left(t_0\right)\right| e^{\nu t_0}+N\left|x\left(t_0\right)\right|\left(e^{\nu t_1}-e^{\nu t_0}\right)=N\left|x\left(t_0\right)\right| e^{\nu t_1}.$$

因而，$t_1=+\infty$. 于是,如果(9.3.16)成立,则(9.3.18) 也就成立. 再由 (9.3.8), 我们有

$$|x(t)| e^{\nu t}<N\left|x\left(t_0\right)\right| e^{\nu t_0}+\int_{t_0}^t \frac{\nu}{2}|x(s)| e^{\nu s} d s. \tag{9.3.19}$$

依 Gronwall 不等式，有

$$|x(t)| < N\exp\left(-\frac{\nu}{2}(t-t_0)\right)|x(t_0)|,\ t_0 \leqslant t.$$

从而结论得证.

(c) 定理 33 来源于 Poincaré 与 Lyapunov ([1], p. 29) 的早期成果. 他们研究了 $A(t)$ 为常数阵(具有负的型数) 和扰动 $g(t, x)$ 具有下述分量的情况:

$$g_i(t_1, x_1, \cdots, x^n) = \sum g_{ij_1\cdots j_n}(t)x_1^j \cdots x_n^j,$$

其中 $g_{ij_1\cdots j_n}(t)$ 是连续的和同等有界的.

其后一些作者大大地简化了加在 g 上的很强的假设(参看 P. Bohl [1]; E. Cotton [1]; O. Perron [1], 定理 5; I. G. Petrovski [1]; R. Bellman [1], 定理 7; N. Levinson [3]; 也可参看 R. Bellman [3], 第十四章; E. A. Coddington-N. Levinson [1], 第十三章).

遵循定理 33 相同的路线，可以得到一个稍为一般的结果. 事实上，代替(9.3.15)，可以要求对于某个 $K > 0$ 及所有小的 $|x|$，有

$$|g(t, x)| \leqslant K|x|,\ 0 \leqslant t,$$

并对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$，$T = T(\varepsilon)$，使得

$$|g(t, x)| \leqslant \varepsilon|x|,\ T \leqslant t,\ |x| < \delta.$$

(例如，参看 E. A. Coddington-N. Levinson [1], 第十三章.)

$A(t)$ 为非常数阵的情况也由 A. Lyapunov ([1], pp. 252—254) 和以后的 K. P. Persikkii [1], N. G. Chetayev [3] 及 J. L. Massera [2], n. 5 研究过了.

3. 几个推广与注释. $L(\nu, N)$ 性质

(a) 注意到，如果

$$\int_0^{+\infty} \gamma(s)ds < +\infty, \tag{9.3.11}$$

则线性方程

$$\dot{u} = -\nu u + N\gamma(t)u$$

当 $\nu = 0$ 时是一致稳定的，当 $\nu > 0$ 时是一致渐近稳定的.

这就有可能把定理 32 的推论 1 和定理 32 的推论 3 中的假设(9.3.11)这部分加以推广，这时须将(9.3.9)式换成不等式

$$|g(t, x)| \leqslant \omega(t, |x|),$$

其中 $\omega(t, u)$ 是一个适当的函数，而没有必要是 $\gamma(t)u$.

这个类型的结果实际上已被 E. A. Coddington-N. Levinson ([1]，第十三章，定理 1.3)，I. Bihari [1]，M. Golomb [1]，A. Stokes [1] 等人得到过.

(b) 根据 M. G. Krein [1] 的说法，称系统

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (9.3.1)$$

具有 $L(\nu, N)$ 性质，如果存在数 $N \geqslant 0$, ν 使得

$$|x(t, t_0, x^0)| < N\exp(-\nu(t - t_0))|x^0|, \ 0 \leqslant t_0 \leqslant t, \qquad (9.3.16)$$

其中 $x(t, t_0, x^0)$ 照例表示(9.3.1)过 (t_0, x^0) 点的解. 如果 $\nu > 0$，在线性情况这一性质等价于一致渐近稳定性(定理 27)；而在一般情况时，则它比一致渐近稳定性要求高，即等价于(9.3.1)的零解是指数式渐近稳定(参看 I. G. Malkin [1]). 因而，由定理 32 的推论 3 中的假设(9.3.11)或(9.3.14)以及定理 33 的假设 (9.3.15)，可以推出比那里所说的结果更多的东西.

(c) 另一方面，我们还应注意到加于线性系统的“小的”扰动可能保持该系统的一致渐定稳定性，但是，一般来说，并不能保持全局一致渐近稳定性. 例如，方程 $(n = 1)$

$$\dot{x} = -x + x^2$$

的零解是一致渐近稳定的 (定理 33)，但并非全局一致渐近稳定，因为它还包括有不趋于零的解，例如 $x = 1$.

注意到像 x^2 这样的扰动是有兴趣的，它们虽然使系统保持一致渐近稳定性(定理 33)，但一般地，为了保持一致稳定性 (§ 3.1 (b)中的例 1)它们却太粗糙了. 对像 $t^{-1}x$ 这样的扰动也可以作类似的说明. 一般来说，上述这两类扰动也都不能保持渐近稳定性(参看 O. Perron [2]，42 页，R. Bellman [3]，87 页).

(d) Yu. G. Zolotarev [1], L. Markus-H. Yamabe [1], J. K.

Hale-A. P. Stokes [3] 和 P. Santoro [1] 等人在关于 g 的各种假设下，已得到了按线性一次近似决定稳定性的进一步的结果． P. Santoro 改用加在数量积 $x'g$ 上的条件来代替加在 $|g|$ 上的条件，但这要进行有别于 (9.3.6) 的探讨．

4. 渐近稳定性．非线性一次近似的情形

正如本节开始所提到的那样，按一次近似决定稳定性的一般问题，就是用一个一般来说是非线性的简化系统

$$\dot{y} = a(t, y), \quad a(t, 0) = 0 \tag{9.3.2}$$

来处理

$$\dot{x} = a(t, x) + g(t, x), \quad a(t, 0) = g(t, 0) = 0, \tag{9.3.20}$$

我们现在介绍这方面的某些结果．

J. L. Massera ([2], 定理 24*) 提出了下述定理，它推广了 I. G. Malkin [3] 的以前的一个结果：

定理 34. 设 $a(t, x) = \Omega(x)$ 是与 t 无关的，满足局部 Lipschitz 条件的，正的 m 次齐次函数，即，$\Omega(0) = 0$，对于所有 n-向量 x 及正数 ρ，有 $\Omega(\rho x) = \rho^m \Omega(x)$． 设

$$\dot{y} = \Omega(y)$$

的零解是渐近稳定的(所以，根据 J. L. Massera [1] 的结果是一致渐近稳定的)，且存在数 $M = M(\Omega) > 0$，使得对于所有这样的 $g(t, x)(g(t, 0) = 0)$，它们对于小的 x，不等式

$$|g(t, x)| < M|x|^m$$

对 $t \geqslant 0$ 一致地成立，则系统

$$\dot{x} = \Omega(x) + g(t, x)$$

的解 $x = 0$ 也是一致渐近稳定的．

(也可参看 N. N. Krasovskii [2], [4], § 22; C. Coleman [1].)

下述定理讨论了一次近似 $a(t, x)$ 是非自治的情形(参看 I. G. Malkin [4], E. A. Barbashin-M. A. Skalkina [1])：

定理 35. 如果 $a(t, x)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件，而(9.3.2) 具有 $L(\nu, N)$ 性质，其中 $\nu > 0$，则存在数 $M = M(a(t, x)) >$

0，使得对于每一个关于 x 满足 Lipschitz 条件且满足不等式

$$|g(t, x)| < M|x|$$

的 $g(t, x)(g(t, 0) = 0)$，(9.3.20) 的解 $x = 0$ 是一致渐近稳定的.

其它结果也可参看 N. N. Krasovskii [2], [4], §2.2; E. A. Barbashin [1]; V. I. Zubov [2], 定理 30; C. Corduneanu [2], [3]; V. E. Germaidze [1]; H. A. Antosiewicz [1].

5. 解析系统. 临界情形

本段内我们将讨论形如

$$\dot{x} = Cx + g(t, x), \quad g(t, 0) = 0 \qquad (9.3.21)$$

的系统，其中 C 是常数阵，g 满足 § 3.2 (e) 中的 Poincaré-Lyapunov 假设.

根据定理 33，我们知道，如果 C 的所有特征根均具负实部，则 (9.3.21) 的解 $x = 0$ 是(一致)渐近稳定的. 不难证明，如果 C 的特征根至少有一个有正实部，则 $x = 0$ 是不稳定的 (A. M. Lyapunov, [1], p. 292)；当 g 满足比解析性弱一点的条件时，同样的结论仍然成立(参看 E. Cotton [1], O. Perron [1], 定理 7; R. Bellman [3], p. 88). 此外，如果 C 的所有特征根均具正实部，则 $x = 0$ 是完全不稳定的，即存在数 ρ, $0 < \rho < r$，使得当 $|x^0| < \rho$, $0 \leqslant t_0$ 时，不等式 $|x(t, t_0, x^0)| \geqslant \rho$ 对于大于某一 $t_1 \geqslant t_0$ 的 t 成立. (参看 O. Perron [1], P. Turan [1].)

剩下的情况，即 C 的特征根一部分具负实部，另一部分具零实部，这种情况是极为困难的. 回想一下，例如，在第五章 § 4 中我们遇到过的 $n = 2$ 而 C 是形如

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的 Keil 系统，或在第二章 § 4 中所遇到过的 C 形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

的系统(中心的问题). 那时，要判断在 $x=0$ 近傍解的性态时真是何等困难. 在 $n=1$ 的情形,只要讨论方程 $\dot{y}=0$ 就够了,它的零解是(一致)稳定的，而 $\dot{x}=x^2$ 或 $\dot{x}=t^{-1}x$ 的零解却是不稳定的. 但是,容易验证,$\dot{x}=-x^3$ 的零解是(一致)渐近稳定的.

Lyapunov [1] (pp. 458—463) 和 H. Poincaré [1] (第七章) 把 C 具零型数(没有正型数)的所有的情况，都称为**临界情形**. 他们详细地讨论了 C 具有零单根和一对纯共轭复根的两种情况. 对于这些以及更一般的临界情形，其后主要是由苏联数学家们实现的,首先是 I. G. Malkin ([6]，第四章,第六章; D),他用解析方法进行了研究. 有关这一方向的工作的介绍可在 Lefschetz [1] 的书中和他最近的论文[4]中查到. A. M. Aban'chin [1] 最近还对 C 有 n 重零特征根的情形(即, $C=0$) 进行了研究.

处理临界情况自然要导致在乘积空间上来研究微分方程，这个课题将在下节内再讨论.

6. 轨道(渐近)稳定性. 积分流形近傍的解的性态

(a) 整个这一段我们将讨论系统

$$\dot{x}=f(t, x), \tag{9.3.1}$$

其中 f 定义在整个 t, x 空间上，它属于 C^1 类且对于 t 以 ω 为周期:

$$f(t+\omega, x)=f(t, x).$$

设 $x=\varphi(t)$ 是 (9.3.1) 的 ω 周期解，$\varphi(t+\omega)=\varphi(t)$. 作变量变换 $x=y+\varphi(t)$, 把 (9.3.1) 的解变成

$$\dot{y}=f_x(t, \varphi(t))y+g(t, y)$$

的解,其中 $g(t+\omega, y)=g(t, y)$, 它属于 C^1 类并且当 $|y|\to 0$ 时，$\lim|g(t, y)|/|y|=0$ 关于 t 一致地成立.

如果变分方程

$$\dot{y}=f_x(t, \varphi(t))y$$

的所有型数<0(>0),则可推出 $y=0$ (定理 33),从而，$x=\varphi(t)$ 对于 $t\to+\infty$(对于 $t\to-\infty$)是(一致)渐近稳定的. 可是，在 f

是自治的情形时，即 $f(t, x)=X(x)$ 与 t 无关，这时对于非常数的周期解 $\varphi(t)$，这一假设是不能实现的. 就是说，在这种情况下，微分 $\dot{\varphi}=X(\varphi)$，可得 $\ddot{\varphi}=X_x(\varphi(t))\dot{\varphi}$，因此 $\psi=\dot{\varphi}$ 是变分方程

$$\dot{y}=X_x(\varphi(t))y \tag{9.3.22}$$

的解. 因为 ψ 是非常数的周期解，这个方程就至少有一个等于零的型数(第八章，§ 3.2).

(b) (9.3.22) 的型数叫作环 $x=\varphi(t)$ 的特征指数，因而，每一个环最多有 $n-1$ 个非零的特征指数. 它们的和等于

$$-\chi\left(\exp\left(-\int_0^t t_r X_x(\varphi(s))ds\right)\right)$$
$$=-\chi\left(\exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} X(\varphi(s))ds\right)\right).$$

根据第八章 § 5，因为(9.3.22)是周期的，从而是正则系统. 因而这个和等于(第八章，§ 6.1 (d))

$$-\lim_{t\to+\infty}\left(t^{-1}\log\left|\exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} X(\varphi(s))ds\right)\right|\right)$$
$$=\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\mathscr{R}\int_0^t \operatorname{div}X(\varphi(s))ds=\lim_n n^{-1}\omega^{-1}\mathscr{R}\int_0^{n\omega}\operatorname{div}X(\varphi(s))ds$$
$$=\omega^{-1}\mathscr{R}\int_0^{\omega}\operatorname{div} X(\varphi(s))ds.$$

$n=2$ 时，平面环(第四章，§ 2.5) 的特征指数的定义与上述定义是一致的.

(c) 对 $n=2$ 的情形，当特征指数 $<0(>0)$时，环是稳定(不稳定)的，或更确切地说，是轨道(渐近)稳定(不稳定)的(第四章，§ 2.2). 因而，所有充分靠近它的轨线当 $t\to+\infty(t\to-\infty)$时都趋近于它.

在 $n>2$ 的一般情况，如果 $n-1$ 个非零特征指数全部 <0 (或全部 >0)，则环近傍的轨线都与 $n=2$ 时类似，这一情况可以更好地描述如下：已知 $x=\varphi(t)$ 是

$$\dot{x}=X(x) \tag{9.3.23}$$

的周期解，则 $\varphi(t+\alpha)$ (α 是实数)也是它的解，因而，如果 $\varphi(t)$ 是非奇异的，当 t 和 α 变化时，$\varphi(t+\alpha)$ 在 t, x 空间中生成一个柱

面Γ. 于是如果 $n-1$ 个非零的特征指数全部 <0,可以证明,当 $t\to+\infty$ 时不仅充分靠近柱面 Γ 的每一个解都趋近于它,而且,如果 $x=\psi(t)$ 是这样解中的一个,则存在一个 α_0, 使得当 $t\to+\infty$ 时,

$$\psi(t)-\varphi'(t+\alpha_0)\to 0.$$

就是说, $\psi(t)$ 趋近于位于 Γ 上的一个特殊(周期)解. 其证明可参照 E. A. Coddigton-Levinson [1], p. 323.

也可以用下述方法来证明这一点。能够证明(参看 S. Lefschitz [1], p. 149; J. K. Hale-A. Stokes [1], [2]), 通过引入局部坐标系的方法,把(9.2.23)变成

$$\begin{cases}\dot{s}=1+\sigma(t,s,h),\\ \dot{h}=Hh+h_1(t,s,h),\end{cases}\tag{9.3.24}$$

其中 s, σ 是纯量, h, h_1 是 $(n-1)$-向量,而H是一个 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵,其特征根与 $\varphi(t)$ 的非零特征指数相同. 柱面Γ 由 $h=0$ 给出. 于是, 如果 $x=\psi(t)$ 是 (9.3.23) 的解,则 $\psi(t)\to\Gamma$ 等价于当 $t\to+\infty$ 时, $h(t)\to 0$,而 $s(t)$ 对所有 $t\geqslant 0$ 有意义;同时,对于某个 α_0, $\psi(t)-\varphi(t+\alpha_0)\to 0$ 等价于当 $t\to+\infty$ 时, $h(t)\to 0$, $s(t)-s(t+\alpha_0)\to 0$.

在上述例中,一个微分方程组被分成两部分,对这两个子系统提出了不同的问题. 这个例子再次表明了在乘积空间中来研究微分方程的近代倾向. 更详细的内容可在 Lefschetz 的书[1]中和在 J. K. Hale-A. Stokes 的论文[1]中找到,这篇论文详尽地研究了当变分方程的 $n-(k+1)$ 个型数 <0 ($k+1$ 个是零)时,(9.2.23)的解在 t, x 空间中的由 k-参数柱面族所组成的流形的近傍的性态,而这个流形是与周期解的 $k+2$ 维流形相对应的.

(d) 当(9.2.23)的单个周期解的负特征指数的个数少于 $n-1$ 个时,要描述在它附近的解的性态仍然是很困难的. 例如,具有零特征指数的平面环 ($n=2$) 就可能是稳定的, 也可能是不稳定的或半稳定的, 这取决于 $X(x)$ 在 $\varphi(t)$ 周围的展开式中的高次项. 全面的分析要使用最先由 Poincaré 想出来的所谓截痕方法. 与

此有关的内容可参看 V. V. Nemytzkii-V. V. Stenpanov [1], p. 249; S. Lefschetz [1],p. 149 和 L. Markus 新近的论文[1].

§4. 渐近等价性

1. 渐近等价性

(a) 设给定两个系统

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{9.4.1}$$

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x), \tag{9.4.2}$$

其中 $A(t)$ 是定义在 $0 \leqslant t$ 上的连续的 $n \times n$ 矩阵，而 $g(t, x)$ 是定义在半空间 $0 \leqslant t$ 上的连续的 n-向量. 此外，还设过每一点 (t_0, x^0), (9.4.2) 有唯一解，这个解照例用 $x(t, t_0, x^0)$ 表示.

这两个系统称为渐近等价的，如果在空间 $t = 0$ 中存在一个同胚映射 $y = H(x)$，使得对于每一个 x^0 都有:

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t, 0, x^0) - y(t, 0, H(x^0))| = 0. \tag{9.4.3}$$

下一段中我们将证明 H. Weyl 的一个定理，它给出了(9.4.1)和 (9.4.2) 渐近等价的充分条件.

2. H. Weyl 定理

设 $A(t)$ 是常数阵 C 并设 (9.4.1)，即

$$\dot{y} = Cy \tag{9.4.4}$$

是有界系统，从而它是(一致)稳定的. 不失一般性，可以假设 C 是 Jordan 标准型. 因为，如果不是这样，可以通过坐标的线性变换 $y = Tz$，将 C 变成 Jordan 标准型，其中 T 是非退化的常数阵，这个变换可以看成是相空间到其自身的线性变换. 于是

$$C = \begin{pmatrix} M_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & M_p & & & \\ & & & M_{p+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & M_q \end{pmatrix},$$

并且我们可以假设"块" $M_1 \cdots M_p$ 对应着实部为零的特征根 λ_1, $\cdots$, λ_k(根的重数等于它们的零度),而 $M_{p+1} \cdots M_q$ 对应着其余的实部为负的特征根. $M_1 \cdots M_p$ 是对角阵.

如果

$$U_1(t) = \left(\begin{array}{ccc|c} e^{tM_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & e^{tM_p} & \\ \hline 0 & & & 0 \end{array}\right), \quad U_2(t) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & 0 \\ \hline & e^{tM_{p+1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tM_q} \end{array}\right),$$

则 (9.4.4) 的标准基本解矩阵可以表为

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t),$$

且 $U^{-1}(t) = U(-t) = U_1(-t) + U_2(-t)$.

因为 $U_1^{-1}(t)U_2(-s) = U_2(t)U_1(-s) = O$ ($n \times n$ 零矩阵)而 $U_2(t)U_2(-s) = U_2(t-s)$, 我们还有

$$\begin{aligned} U(t)U^{-1}(-s) &= U_1(t)U_1(-s) + U_2(t)U_2(-s) \\ &= U_1(t)U_1(-s) + U_2(t-s). \end{aligned}$$

因而,给定 x^0, 如果 $x(t) = x(t, 0, x^0)$, 我们就有(§ 3)

$$\begin{aligned} x(t) &= U(t)x^0 + \int_0^t U(t)U^{-1}(-s)g(s, x(s))ds \\ &= U(t)x^0 + U_1(t)\int_0^t U_1(-s)g(s, x(s))ds \\ &\quad + \int_0^t U_2(t-s)g(s, x(s))ds. \end{aligned} \tag{9.4.5}$$

(b) 现在假设

$$g(t,0)=0, \tag{9.4.6}$$

以及

$$|g(t,x'')-g(t,x')|<\lambda(t)|x''-x'|, \tag{9.4.7}$$

其中 $\lambda(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可积,

$$\int_0^{+\infty}\lambda(s)ds=\lambda<+\infty. \tag{9.4.8}$$

则系统 (9.4.2),或更确切地说系统

$$\dot{x}=Cx+g(t,x) \tag{9.4.9}$$

将简单地称为殆线性的.

首先我们来证明一个引理.

引理. 如果(9.4.4)是(一致)稳定的,而(9.4.9)是殆线性的,则(9.4.9) 的所有解都是一致稳定的.

将 (9.4.5) 的一对解 x', x'' 分别代入 (9.4.5) 中的第一个等式中,然后相减,就得到

$$x''(t)-x'(t)=U(t)(x^{0''}-x^{0'})$$
$$+\int_0^t|U(t)U^{-1}(-s)|[g(s,x'')-g(s,x')]ds,$$

从而根据 (9.4.7) 和 (9.4.4) 的一致稳定性,就有

$$|x''(t)-x'(t)|<|U(t)||x^{0''}-x^{0'}|$$
$$+\int_0^t|U(t)U^{-1}(s)|\lambda(s)|x''(s)-x'(s)|ds$$
$$<C_1|x^{0''}-x^{0'}|+\int_0^t C_2\lambda(s)|x''(s)-x'(s)|ds.$$

根据 Gronwall 不等式,在 x'' 和 x' 两者尚存在的区间上,就有

$$|x''(t)-x'(t)|\leqslant C_1|x^{0''}-x^{0'}|e^{C_2\lambda}. \tag{9.4.10}$$

根据(9.4.6)我们可以取 $x'=0$, 于是, $x''(t)$ 对所有 t 是有界的. 所以,这一结论适用于(9.4.9)的一切解. 因为由 $|x^{0''}-x^{0'}|<\varepsilon e^{-C_2}/C_1$ 可推出 $|x''(t)-x'(t)|<\varepsilon$, 故由(9.4.10)可以推出引理的结论.

(c) 我们现在就来证明 Weyl 定理 (H. Weyl [1]).

定理 36. 如果(9.4.4)是(一致)稳定的,而(9.4.9)是殆线性的,

则这两个系统是渐近等价的.

设 $U_1(t)$ 是对应于矩阵

$$\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_p \end{pmatrix}$$

的线性系统 (9.4.4) 的标准基本解矩阵. 这个系统是限制稳定的, 从而 $U_1(t)$ 及其逆 $U_1(-t)$ 均是有界的 (§ 2). 所以, 根据 (9.4.7), (9.4.8) 以及保证 x 的有界性的引理,就有

$$\int_t^{+\infty} |U_1(-s)g(s, x(s))|ds < C_3\int_0^{+\infty} \lambda(s)|x(s)|ds < +\infty. \tag{9.4.10}$$

(9.4.5) 可以写成

$$x(t) - y(t) = U_1(t)\int_t^{+\infty} U_1(-s)g(s, x(s))ds + \int_0^t U_2(t-s)g(s, x(s))ds, \tag{9.4.11}$$

其中

$$y(t) = U(t)[x^0 + \int_0^{+\infty} U_1(-s)g(s, x(s))ds]$$

是(9.4.4)的解 $y(t, 0, y^0)$, 而 y^0 则由下式所定义:

$$y^0 = x^0 + \int_t^{+\infty} U_1(-s)g(s, x(s))ds. \tag{9.4.12}$$

我们现在来证明当 $t\to+\infty$ 时 $x(t)-y(t)\to 0$. 事实上,根据 (9.4.10) 和 $U_1(t)$ 的有界性,有

$$U_1(t)\int_t^{+\infty} U_1(-s)g(s, x(s))ds \to 0.$$

另方面,因为 $U_2(t)$ 是 (9.4.4) 的对应于矩阵

$$\begin{pmatrix} M_{p+1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_q \end{pmatrix}$$

的子系统的标准基本解矩阵，且因为这个子系统具有 $L(\nu, N)$ 性质，其中$-\nu$ 为 C 的特征根的最大负实部，由此可得

$$\left|\int_0^t U_2(t-s)g(s, x(s))ds\right| < C_4\int_0^t \lambda(s)e^{-\nu(t-s)}ds$$
$$< \int_0^{t_0} \lambda(s)e^{-\nu(t-s)}ds + \int_{t_0}^t \lambda(s)ds.$$

这个和小于 ε. 因为，对于充分大的 t_0，第一项 $<\frac{\varepsilon}{2}$. 而第二项，只要固定 t_0 并把 t 取得充分大，也将小于 $\frac{\varepsilon}{2}$.

因此，对于 (9.4.9) 的由 x^0 出发的解 $x(t, 0, x^0)$，对应着 (9.4.4)的解 $y(t, 0, y^0)$，其中 y^0 由(9.4.12)式定义，且当 $t\to+\infty$ 时，$x(t, 0, x^0)-y(t, 0, y^0)\to 0$.

反之，设 $y(t, 0, y^0)$ 是 (9.4.4) 的任一解. 我们将证明存在 (9.4.9)的一个解 $x(t)=x(t, 0, x^0)$，使得

$$x(0)+\int_0^{+\infty} U_1(-s)g(s, x(s))ds = y^0,$$

因而(9.4.12)成立.

不失一般性，假设对 $t\geqslant 0$，有

$$\int_0^t |U_2(t-s)|\lambda(s)ds + \int_t^{+\infty} |U_1(t-s)|\lambda(s)ds \leqslant q < 1. \tag{9.4.13}$$

因为如果不是这样，我们可以用空间 $t=T$ 来代替空间 $t=0$，其中 T 满足

$$\int_T^t |U_2(t-s)\lambda(s)ds + \int_t^{+\infty} |U_1(t-s)|\lambda(s)ds \leqslant q < 1.$$

根据解对初值的连续相依性，由空间 $t=T$ 中的同胚映射可以推出空间 $t=0$ 中的同胚映射，故有限位移 T 并不影响问题的本质.

以 $x(t)$ 为未知函数的积分方程

$$x(t)-y(t) = -\int_t^{+\infty} U_1(t-s)g(s, x(s))ds$$
$$+\int_0^t U_2(t-s)g(s, x(s))ds$$

(其中 $y(t)$ 是 (9.4.4) 的给定解) 可以用如下的逐次逼近法求解:

$$x^{(0)}(t) = y(t),$$

$$x^{(m+1)}(t) = y(t) - \int_t^{+\infty} U_1(t-s)g(s, x^{(m)}(s))ds + \int_0^t U_2(t-s)g(s, x^{(m)}(s))ds.$$

事实上，根据 (9.4.13) 和 (9.4.7) 容易验证有

$$|x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| < q\sup|y(t)|.$$

尚待证明(9.4.12)是一个同胚映射. 将两个不同的数对 $(x^{0\prime}, y^{0\prime})$, $(x^{0\prime\prime}, y^{0\prime\prime})$ 代入 (9.4.12) 并相减，再根据 (9.4.7)，我们就有

$$|y^{0\prime\prime} - y^{0\prime}| < |x^{0\prime\prime} - x^{0\prime}| + \int_0^{+\infty} C\lambda(s)|x''(s) - x'(s)|ds,$$

从而由引理即可得到结论.

3. 关于渐近等价性的其它结果

渐近等价性问题首先由 H. Weyl 以上述形式提出，他还解决了一个特别重要的情形. 这个问题以前也曾由几个作者以弱一些的形式研究过. 他们的结果的基础的共同假设是 g 的线性性质，$g(t, x) = B(t)x$. 由它可以在与 (9.4.8) 相应的条件

$$\int_0^{+\infty} |B(s)|ds < +\infty$$

之下，比较系统

$$\dot{y} = Cy \tag{9.4.4}$$

与系统

$$\dot{x} = [C + B(t)]x. \tag{9.4.14}$$

特别是讨论了 $C = O$($n \times n$ 零矩阵)时，(9.4.14)和 (9.4.4) 的渐近等价性问题；这时问题化为方程 (9.4.14) (其中 $C = O$) 在无限远处满足 $x(\infty) =$ 已知常数的 Cauchy 问题. 关于这些问题，可以复习第三章 § 3；也可参看 W. J. Trijtzinsky [1]，定理 4.1；A. Wintner [1],[2]; N. Levinson [1]; Weyl 的工作就是以 Levinson 这篇论文为基础的.

当 $A(t) = O$ 时，(9.4.1)和 (9.4.2) 之间的渐近等价性实质上是由 A. Wintner [4],[5],[6],[8]建立的，他对于 $g(t,x)$ 的假设

比"殆线性"更弱些．当 $A(t)$ 不是常数阵时，(9.4.1)和(9.4.2)间的渐近等价性问题也被 A. Wintner [3], G. Ascoli [1], V. Ya. Yakubovich [1], K. Conti [4] 等人研究过；Conti 的工作没有把(9.4.1)的可约性作为必要条件予以假定．

V. Ya. Yakubovich [1] 以加在 $g(t, x)$ 上的条件比殆线性强一些为代价，取消了线性系统 (9.4.1) 的稳定性这个假设．他的结果可在 Nemytskii-Stepanov 的书[1]第三章 § 2 中找到．

t_∞-相似这个概念可以成功地用来确立线性系统之间的渐近等价性 (R. Conti [5])．

补 充 与 问 题

1. Lyapunov 方法在自动控制理论中的应用．

尽管 Lyapunov 方法在理论上具有突出的重要性，但不可忽视的事实却是，它首先还是从应用中得到启发和建立起来的．一个非常令人注意的例子就是 Lyapunov 方法在自动控制理论中的应用．对于我们可以这么说说的问题，由于甚至连想做个最简单的介绍都不可能，因此建议读者参看 W. Hahn [1], § 13, 14, 以及 S. Lefshetz 新近的一篇论文 [3] (在那里可以找到 M. A. Aizerman, A. I. Lur'ye, A. M. Letov 和其它作者的进一步的文献)，还有 Lasalle 和 Lefshetz 特别为工程师们写的一本小册子 [1]，最后是 R. E. Kalman-J. E. Bertram [1].

2. 动力系统的稳定性和其它的推广

V. I. Zubov [1] 最近借助于 V 函数，把稳定性研究推广到度量空间中的一般动力系统上去(第四章 § 7)． 也可参看 W. Hahn [1], § 35, Lefschetz [2], R. W. Bass [1].

另一方面，微分方程的理论，特别是稳定性理论，现在正朝着这样的方程 $\dot{x} = f(t, x)$ 发展，其中 x 与 f 都属于适当的 Banach 空间．关于线性情形，可参看 J. L. Massera 和 J. J. Schäffer [1] 的

一组文章.

3. Routh-Hurwitz 准则

给定常系数线性系统

$$\dot{y}=Cy,$$

它的渐定稳定性与 $\det(C-\rho I)$ 的所有特征根均具负实部等价(定理 26).

对于实常数阵 C，其特征根均具负实部的一个充分条件是著名的 Routh-Hurwitz 准则. 它可以叙述为:

如果

$$F(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

是一实系数多项式. 设 $D_1=a_1$，而

$$D_k=\det\begin{pmatrix}a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1}\\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2}\\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3}\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k\end{pmatrix}$$

$$(k=2,3,\cdots,n),$$

其中对于 $j>n$ 有 $a_j=0$.

如果 $D_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，则 $F(z)=0$ 的所有根均具负实部. (参看 M. Marden, 多项式零点的几何性质, *Math. Surveys*, 3. Amer. Math. Society, 1949; 这篇文章还研究了多项式 $F(z)$ 具有复系数的情形. 关于进一步的准则和参考文献可参看 L. Cesari [1], 第一章, 2.4.)

4. 一个练习

令 $u=x_1, u'=x_2, \cdots, u^{(n-1)}=x_n$, n 阶线性方程

$$u^{(n)}+a_1u^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}u'+a_nu=0,$$

其中系数 $a_i=a_i(t)$，就化成一个特殊的系统(9.2.2)，其中 $A(t)$ 是

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

试对于这个系统叙述 § 2 的结果.

5. O. Perron 定理和它的推广

设系统

$$\dot{y} = A(t)y, \quad 0 \leqslant t, \tag{1}$$

其中 $A(t)$ 连续,具有 $L(\nu, N)$ 性质,其中 $\nu > 0$, 即对于任一基本解矩阵 $Y(t)$,有

$$|Y(t)Y^{-1}(s)| < N\exp(-\nu(t-s)), \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

如果 n-向量 $a(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 上连续且有界,则

$$\dot{x} = A(t)x + a(t) \tag{2}$$

的所有解是有界的. 事实上,

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)a(s)ds,$$

从而

$$|x(t)| < Ne^{-\nu(t-t_0)}|x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} CNe^{-\nu(s-t_0)}ds < +\infty.$$

如果 $A(t)$ 在 $t > 0$ 上有界,则其逆定理也成立;即如果(2)的解对于所有有界的 $a(t)$ 是有界的,则(1)具有性质 $L(\nu, N)$.

O. Perron [2] 使用相当复杂的方法证明了这个问题的等价形式,而 H. A. Antosiewicz-P. Davis [1] 则给出了一个简单的证明. 其后, Perron 的结果已由 M. G. Krein [1] 和 D. L. Kucher [1] 用泛函分析方法证明了;还可参看 B. Bellman [2]. 这些结果构成了前面引用过了的 J. L. Massera 和 J. J. Schäffer [1] 的一系列文章的想法.

T. F. Bridgland [1] 最近给出了 (2) 的所有解的收敛条件.

6. 拟线性系统的型数

拟线性系统是指带有轻微非线性扰动 g 的系统

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x),$$

它的型数已为好几个作者研究过．参看 Grobman[2]，[4]; G. K. Pozhariskii [1]，[2]; R. E. Vinograd [2]，[3]，[4]; B. F. Bylow [1]; C. Kluczny [1].

7. 有关拟线性系统的参考文献

关于拟线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x)$$

的稳定性，除已讨论过的将它与对应的线性系统

$$\dot{y} = A(t)y$$

加以比较的内容之外，我们将更多的材料开列如下．它们包括那些一般说来是对两个系统的解进行更精细的比较的文章．

对于线性情形 $g(t, x) = B(t)x$，参看 O. Dunkel [1]; S. Faedo [1]，[2]; A. Ghizzetti [1]，[2]; N. Levinson [2]; E. Levi [1]; R. Bellman [3]，第二章，定理 7，8，[4]; E. A. Coddington-N. Levinson [1]，第三章，定理 8.1; 问题 29，33，35，37; Ph. Hartman-A. Wintner [1]，[3]; V. P. Basov [1]; M. Rab [1].

对于 g 是非线性情形，参看：F. Lettemeyer [1]; A. A. Shestakov-A. U. Paivin [1]; D. M. Grobman [1]，[3]，[5]; E. A. Coddington-N. Levinson [1] 第十三章，4，5 节; Z. Szmydt [1]; V. V. Nemytskii [1]; C. Olech [1]; V. Lakshmikantham [1]; F. V. Atkinson [1]; Y. Mikami [1]; R. Bellman [4]; P. Turan [2]; V. M. Alekseyev [1]; Ph. Hartman-A. Wintner [2]，[3].

参 考 文 献

ABAN'CHIN, A. M.

[1] On the stability of stationary motion in the case of a characteristic equation with zero roots, *Vestnik Leningr. Univ.*, 1960, **13**, 24–31 (Russian).

ALEKSEYEV, V. M.

[1] On the asymptotic behavior of solutions of weakly nonlinear systems of ordinary differential equations, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **134** (1960), 247–250 (Russian).

ANTOSIEWICZ, H. A.

[1] Stable systems of differential equations with integrable perturbation term, *Jour. London Math. Soc.*, **31** (1956), 208–212.

[2] A survey of Lyapunov's second method, *Contrs. to the theory of nonl. oscills.*, vol. 4 (1958), 141–166.

ANTOSIEWICZ, H. A. and P. DAVIS

[1] Some implications of Lyapunov's conditions for stability, *Jour. Rat. Mech. Anal.*, **3** (1954), 447–457.

ASCOLI, G.

[1] Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità, I, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (8) **9** (1950), 129–134.

ATKINSON, F. V.

[1] On stability and asymptotic equilibrium, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 690–708.

BARBASHIN, E. A.

[1] The method of sections in the theory of dynamical systems, *Mat. Sbornik*, **29** (1951), 233–280 (Russian).

BARBASHIN, E. A. and KRASOVSKI, N. N.

[1] On stability of motion in the large, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **86** (1952), 453–454 (Russian).

[2] On the existence of a Lyapunov function in the case of asymptotic stability in the large, *Prikl. Mat. i Meh.*, **18** (1954), 345–350 (Russian).

BARBASHIN, E. A. and SKALKINA, M. A.

[1] On stability in the first approximation, *Prikl. Mat. i Meh.* **19** (1955), 623–624 (Russian).

BARBUTI, U.

[1] Contributi al problema della stabilità per i sistemi differenziali lineari ordinari, *Ann. Scuola Norm. Sup Pisa*, (3) **10** (1956), 185–215.

[2] Sulla nozione di t_∞-similitudine tra matrici e sulla stabilità dei sistemi differenziali lineari, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) **12** (1957), 61–66.

BASOV, V. P.

[1] On asymptotic behavior of the solutions of systems of linear differential equations, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **106** (1956), 951–954 (Russian).

BASS, R. W.

[1] Zubov's stability criterion, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, (2) **4** (1959), 26–29.

BELLMAN, R.

[1] On the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 357–386.

[2] On an application of a Banach–Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 515–522.

[3] *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, 1953.

[4] On a generalization of a result of Wintner, *Quart. Appl. Math.*, **16** (1959), 431–432.

BIHARI, I

[1] Researches on the boundedness and stability of the solutions of nonlinear differential equations, *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **8** (1957), 261–278.

BOHL, P.

[1] Sur certaines équations différentielles d'un type général utilisable en méchanique, *Bull. Soc. Math. France*, **38** (1910), 5–138.

BRIDGLAND, T. F. JR.

[1] Asymptotic behavior of the solutions of nonhomogeneous differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 546–552.

BYLOV, B. F.

[1] On upper stability of the greatest characteristic index of a system of linear differential equations with almost periodic coefficients, *Mat. Sbornik*, **48** (90) (1959), 117–128 (Russian).

CESARI, L.

[1] Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (2) **9** (1940), 163–186.

[2] *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Ergebn. d. Math. Heft 16, Berlin, 1959.

CHETAYEV, N. G.

[1] Un théorème sur l'instabilité, *C. R. (Dokl.) Ac. Sci. URSS*, **1** (1934), 529–531.

[2] On the instability of the equilibrium when the force function is not maximum, *Uch. Zap. Kaz. Gos. Univ.*, **98** (1938), 43–58 (Russian).

[3] Concerning the stability and instability of irregular systems, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **12** (1948), 639–642 (Russian).

[4] *Stability of motion*, GITTL, Moscow, 1946; 2nd edit. 1959 (Russian).

CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N.

[1] *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, 1955.

COLEMAN, C.

[1] Systems of differential equations without linear terms, *Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A.*, **47** (1961), 1650–1651.

CONTI, R.

[1] Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) **6** (1951), 288–293.

[2] Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari, *Rivista Mat. Univ. Parma*, **6** (1955), 3–35.

[3] Sulla t-similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **19** (1955), 247–250.

[4] Sull'equivalenza asintotica dei sistemi di equazioni differenziali, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **41** (1955), 95–104.

[5] Sulla t_∞-similitudine tra matrici e l'equivalenza asintotica dei sistemi differenziali lineari, *Rivista di Mat. Univ. Parma*, **8** (1957), 43–47.

CORDUNEANU, C.

[1] Sur la stabilité conditionelle par rapport aux perturbations permanentes, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 229–236.

[2] Sur la stabilité asymptotique, *Anal. Sti. Univ. Al. I. Cuza, Iasi (Serie noua)*, Sec. I, 5, (1959), 37–40.

[3] Sur la stabilité asymptotique, II, *Revue de Math. pures et appl. (Acad. R.P.R.)* **5** (1960), 573–576.

[4] Applications of differential inequalities to the theory of stability, *Anal. Sti. Univ. Al. I. Cuza, Iasi (Serie noua)*, Sec. I, **6** (1960), 47–58 (Russian).

COTTON. E.

[1] Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, (3) **28** (1911), 473–521.

DEMIDOVICH, B. P.

[1] On the stability in the sense of Lyapunov of linear systems of ordinary differential equations, *Mat. Sbornik*, **28** (70) (1951), 659–684 (Russian).

DUNKEL, O.

[1] Regular singular points of a system of homogeneous linear differential equations of the first order, *Proc. Amer. Ac. Arts Sci.*, **38** (1902/03), 341–370.

ERUGIN, N. P.

[1] Theorems on instability, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **16** (1952), 355–361 (Russian).

FAEDO, S.

[1] Proprietà asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei. *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **26** (1947), 207–215.

[2] Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (8) **2** (1947), 564–570; (8) **2** (1947), 757–764; (8) **3** (1947), 37–43; (8) **3** (1947), 192–198.

GAVRILOV, N. I.

[1] On Lyapunov stability in the presence of zero eigenvalues, *Mat. Sbornik*, **41** (83) (1957), 7–22 (Russian).

GERMAIDZE, V. E.

[1] On asymptotic stability in the first approximation, *Prikl. Mat. i Meh.*, **21** (1957), 133–135 (Russian).

GERMAIDZE, V. E. and KRASOVSKII, N. N.

[1] On stability under permanent disturbances, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **21** (1957) 769–774 (Russian).

GHIZZETTI, A.

[1] Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, lineari ed omogenee, *Giorn. di Mat. di Battaglini*, (4) **77** (1947), 5–27.

[2] Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee, *Rend. di Mat. e sue app.*, (5) **8** (1949), 28–42.

GOLOMB, M.

[1] Bounds for solutions of nonlinear differential systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1958), 272–282.

GORSHIN, S.

[1] On the stability of motion under permanently acting disturbances, *Izv. Akad. Nauk KazSSR, ser. mat. mekh.*, **56** (1948), 46–73 (Russian).

GROBMAN, D. M.

[1] Systems of differential equations analogous to linear ones, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **86** (1952), 19–22 (Russian).

[2] Characteristic exponents of quasi-linear systems, *Mat. Sbornik*, **30** (72) (1952), 121–166 (Russian).

[3] Asymptotic behavior of solutions of quasi-linear systems, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **108** (1956), 571–574 (Russian).

[4] Exponents and minus-exponents of a system of ordinary differential equations, *Mat. Sbornik*, **46** (1958), 343–358 (Russian).

[5] Topological and asymptotic equivalence for systems of differential equations, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **140** (1961), 746–747 (Russian).

HAHN, W.

[1] *Theorie und Anwendungen der direkten Methode von Ljapunov*, Ergebn. d. Math., Heft 22, Berlin, 1959.

HALE, J. K. and STOKES, A. P.

[1] Behavior of solutions near integral manifolds, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **6** (1960), 133–170.

[2] A discussion of differential equations on product spaces, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (2) **6** (1961), 67–74.

[3] Conditions for the stability of non-autonomous differential equations, *Jour, Math. Anal. & appl.*, **3** (1961), 50–69.

HARTMAN, PH. and WINTNER, A.

[1] Asymptotic integrations of linear differential equations, *Amer. Jour. Math.*, **77** (1955), 45–86.

[2] Asymptotic integrations of ordinary non-linear differential equations, *ibid.* **77** (1955), 692–724.

[3] On linear and non-linear perturbations of linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 1–24.

HAYASHI, K.

[1] On the strong stability and boundedness of solutions of ordinary differential equations, *Mem. Coll. Sci, Univ. Kyoto*, Ser. A, **32** (1959), 281–295.

[2] Strong stability and boundedness with respect to the weight $\omega(t)$, *ibid.*, **32** (1960), 413–444.

KALMAN, R. E. and BERTRAM, J. E.

[1] Control system analysis and design via the second method of Lyapunov, *Jour. Basic Engng.*, (June 1960) 371–393.

KAMENKOV, G. V

[1] On stability of motion over a finite interval of time, *Prikl. Mat. i Meh.*, **17** (1953), 529–540 (Russian).

KLUCZNY, C.

[1] On the characteristic exponents of the solutions of a system of ordinary differential equations, *Ann. Pol. Math.*, **8** (1960), 215–239.

KRASOVSKII, N. N.

[1] On a converse of a theorem of K. P. Persidskii on uniform stability, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **19** (1955), 273–278 (Russian).

[2] On stability in the first approximation, *ibid.*, 516–530 (Russian).

[3] On the theory of Lyapunov's second method for the study of stability, *Mat. Sbornik*, **40** (1956), 57–64 (Russian).

[4] *Some problems in the theory of stability of motion*, Fizmatgiz, Moscow, 1959 (Russian).

KREIN, K. G.

[1] On some questions related with Lyapunov's ideas on the theory of stability *Uspehi Mat. Nauk*, III, 3 (25), (1948), 166–169 (Russian).

KUCHER I. D.

[1] Some sufficient-criteria for the boundedness of solutions of a system of differential equations, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **69** (1949), 603–606 (Russian).

KURZWEIL, J.

[1] On the reversibility of Lyapunov's first theorem concerning the stability of motion, *Czech. Math. Jour.*, **5** (80) (1955), 382–398 (Russian).

[2] On the converse of Lyapunov's second theorem on the stability of motion, *Czech. Math. Jour.*, **5** (1956), 217–259; 455–484 (Russian).

KURZWEIL J. and VRKOČ, I.

[1] The converse theorems of Lyapunov and Persidskii concerning the stability of motion, *Czech. Math. Jour.*, **7** (82), (1957), 254–274 (Russian).

LAKSHMIKANTHAM V.

[1] On the boundedness of solutions of non-linear differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 1044–1048.

LASALLE, J. P.

[1] The extent of asymptotic stability, *Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.*, **46** (1960), 363–365.

LASALLE, J. P. and LEFSCHETZ, S.

[1] *Stability by Lyapunov's direct method with applications*, Math. in Science and Engineering, vol. 4, Academic Press, 1961.

LEBEDEV, A. A.

[1] On the problem of stability over a finite interval of time, *Prikl. Math. i Meh.* **18** (1954), 139–148 (Russian).

LEFSCHETZ, S.

[1] *Differential equations: Geometric theory*, New York, 1957.

[2] Lyapunov and stability in dynamical systems, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, (2) **3** (1958), 25–39.

[3] Controls: An application of the direct method of Lyapunov, *ibid.*, (2) **5** (1960), 139–143.

[4] The critical case in differential equations, *ibid.*, (2) **6** (1961), 5–18.

LETTENMEYER, F.

[1] Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungensystemen, *Stzb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl.*, **59** (1929), 201–252.

LEVI, E.

[1] Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, (8) *8* (1950), 465–470; (8) **9** (1950) 26–31.

LEVINSON, N.

[1] The asymptotic behavior of a system of linear differential equations, *Amer. Jour. Math.*, **68** (1946), 1–6.

[2] The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations, *Duke Math. Jour.*, **15** (1948), 111–126.

[3] On stability of non-linear differential equations, *Colloquium Math.*, **2** (1949), 40–45.

LIAPOUNOFF, A. M.

[1] Problème général de la stabilité du mouvement, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, (2) **9** (1907), 27–474; *(Ann. of Math. Studies*, 17, *Princeton*, 1949*)*.

LYASHENKO, N. YA.

[1] On asymptotic stability of solutions of a system of differential equations. *Dokl. Ak. Nauk. SSSR*, **96** (1954), 237–239 (Russian).

MALKIN, I. G.

[1] On stability in the first approximation, *Sbornik Nauchnykh Trudov Kazan. Aviats. Inst.*, № **3**, (1935) (Russian)

[2] On stability under constantly acting perturbations, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **8** (1944), 241–245 (Russian) *Amer. Math. Soc. Translations*, **8** (1950).

[3] A theorem on stability in the first approximation, *Dokl. Ak. Nauk. SSSR*, **76** (1951,) 783–784 (Russian)

[4] On a theorem related to stability of motion, *ibid.*, **84** (1952), 877–878 (Russian).

[5] On the question of the converse of Lyapunov's theorem on asymptotic stability, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **18** (1954), 129–138 (Russian).

[6] *Theorie der Stabilität einer Bewegung*, R. Oldenbourg, München, 1959 (translated from Russian edit. 1952, by W. Hahn and R. Reissig).

MARKUS, L.

[1] The behavior of the solutions of a differential system near a periodic solution, *Ann. of Math.*, 72 (1960), 245–266.

MARKUS, L. and YAMABE, H.

[1] Global stability criteria for differential systems, *Osaka Math. Jour.*, **12** (1960), 305–317.

MASSERA, J. L.

[1] On Lyapunov conditions of stability, *Ann. of Math.*, **50** (1949), 705–721.
[2] Contributions to stability theory, *ibid.*, **64** (1956), 182–206; **68** (1958), 202.
[3] Converse theorems of Lyapunov's second method, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, (2) **5** (1960), 158–166.

MASSERA, J. L. and SCHÄFFER, J. J.
[1] Linear differential equations and functional analysis, I, *Ann. of Math.*, **67** (1958), 517–573; II, *ibid.*, **69** (1959), 88–104; III, *ibid.*, 535–574; IV, *Math. Annalen*, **139** (1960), 287–342.

MEL'NIKOV, G. I.
[1] Some questions in Lyapunov's direct method, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **110** (1956), 326–329 (Russian).

MIKAMI, Y.
[1] A remark to existence and uniqueness of certain stable solutions of a weakly non-linear system, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **23** (1959), 33–41.

NEMYTSKII, V. V.
[1] On certain methods for the qualitative study in the large of multidimensional autonomous systems, *Trudy Mosk. mat. Obsh.*, **5** (1956), 455–482 (Russian).

NEMYTSKII, V. V. and STEPANOV, V. V.
[1] *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press, 1960 (transl. from the Russian ed. 1949).

OKAMURA, H.
[1] On the strong stability of the stationary point in the current, *Functional Equations*, **40** (1943), 6–19 (Japanese).

OLECH, C.
[1] On the asymptotic behavior of the solutions of a system of ordinary non-linear differential equations, *Bull. Ac. Pol. Sci.*, Cl. **3**, 4 (1956), 555–561.

PERRON, O.
[1] Über Stabilität und asymptotische Verhalten der Integrale Differentialgleichungensystemen, *Math. Zeitschr.*, **29** (1928), 129–160.
[2] Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, *ibid.*, **32** (1930), 703–728.

PERSIDSKII, K. P.
[1] A theorem on the stability of motion, *Izv. Fiz. Mat. Obsh. Kazakh. Gos. Univ.* **6** (1932–33), 76–79 (Russian).
[2] Über einen Satz von Ljapunov, C. R. *(Dokl.) Ac. Sci. URSS*, **14** (1937), 541–544.
[3] On the theory of stability of the solutions of differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, I, 5/6 (15/16), (1946), 250–255 (Russian).
[4] On Lyapunov's second method, *Izv. Akad. Nauk KazSSR, ser. mat. mekh.*, **1** (1947), (Russian).

PETROVSKII, I. G.
[1] Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singularen Punktes, *Mat. Sbornik*, **41** (1934), 107–156; **42** (1935), 403.

POINCARÉ, H.
[1] *Méthodes nouvelles de la Méchanique Celeste*, vol. I, Paris, 1892.

POZHARISKI, G. K.
[1] On the characteristic exponents of the vanishing solutions of the equation of perturbed motion, *Prikl. Mat. i Meh.*, **19** (1955), 481–484 (Russian).
[2] On a property of the characteristic numbers of the solutions of differential equations, *ibid.*, **22** (1958), 707–710 (Russian).

RAB, M.
[1] Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen, *Czech. Math. Jour.*, **8** (83) (1958), 222–228.

RAPOPORT, I. M.
[1] *On certain asymptotic methods in the theory of differential equations*, Izdat, Akad. Nauk UkSSR, Kiev, 1954 (Russian)
RASUMIKHIN, B. S.
[1] On the application of Lyapunov's method to the problem of stability, *Prikl. Mat. i Mekh.*, **22** (1958), 338–349 (Russian).
ROSENBLATT, A.
[1] On the growth of the solutions of ordinary differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 723–727.
RUMYANTSEV, V. V.
[1] On the stability of motion with respect to some of the variables, *Vestnik Mosk. Univ., ser. mat. mekh.*, 1957, N° 4, 9–16 (Russian).
SANTORO, P.
[1] Sulla stabilità uniforme e asintotica uniforme in prima approssimazione, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*. (8) **28** (1960), 336–341
SHESTAKOV, A. A. and PAIVIN, A. U.
[1] On the asymptotic behavior of the solutions of non-linear systems of differential equations, *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **58** (1948), 495–498 (Russian).
STOKES, A.
[1] The application of a fixed-point theorem to a variety of nonlinear stability problems, *Proc. Nat. Acad. Sci USA*, **46** (1959), 231—235; *Contrs. to the theory of nonl. oscills.*, vol. 5 (1960), 173–184.
SZMYDT, Z.
[1] Sur les systèmes d'équations différentielles dont toutes les solutions sont bornées, *Ann. Pol. Math.*, **2** (1955), 234–236.
TRIJITZINSKY, W.
[1] Properties of growth for solutions of differential equations of dynamic type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **50** (1941), 252–294.
TURAN, P.
[1] On the instability of systems of differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 257–270.
[2] On the property of the stable or conditionally stable solutions of systems of non-linear differential equations, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4) **48** (1959,) 333–340.
VINOGRAD, R. E.
[1] On a criterion of instability in the sense of Lyapunov of the solutions of a linear system of ordinary differential equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **84** (1952), 201–204 (Russian).
[2] Estimate of the jump of the higher characteristic exponent in the case of small perturbations, *ibid.*, **114** (1957), 459–461 (Russian).
[3] On the central characteristic index of a system of differential equations, *Mat. Sbornik*, **42** (1957), 207–222 (Russian).
[4] Inapplicability of the method of characteristic exponents to the study of non-linear differential equations, *ibid.*, **41** (83) (1957), 431–438 (Russian).
VRKOČ, I.
[1] On the inverse theorem of Chetayev, *Czech. Math. Jour.*, **5** (1955), 451–461 (Russian).
[2] Integral stability, *ibid.*, **9** (84) (1959), 71–129 (Russian)
WAZEWSKI, T.
[1] Systemes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications, *Ann. Soc. Pol. Math.* **23** (1950), 112–166.
WEYL, H.

[1] Comment on the preceding paper, *Amer. Jour. Math.*, **68** (1946), 7–12

WINTNER, A.

[1] Small perturbations, *Amer. Jour. Math.*, **67** (1945), 417–430.

[2] Asymptotic equilibria, *ibid.*, **68** (1946), 125–132.

[3] Linear variation of constants, *ibid.*, 185–213.

[4] An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria, *ibid.*, 451–454.

[5] Asymptotic integration constants, *ibid.*, 553–559.

[6] On linear asymptotic equilibria, *ibid.*, **71** (1949), 853–858.

[7] On free vibrations with amplitudinal limits, *Quart. Appl. Math.*, **8** (1950), 102–104

[8] On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations, *Amer. Jour. Math.*, **76** (1954), 183–190.

YAKUBOVICH, V. IA.

[1] On the asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations, *Mat. Sbornik*, **28** (70) (1951), 217–240 (Russian).

YOSHIZAWA, T.

[1] On the stability of solutions of a system of differential equations, *Mem. Coll.. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A.*, *29* (1955), 27–33.

[2] On the equiasymptotic stability in the large, *ibid.*, **32** (1959), 171–180.

[3] Lyapunov's function and boundedness of solutions, *Funkcialaj Ekvacioj*, **2** (1959), 95–142.

[4] Stability and boundedness of systems, *Arch. for Rat. Mech. & Anal.*, **6** (1960), 409–421.

ZOLOTAREV, YU. G.

[1] On the stability in the first approximation, *Izv. Akad. Nauk KazSSR, ser mat. mekh.*, **5** (9) (1956), 62–70 (Russian).

ZUBOV, V. I.

[1] *Methods of A. M. Lyapunov and their applications*, Izdat, Leningr. Univ. (1957) (Russian).

[2] *Mathematical methods for the investigation of systems of automatic regulation*, Sudpromgiz, Leningrad, (1959) (Russian).